НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Миомир Анђић

НЕКЕ ДИО ПО ДИО ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

Функција, са доменом на бројној оси, назива се *дио по дио линеарном* ако домен можемо разложити (разбити) на интервале ненулте дужине, тако да је унутар сваког од њих функција линеарна.

Основни примјери дио по дио линеарних функција су слиједеће функције:

1. Сигнум.

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbf{R} \to \{-1,0,1\},\ \operatorname{sgn} x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1, & \text{за } x < 0,\\ 0, & \text{за } x = 0,\\ 1, & \text{за } x > 0. \end{cases}$$

$\operatorname{sgn} x$ („сигнум од x“ или „знак од x“). График је приказан на сл. 1.

Примјери: $\operatorname{sgn} 1995 = 1$, $\operatorname{sgn}(-1995) = -1$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Сл. 1 Сл. 2

2. Цио дио.

$[\ ]\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$, $[x] \stackrel{\text{def}}{=} k$, $k \leqslant x < k+1$, $k \in \mathbf{Z}$.

$[x]$ („цио дио од x“ или „антје x“); $[x]$ је највећи цио број који није већи од x (не премашује x). График је приказан на сл. 2.

Примјери: $[2{,}4] = 2$, $[3] = 3$, $[0] = 0$, $[-2] = -2$, $[-3{,}6] = -4$.

3. Разломљен дио.

$\{\ \}\colon \mathbf{R} \to [0,1)$, $\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} x - [x]$, тј. $\{x\} = x - k$, $x \in [k, k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\{x\}$ („разломљени дио од x“). График је на слици 3.

Примјери: $\{3{,}1\} = 0{,}1$, $\{5\} = 0$, $\{-2\} = 0$, $\{-2{,}7\} = 0{,}3$.

Саопштено на 9. конгресу математичара Југославије, Петровац, 22–27. маја 1995.

Сл. 3 Сл. 4

4. Апсолутна вредност (модул).

$| \ |\colon \mathbf{R} \to [0,+\infty)$, $|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{за } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{за } x < 0. \end{cases}$

Сем поменутих, постоје и многи други примјери дио по дио линеарних функција, као на примјер:

$$f(x) = \arcsin|\sin x|, \quad f(x) = \arccos(\cos x),$$
$$f(x) = \Big|\big||x|-1\big|-1\Big|, \quad f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x+1}{1-x^{2n}}, & \text{за } x \notin \{-1,1\}, \\ 0, & \text{за } x \in \{-1,1\}. \end{cases}$$

Њихови графици приказани су, редом, на сликама 5, 6, 7 и 8.

Сл. 5 Сл. 6

Сл. 7 Сл. 8

Основна својства функција sgn, [ ] и { } дата су у слиједећим теоремама.

Теорема 1. *За реалне бројеве x и y важи:*

i) $|x| = x \operatorname{sgn} x$;

ii) $x = |x| \operatorname{sgn} x$;

iii) $\operatorname{sgn} x = \dfrac{x}{|x|}$, $x \neq 0$;

iv) $\operatorname{sgn}^2 x = \begin{cases} 1, & \text{за } x \neq 0, \\ 0, & \text{за } x = 0. \end{cases}$

v) $\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$

vi) $\operatorname{sgn} \dfrac{x}{y} = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn} y} = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$, $y \neq 0$.

Доказ. Докажимо својство *vi*), јер остала слиједе непосредно из дефиниције функција $|\ |$ и sgn.

Због $y \neq 0$ је, на основу *iv*), $\operatorname{sgn}^2 y = 1$. Множећи релацију $\operatorname{sgn} \dfrac{x}{y} = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn} y}$ са $\operatorname{sgn}^2 y$ добијамо $\operatorname{sgn} \dfrac{x}{y} = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$. ■

Теорема 2. *За $x, y \in \mathbf{R}$ важи:*

i) $x = [x] + \alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$;

ii) $[x] \leqslant x < [x] + 1$;

iii) $x - 1 < [x] \leqslant x$;

iv) $x \in \mathbf{Z} \implies [x] = x$;

v) $\big[[x]\big] = [x]$;

vi) $[x + k] = [x] + k$, $k \in \mathbf{Z}$;

vii) $[-x] = \begin{cases} -[x], & \text{за } x \in \mathbf{Z}, \\ -[x] - 1, & \text{за } x \notin \mathbf{Z}; \end{cases}$

viii) $n \in \mathbf{N} \implies \left[\dfrac{[x]}{n}\right] = \left[\dfrac{x}{n}\right]$;

ix) $\left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = [x]$;

x) $\left[x + \dfrac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$;

xi) $x \geqslant 0 \implies [\sqrt{x}] = \left[\sqrt{[x]}\right]$;

xii) $[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$;

xiii) $[x - y] \leqslant [x] - [y] \leqslant [x - y] + 1$;

xiv) $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \implies [x][y] \leqslant [xy] \leqslant [x][y] + [x] + [y]$;

xv) $[2x] + [2y] \geqslant [x] + [x + y] + [y]$.

