НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1995, XLI, 1–2, стр. 1–16

Др Раде Живаљевић

ЕТИДА ЗА СФЕРУ, КВАТЕРНИОНЕ И ДИРАКОВ ТРИК СА ОПАСАЧЕМ

1. Дираков трик са опасачем

Узмите довољно дугачак опасач (каиш) или нешто слично што га може заменити и један крај на ком је копча фиксирајте око неке пречке, тако да тај крај остане мање више у фиксираном положају (сл. 1_a). Такође корисно је да се стране каиша јасно разликују, нпр. једна страна каиша је тамна а друга светла. Уврните каиш неколико пута око своје уздужне осе (сл. 1_b) пазећи да број увртаја, тј. пуних окрета за 360^0 буде непаран, рецимо направите три пуна окрета. Каиш се као што показује слика 1_b поприлично усукао и сада присутнима поставите следећи проблем. Замолите их да покушају отпетљати каиш, тј. да га покушају вратити у положај са слике 1_a било каквим покретима каиша у простору при чему врх каиша мора, и то је једини услов, увек показивати у истом смеру.

Последњи услов се сасвим прецизно може исказати на следећи начин. Приметимо да су при сваком положају каиша у свакој његовој тачки x дефинисана два вектора a и b. Први вектор је тангентни вектор на каиш (тачније на криву која пролази средином каиша) док је други вектор b вектор нормалан на тамнију страну каиша. Допуштена су било каква померања каиша која не мењају ни правац ни смер вектора a и b који су конструисани при самом крају каиша.

Сл. 1

После неколико покушаја се свако брзо уверава да под датим ограничењима нема много шансе да се каиш отпетља. Сада тријумфално наступате ви тако што објавите да је задатак превише лак за вас и да ћете га још више отежати тако што ћете каиш још једанпут уврнути. Још боље ако као случајно каиш испустите а онда га уврнете паран број пута. Лаган експеримент показује да се овога пута каиш може отпетљати.

Слика 2 даје један визуелан наговештај због чега се два пута (паран број пута) каиш може распетљати.

Сл. 2

Врло сличан по духу трик се може извести на следећи начин. Узмите чашу са мало воде и затражите од присутних да, држећи при томе чашу у једној руци и не померајући тело, заротирају чашу око своје уздужне осе за 720^0 а да при томе не проспу воду. Објашњење како се то може извести је дато на слици 3.

Сл. 3

2. Лице које се смеје и кватерниони

С једне стране учвршћена трака или кратко каиш крије у себи и друге занимљивости и што је заиста интересантно, врло садржајну математику. Нешто од тога се показало већ и у трику са опасачем. Да би ти феномени били лакше описани и лакше опажени, направимо „модел“ каиша који се састоји од лица које је с једне стране насмејано а с друге тужно и које је окачено на два (дебља) канапа.

У староиталској и римској митологији је познат бог Јанус, приказан са два лица, једним младићким које гледа напред у будућност и другим старим које гледа назад у прошлост. Наш модел, као што ће се видети, крије у себи многе тајне и сигурно заслужује да га посветимо древном Јанусу. Ипак, пошто он изгледа помало као дечији јунак чича Глиша (чудо од слаткиша), зваћемо га пуним именом и презименом *Смешко Јанус* или кратко Смешко. Наш Смешко се такође може употребити за приказивање трика са опасачем. Приметимо да два канапа играју улогу контуре каиша док само лице има улогу његовог краја. У овом случају се услов да врх каиша мора показивати увек у истом смеру може нпр. исказати тако што се тражи да лице Смешка има увек исти положај без обзира шта се догађа са осталим делом модела. Ипак постоји и важна напомена. Смешко је направљен као модел каиша при чему конопци играју улогу његове контуре што значи да би стриктно говорећи требало да замишљамо да је између конопаца разапета „невидљива“ тканина, тј. при покретима Смешка није дозвољено *да лице прође између конопаца*. Сада смо коначно спремни за експерименте.

Изаберимо фиксирани ортонормирани репер тј. систем од три јединична узајамно ортогонална вектора i, j, k. На пример, можемо изабрати три вектора одређена координатним осама једног ћошка собе у којој се налазимо (сл. 4). Дефинишимо три просте операције над Смешком уз помоћ ових вектора које ћемо према одговарајућим векторима означити са I, J, K. Прва операција I, дефинише се као операција којом се лице Смешка заротира за 180^0 у позитивном смеру око вертикалне осе, тј. осе одређене вектором i. „У позитивном смеру“ значи, као и обично, да ухватимо Смешка „за врат“ десном руком тако да палац показује у смеру вектора i (на горе) и ротирамо у правцу осталих прстију. Слично се дефинишу и остале операције, J и K, при чему се лице ротира око оса одређених редом векторима j и k.

Сл. 4

Дефинишимо *стање Смешка* као било који положај нашег модела и договоримо се да *два положаја модела репрезентују исто стање уколико се из једног положаја може прећи у други (непрекидним) померањем Смешка таквим да целим путем лице остане паралелно само себи.* Приметимо да је овај услов паралелности онај исти који се појавио у трику са опасачем.

Нека је $\mathbf{1}$ неутрална операција тј. она операција која модел уопште не помера. Посматрајмо све до сада описане операције $\mathbf{1}$, I, J, K као операције дефинисане не само на конкретним положајима Смешка већ и на његовим стањима. Лако се уверавамо да су ове операције коректно дефинисане на стањима, тј. да ако два положаја модела репрезентирају исто стање, да онда и горње операције воде ка положајима који се такође налазе у истом стању. Заправо, пажљиви читалац је можда већ приметио да сама дефиниција операција J и K као да захтева да оне буду дефинисане на *скупу свих стања* радије него на скупу свих положаја нашег модела.

Сл. 5

Заиста, примећујемо да стриктно говорећи *операција J примењена на основни положај Смешка доводи до различитих положаја резултата у зависности од тога да ли при ротацији канапчићи остају испред или иза равни у којој ротира лице Смешка. Међутим није тешко видети* (проверите) *да ова два положаја представљају исто стање модела тј. да се из једног може непрекидно прећи у други не мењајући положај самог лица.* Дакле, кад је реч о стањима модела, наше операције су на том скупу недвосмислено дефинисане.

Забавимо се сада композицијама дефинисаних операција. Прво, $I^4 = \mathbf{1}$. Заиста, ово је само други начин описа трика са опасачем. Даље, показује се лаганим експериментом или цртежом да је $J^4 = \mathbf{1}$, а није тешко проверити да је и $K^4 = \mathbf{1}$. Дакле, $I^4 = J^4 = K^4$, а није тешко доказати да је заправо $I^2 = J^2 = K^2$, слика 5 је нпр. доказ за $J^2 = I^2$, па уводимо ознаку $I^2 =: -\mathbf{1}$ мотивисану тиме што је I^2 „корен“ од $\mathbf{1}$. Даље, није тешко проверити да нпр. композиција операција J и I, JI, при чему се прво примењује операција I, води до истог стања иако не и до исте слике (!) као и операција $(-\mathbf{1})K =: -K$ (слика 6).

Сл. 6

Читатељки односно читаоцу топло препоручујемо да на импровизованом моделу провери све могуће комбинације ових операција које воде до једнакости датих у таблици на слици 7.

$$
\begin{array}{ccc}
IJ = K & JK = I & KI = J \\
JI = -\mathbf{1}K & KJ = -\mathbf{1}I & IK = -\mathbf{1}J
\end{array}
$$

$$
\mathbf{1}X = X\mathbf{1} = X \quad \text{и} \quad (-\mathbf{1})X = X(-\mathbf{1}),
$$

$$
\text{за све} \quad X \in \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, I, J, K\}.
$$

Сл. 7

3. Алгебра кватерниона

Једнакости дате у горњој таблици су врло „живе“ у смислу да су изникле непосредно из геометрије једног „живог“ модела. Очевидно је да би и потпуније изучавање природе ових једнакости повратно казало нешто ново и о нашем моделу.

Овде ћемо се договорити да ћемо при испитивању апстрактних, алгебарских особина наших операција користити ознаке i, j, k, док ћемо велика слова сачувати као ознаке за стварне операције над Смешком Јанусом.

Питање: Колико се разних операција може добити комбиновањем операција $\mathbf{1}$, I, J, K ?