Доказ. Особине *i*)–*v*) слиједе непосредно из дефиниције цијелог дијела.

vi) На основу *iii*) је $x + k - 1 < [x + k] \leqslant x + k$, одакле слиједи $x - 1 < [x + k] - k \leqslant x$ и, због $k \in \mathbf{Z}$, $[x + k] - k = [x]$, тј. $[x + k] = [x] + k$.

vii) $x \in \mathbf{Z} \implies -x \in \mathbf{Z} \implies [-x] = -x = -[x]$.

$x \notin \mathbf{Z} \implies x = [x] + \alpha \wedge 0 < \alpha < 1 \implies -x = -[x] - \alpha \implies [-x] = [-[x] - 1 + \beta] \wedge 0 < \beta < 1 \implies [-x] = -[x] - 1 + [\beta] \implies [-x] = -[x] - 1$.

viii) Из $x = [x] + \alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$ и $[x] = qn + r$, $q \in \mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant r \leqslant n - 1 < n$ слиједи $\dfrac{[x]}{n} = q + \dfrac{r}{n}$, $0 \leqslant \dfrac{r}{n} < 1$, па је $\left[\dfrac{[x]}{n}\right] = q$. С друге стране је

$$\frac{x}{n} = \frac{[x]}{n} + \frac{\alpha}{n} = q + \frac{r}{n} + \frac{\alpha}{n} = q + \frac{r + \alpha}{n}.$$

Из $r \in \mathbf{N} \wedge r < n \wedge 0 \leqslant \alpha < 1$ слиједи $0 \leqslant r + \alpha < r + 1 \leqslant n$, одакле $0 \leqslant \dfrac{r + \alpha}{n} < 1$, што са претходним даје $\left[\dfrac{x}{n}\right] = q$. Дакле, $\left[\dfrac{[x]}{n}\right] = \left[\dfrac{x}{n}\right]$.

ix) Нека је $x=[x]+\alpha$, $0\leqslant\alpha<1$ и нека је прво $[x]$ паран број, тј. нека је $[x]=2k$, $k\in\mathbf{Z}$. Тада је

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]=\left[\frac{2k+\alpha}{2}\right]+\left[\frac{2k+\alpha+1}{2}\right]=\left[k+\frac{\alpha}{2}\right]+\left[k+\frac{\alpha+1}{2}\right]$$
$$=k+\left[\frac{\alpha}{2}\right]+k+\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]=2k=[x],$$

јер је $\left[\frac{\alpha}{2}\right]=\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]=0$ за $\alpha\in[0,1)$.

Сада, нека је $[x]$ непаран број, тј. $[x]=2k+1$, $k\in\mathbf{Z}$. Тада је

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]=\left[k+\frac{\alpha+1}{2}\right]+\left[k+1+\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$=k+\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]+k+1+\left[\frac{\alpha}{2}\right]=2k+1=[x],$$

чиме је доказ завршен.

x) Добија се из *ix*) ако се уместо x напише $2x$.

xi) Сваки број $x\geqslant 0$ може се написати у облику $x=n^2+m+\alpha$; $n,m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $0\leqslant m\leqslant 2n$, $0\leqslant\alpha<1$, па је

$$\left[\sqrt{[x]}\right]=\left[\sqrt{[n^2+m+\alpha]}\right]=\left[\sqrt{n^2+m+[\alpha]}\right]=\left[\sqrt{n^2+m}\right]$$
$$=n+\left(\left[\sqrt{n^2+m}\right]-n\right)=n+\left[\sqrt{n^2+m}-n\right]=n,$$

јер је $0\leqslant\sqrt{n^2+m}-n\leqslant\sqrt{n^2+2n}-n<\sqrt{n^2+2n+1}-n=n+1-n=1$.

Даље, $[\sqrt{x}]=[\sqrt{n^2+m+\alpha}]=n-[\sqrt{n^2+m+\alpha}-n]=n$, јер је $0\leqslant\sqrt{n^2+m+\alpha}-n<1$.

Директна последица доказане особине је слиједећа особина: $x\geqslant 0\implies[\sqrt[4]{x}]=\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]$, јер је $\sqrt[4]{x}=\sqrt{\sqrt{x}}$ и $\sqrt{x}\geqslant 0$.

xii) Из $x=[x]+\alpha$, $0\leqslant\alpha<1$ и $y=[y]+\beta$, $0\leqslant\beta<1$ имамо

$$[x+y]=\big[[x]+\alpha+[y]+\beta\big]=[x]+[y]+[\alpha+\beta].$$

С обзиром да је $[x]+[y]\in\mathbf{Z}$ и $0\leqslant\alpha+\beta<2$, тј. $0\leqslant[\alpha+\beta]\leqslant 1$, из претходног слиједи тражена неједнакост. При том се закључује да важи

$$[x+y]=[x]+[y]\iff x\in\mathbf{Z}\wedge y\in\mathbf{Z}.$$

xiii) Из $[x]=[(x-y)+y]\leqslant[x-y]+[y]+1$ слиједи $[x]-[y]\leqslant[x-y]+1$, а са друге стране, користећи *xii*) имамо да из $[x]=[(x-y)+y]\geqslant[x-y]+[y]$ слиједи $[x]-[y]\geqslant[x-y]$.