Природа горе дефинисаних операција показује да је њихово компоновање (множење) асоцијативно. Из горње таблице се види да поред полазних, појављују се још само операције $-\mathbf{1} := I^2 = J^2 = K^2$ и $(-\mathbf{1})I =: -I$, $(-\mathbf{1})J =: -J$, $(-\mathbf{1})K =: -K$.

Одавде имамо да је скуп $\{\mathbf{1}, i, j, k, -\mathbf{1}, -i, -j, -k\}$ затворен у односу на горе дефинисано множење, шта више он чини групу с обзиром на ту операцију.

Као што знамо, скуп са бинарном операцијом је група уколико постоји неутрални (јединични) елемент (у нашем случају је то $\mathbf{1}$) и ако сваки елемент има себи инверзан елемент (нпр. инверз од i је $-i$).

Једна од подгрупа ове групе је и мала циклична група $\{\mathbf{1}, i\}$. С друге стране елементи $\mathbf{1}$ и i се уз мало добре воље, а захваљујући релацији $i^2 = -\mathbf{1}$, могу видети у амбијенту поља $\mathbf{C}$ комплексних бројева. Имајући овај пример на уму као мотивацију, дефинишимо по аналогији поље (алгебру) бројева у коме ће се сви елементи $i, j, k, \ldots$ осећати као код куће.

Дефиниција 3.1. Означимо са Q скуп $\mathbf{R}^4 = \{\, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}\,\}$ са операцијама множења и сабирања дефинисаним на следећи начин. Пре свега, идентификујмо елементе $\mathbf{1}, i, j, k$ редом са векторима $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ одакле следи да се типични елемент од Q може написати у облику $\alpha\mathbf{1} + \beta i + \gamma j + \delta k$. Сабирање као и множење реалним бројем оваквих израза је дефинисано на уобичајени начин; то је оно обично сабирање и множење вектора реалним бројем наслеђено из $\mathbf{R}^4$. Множење оваквих израза је дефинисано као јединствена дистрибутивна и асоцијативна операција у којој се елементи $\mathbf{1}, i, j, k$ множе према горњој таблици при чему, ово је важно, *елементе* $-i, -j, -k$ *идентификујемо са* $(-1)i, (-1)j, (-1)k$.

На пример, $(2\mathbf{1} + 1i + (-3)j)((-1)\mathbf{1} + (-1)j + 1k) = (-2)\mathbf{1}\mathbf{1} + (-1)i\mathbf{1} + 3j\mathbf{1} + (-2)\mathbf{1}j + (-1)ij + 3jj + 2\mathbf{1}k + 1ik + (-3)jk = (-2)\mathbf{1} + (-1)i + 3j + (-2)j + (-1)k + 3(-\mathbf{1}) + 2k + (-j) + (-3)i = (-5)\mathbf{1} + (-4)i + 1k$.

Сад кад смо се већ мало навикли на *кватернионе* (како називамо елементе горе уведеног скупа Q), користићемо често економичнији запис у коме се идентификују 1 и $\mathbf{1}$. На пример, $(-5)\mathbf{1} + (-4)i + 1k$ се кратко записује овако $-5 - 4i + k$.

Дефиниција 3.2.

а) $\mathrm{Im}(q) := \beta i + \gamma j + \delta k$ се назива имагинарни а $\mathrm{Re}(q) := \alpha$ реални део кватерниона $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$. Кватернион q је имагинаран уколико је $\mathrm{Re}(q) = 0$. Нека је $\mathrm{Im}(Q)$ скуп свих имагинарних кватерниона.

б) $\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$ је конјуговани кватернион кватерниона q.

в) Норма $|q|$ кватерниона q је дужина вектора $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^4$, дакле $|q| = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^{1/2}$.

По много чему су кватерниони слични комплексним бројевима. Сви појмови уведени у дефиницији 3.2 имају смисла и за комплексне бројеве. Фундаментална разлика је да множење кватерниона није комутативно нпр. $i\,j \neq j\,i$. Следећи став показује да се кватерниони, уз модификације које су последица некомутативности, понашају онако као што би се од њих као од рођака комплексних бројева и очекивало.

Став 3.3.