xiv) Из $x = [x] + \alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$ и $y = [y] + \beta$, $0 \leqslant \beta < 1$ имамо

$$\begin{aligned} [xy] &= [([x] + \alpha)([y] + \beta)] = \big[[x][y] + \beta[x] + \alpha[y] + \alpha\beta\big] \\ &= [x][y] + \big[\beta[x] + \alpha[y] + \alpha\beta\big]. \end{aligned}$$

Како је $x, y \geqslant 0$, то је $\big[\beta[x] + \alpha[y] + \alpha\beta\big] \geqslant 0$, па из претходне релације слиједи $[xy] \geqslant [x][y]$.

Даље, из

$$\begin{aligned} \big[\beta[x] + \alpha[y] + \alpha\beta\big] &= \big[(1-\delta)[x] + (1-\gamma)[y] + \alpha\beta\big] \qquad (0 < \gamma, \delta \leqslant 1) \\ &= \big[[x] + [y] + \alpha\beta - (\delta[x] + \gamma[y])\big] = [x] + [y] + \big[\alpha\beta - (\delta[x] + \gamma[y])\big] \\ &\leqslant [x] + [y] + [\alpha\beta] - \big[\delta[x] + \gamma[y]\big] \qquad (\text{на основу } xiii)) \\ &= [x] + [y] - \big[\delta[x] + \gamma[y]\big] \leqslant [x] + [y] \end{aligned}$$

слиједи други дио неједнакости $[xy] \leqslant [x][y] + [x] + [y]$.

xv) Нека је $x = [x]+\alpha$, $y = [y]+\beta$, $0 \leqslant \alpha, \beta < 1$, одакле слиједи $0 \leqslant \alpha+\beta < 2$, дакле $0 \leqslant \alpha + \beta < 1$ или $1 \leqslant \alpha + \beta < 2$.

Ако је $\alpha+\beta < 1$, онда је $[x+y] = \big[[x]+\alpha+[y]+\beta\big] = [x]+[y]+[\alpha+\beta] = [x]+[y]$, па је

$$\begin{aligned} [2x] + [2y] &= \big[2([x] + \alpha)\big] + \big[2([y] + \beta)\big] = 2[x] + [2\alpha] + 2[y] + [2\beta] \\ &\geqslant 2[x] + 2[y] = [x] + [y] + ([x] + [y]) = [x] + [y] + [x + y]. \end{aligned}$$

Ако је $1 \leqslant \alpha + \beta < 2$, онда је $2 \leqslant 2\alpha + 2\beta < 4$, дакле $2\alpha \geqslant 1$ или $2\beta \geqslant 1$. Нека је $2\alpha \geqslant 1$; тада је

$$\begin{aligned} [x + y] &= \big[[x] + \alpha + [y] + \beta\big] = [x] + [y] + [\alpha + \beta] = [x] + [y] + 1, \\ [2x] &= \big[2([x] + \alpha)\big] = 2[x] + [2\alpha] = 2[x] + 1, \\ [2y] &= \big[2([y] + \beta)\big] = 2[y] + [2\beta] = \begin{cases} 2[y], & \text{за } 0 \leqslant 2\beta < 1, \\ 2[y] + 1, & \text{за } 1 \leqslant 2\beta < 2, \end{cases} \end{aligned}$$

па је

$$[2x] + [2y] \geqslant 2[x] + 1 + 2[y] = [x] + [y] + ([x] + [y] + 1) = [x] + [y] + [x + y]. \quad \blacksquare$$

Теорема 3. *За $x \in \mathbf{R}$ важи:*

i) $0 \leqslant \{x\} < 1$; *ii*) $x \in \mathbf{Z} \ \Rightarrow \ \{x\} = \{-x\} = 0$;

iii) $[\{x\}] = 0$; *iv*) $\{[x]\} = 0$; *v*) $\{\{x\}\} = \{x\}$;

vi) $k \in \mathbf{Z} \ \Rightarrow \ \{x + k\} = \{x\}$ *vii*) $\{-x\} = \begin{cases} \{x\}, & \text{за } x \in \mathbf{Z}, \\ 1 - \{x\}, & \text{за } x \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$

Доказ. *i*) На основу Теореме 2*ii*) имамо $[x] \leqslant x < [x] + 1$, одакле је $0 \leqslant x - [x] < 1$, тј. $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Својства *ii*)–*v*) слиједе непосредно из дефиниције.

vi) $\{x+k\} = x+k-[x+k] = x+k-([x]+k) = x-[x] = \{x\}$. Из овог својства се закључује да је $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ период функције $f(x) = \{x\}$, а њен основни период је број 1.

vii) На основу *ii*) је $\{-x\} = \{x\} = 0$ за $x \in \mathbf{Z}$. За $x \notin \mathbf{Z}$ је $\{-x\} = -x - [-x] = -x - (-[x] - 1) = -x + [x] + 1 = 1 - (x - [x]) = 1 - \{x\}$. $\blacksquare$