(а) $\bar{\bar{q}} = q$; *(б)* $q = 0 \;\Leftrightarrow\; |q| = 0$ *за све* $q \in Q$;

(в) $q \in \mathrm{Im}(Q) \;\Rightarrow\; q^2 = -\langle q, q\rangle = |q|^2$, *где је* $\langle q, q'\rangle = \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'$ *уобичајни скаларни производ вектора* $q = \beta i + \gamma j + \delta k$ *и* $q' = \beta' i + \gamma' j + \delta' k$,

(г) $q\,\bar{q} = |q|^2$ *за све* $q \in Q$,

(д) $\overline{q\,q'} = \bar{q}'\bar{q}$ *за све* $q, q' \in Q$,

(ђ) $|q\,q'| = |q|\,|q'|$, $q, q' \in Q$.

Доказ. Тврђења под (а) и (б) су очевидна. Тврђење под (в) је непосредна последица опажања да се нпр. чланови $\beta\gamma ij$ и $\gamma\beta ji$ у производу $q^2 = qq$ међусобно поништавају. За (г) приметимо да ако q запишемо као суму свог реалног и имагинарног дела, $q = r + q'$, онда је $q\bar{q} = (r+q')(r-q') = r^2 - {q'}^2 = r^2 + |q'|^2 = |q|^2$, Једнакост под (д) се лако провери у случају да је $q, q' \in \{\mathbf{1}, i, j, k\}$. Општи случај се лако своди на ове специјалне ако се примети да обе стране једнакости билинеарно зависе од аргумената q и q'. На крају, $|q\,q'|^2 = qq'\overline{qq'} = qq'\bar{q}'\bar{q} = |q|^2|q'|^2$, што доказује и једнакост под (ђ). ∎

Став 3.4. *Структура $(Q, +, \cdot, 0, \mathbf{1})$ образује некомутативно поље (тело).*

Доказ. Поље је као што знамо структура чији се елементи (бројеви) сабирају и множе према уобичајеним законима. Као прво тражи се да $(Q, +, 0)$ и $(Q \setminus \{0\}, \cdot, \mathbf{1})$ буду комутативне групе. Ако друга од тих група није комутативна говоримо о некомутативном пољу или телу. Додатни услов је и закон дистрибуције који показује како се међусобно односе операције $+$ и $\cdot$.

У нашем случају је све већ проверено осим да је $(Q \setminus \{0\}, \cdot, \mathbf{1})$ група. Ово је лагана последица става 3, (б) и (г), одакле следи да је $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$, $q \in Q \setminus \{0\}$. ∎

Последица 3.5. Нека је $S^3 = \{\, q \in Q \mid |q| = 1 \,\}$ колекција свих јединичних кватерниона; ознака S^3 указује на то да они образују тродимензионалну, јединичну сферу чија је једначина $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$. Приметимо да из Става 3.3(ђ) следи $q, q' \in S^3 \;\Rightarrow\; q \cdot q' \in S^3$ што значи да је $(S^3, \cdot, \mathbf{1})$ такође група. Приметимо да је у овом случају $q^{-1} = \bar{q}$.

Последица 3.6. Нека су u, v, w три имагинарна кватерниона који чине ортонормирани систем с обзиром на већ поменути скаларни производ $\langle\ ,\ \rangle$ у $\mathrm{Im}(Q) \cong \mathbf{R}^3$. Став 3 (в) показује да су закони множења за u, v, w потпуно исти као за тројку i, j, k, тј. да *као имагинарне јединице могу послужити било која ортонормирана тројка имагинарних вектора*!

4. Репрезентација изометрија уз помоћ кватерниона

Наш амбијентни простор је $\mathbf{R}^3$ и у њему се дужине вектора мере уз помоћ стандардног скаларног производа $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Линеарно пресликавање (линеарна трансформација) или матрица $o\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ која чува удаљености тј. за коју важи једнакост $\langle o(x), o(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ назива се ортогонално пресликавање или (линеарна) изометрија. Група свих таквих пресликавања се назива ортогонална група и означава са $O(3, \mathbf{R})$. Није тешко доказати да је детерминанта ортогоналне трансформације увек 1 или -1. Подгрупа оних трансформација које имају детерминанту 1 се назива специјална ортогонална група и означава са $SO(3, R)$.

Идентификујући као и пре $\mathrm{Im}(Q)$ са $\mathbf{R}^3$, дефинисаћемо хомоморфизам група

$$h\colon S^3 \to SO(3, R)\,.$$

Став 4.1. *Нека је $q \in S^3$. Пресликавање $h(q)\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $x \mapsto qx\bar{q}$, дефинише ортогоналну трансформацију у $\mathbf{R}^3$. Поред тога важи $h(qq') = h(q)\,h(q')$ за $q, q' \in S^3$, тј. пресликавање h је хомоморфизам групе S^3 у групу $SO(3, \mathbf{R})$.*

Доказ. Уверимо се пре свега да је $h(q)$ добро дефинисано пресликавање, тј. да $x \in \mathrm{Im}(Q)$ повлачи $h(q)(x) \in \mathrm{Im}(Q)$. Ово се лако проверава имајући у виду еквиваленцију $x \in \mathrm{Im}(Q) \ \Leftrightarrow\ \bar{x} = -x$. Дакле, уз претпоставку $\bar{x} = -x$, имамо $\overline{qx\bar{q}} = \bar{\bar{q}}\bar{x}\bar{q} = q(-x)\bar{q} = -qx\bar{q}$, тј. $qx\bar{q} \in \mathrm{Im}(Q)$. Даље, $|h(q)(x)| = |qx\bar{q}| = |q||x||\bar{q}| = |x|$, тј. $h(q) \in O(3,\mathbf{R})$. Пошто из $a \in O(3,\mathbf{R})$ следи $\det(a) \in \{1,-1\}$ и пошто детерминанта дефинише непрекидно пресликавање $D\colon S^3 \to \{-1,+1\}$, $D(q) := \det(h(q))$, закључујемо, јер је сфера S^3 повезан простор, да је $D(q) = +1$, тј. $h(q) \in SO(3,\mathbf{R})$ за све $q \in S^3$.

На крају, $h(qq')(x) = qq'x\overline{qq'} = q(q'x\bar{q}')\bar{q} = h(q)h(q')(x)$. ■

Није тешко доказати, иако сама ова чињеница не мора бити очевидна при првом сусрету са њом, да је свака трансформација $a \in SO(3,\mathbf{R})$ заправо ротација око неке осе (оријентисане праве) за неки угао у позитивном смеру. Ми знамо да је $h(q)$ једна таква трансформација па се питамо која оса и који угао њој одговарају.

Став 4.2. *Сваки јединични кватернион q се може на јединствен начин написати у облику $q = \cos\alpha + k\sin\alpha$, где је $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ и $k \in \mathrm{Im}(Q)$, $|k| = 1$. Тврдимо да је тада $h(q) \in SO(3,\mathbf{R})$ заправо ротација око осе одређене вектором k за угао 2α у позитивном смеру!*

Доказ. Већ је запажено у последици 3.6 да су јединични, имагинарни кватерниони међусобно равноправни или прецизније да постоји аутоморфизам $U\colon Q \to Q$ тела кватерниона који преводи i у k. Одавде се види да је $h(q) = h(\cos\alpha + U(i)\sin\alpha) = h(U(\cos\alpha + i\sin\alpha)) = U(h(\cos\alpha + i\sin\alpha))$, где последња једнакост следи из чињенице да је U аутоморфизам а да је h операција задана множењем и конјуговањем кватерниона, тј. помоћу операција са којима U комутира. Према томе знаћемо шта је $h(q)$ ако опишемо $h(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ и ако знамо да је $U\colon \mathrm{Im}(Q) \to \mathrm{Im}(Q)$ изометрија која преводи i у k. Просто речено ово значи да је тврђење довољно доказати у случају $q = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Тада је

$$h(q)(i) = qi\bar{q} = q\bar{q}i = i$$

и $h(q)(j) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\,j\,(\cos\alpha - i\sin\alpha) = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)j + 2\sin\alpha\cos\alpha\,k = \cos 2\alpha\,j + \sin 2\alpha\,k$, што завршава доказ. ■

Последица 4.3. Када је $h(q) = h(q')$? Из горњег описа ротације $h(q)$ следи да ако је $q = \cos\alpha + k\sin\alpha$, онда је $q' = \cos(\pi - \alpha) - k\sin(\pi - \alpha) = -q$. Дакле, $h(q) = h(q')$ важи ако и само ако су q и q' тзв. антиподалне тачке сфере S^3. Одавде се види да се тополошки, простор $SO(3,\mathbf{R})$ може описати као простор добијен идентификацијом антиподалних тачака сфере S^3 тј. као 3-димензионални реални пројективни простор RP^3.

5. Конфигурациони простори или простори стања

Честа реч коришћена у претходном параграфу је *стање система*. Појам стања неког система је заиста невероватно значајан. Скуп свих стања неког система чије понашање, еволуцију итд. желимо проучавати, често је скуп снабдевен неком додатном структуром. Нас ће у овом тренутку занимати они системи чији скуп стања има геометријски (тополошки) интересантну структуру. То значи да посматрани систем може непрекидно прелазити из једног стања у друго и да се стога скуп свих стања система природно перципира као неки геометријски (тополошки) простор, најчешће многострукост. Прецизна дефиниција нам неће бити неопходна пошто нас пре свега занимају интересантни примери. Довољно је да прихватимо да су многострукости геометријски простори који „посматрачу" који у њима живи изгледају као равни (еуклидски) простор одговарајуће димензије, тј. они га (локално) виде онако како ми видимо наш физички простор. Почнимо са неколико једноставних примера.

Пример 5.1. *Двоструко клатно* је механички систем који се добије кад се на обично клатно окачи још једно клатно. Није ми познато да ли је икад направљен часовник са двоструким или вишеструким клатном. Ако бисмо желели конструисати такав часовник па нас занимају механичка својства таквог двоструког клатна, морали бисмо познавати геометрију простора свих стања тог клатна. На пример периодичност кретања је есенцијално својство механизма који треба да служи за мерење времена.

Обично клатно, као и његова велика сестра љуљашка, ужива слободу кретања по кружници, дакле скуп свих његових положаја или стања се природно идентификује са кружницом S^1 одговарајућег полупречника. Сваки положај клатна је описан углом који оно у том тренутку заклапа са равнотежним положајем. Слично је са двоструким клатном; сад се јављају два угла од 0 до 2π. Ово значи да је скуп положаја двоструког клатна торус $T^2 = S^1 \times S^1$.

Пример 5.2. *Једнодимензионални билијар* је систем који се састоји од n куглица на правој које се крећу по њој разним брзинама и еластично се одбијају једна од друге при сударима. Свака куглица је описана једном координатом на правој, дакле један положај целог система је n-торка реалних бројева $(x_1, \dots, x_n)$. Ако претпоставимо да су куглице нумерисане у растућем поретку с лева на десно, онда се појављују и ограничења $x_i \leqslant x_j$ за $i \leqslant j$. Дакле скуп свих стања овог система је конвексни конус $V = \{\, (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \leqslant x_j \text{ за } i \leqslant j \,\}$. Према томе целој колекцији тачака у једном одређеном положају одговара једна једина тачка у конусу V, мењање система у времену одговара праволинијском кретању тачке у V, док колизијама одговара одбијање тачке од зидова конуса V и то по законима одбијања зрака светла од површине воде. Дакле, има нека тајна веза између понашања једнодимензионалног билијара и зрака светла у соби са огледалима.

Пример 5.3. Посматрајмо лице Смешка које је обешено само на једној нити. Претпоставимо да се лице налази у мирној соби и да се креће тако да оса симетрије лице увек буде вертикална. Лако се можемо уверити да је скуп стања овог система кружица S^1 као и у случају обичног клатна.

Ако сад поново гледамо лице вертикално обешено на две нити и водимо рачуна и о упредању ове две нити добијамо другачији простор стања. У овом случају потпуном ротацијом за 360^0 лице се не враћа у своје првобитно стање већ се нит упреда и добија се или губи по један преплет у зависности од смера ротације. Отуд се добија да је простор стања у овом случају реална права $\mathbf{R}^1$.

Опрез! Стања овог система и стања Смешка Јануса су другачије дефинисана. Овде је лице увек у вертикалном положају и сваки положај лица је стање за себе, тј. нема еквивалентних положаја.

Занимљиво је да сваком стању лица са две нити одговара, стапањем нити и игнорисањем уплитања, једно стање лица са једном нити. Одавде следи да постоји пресликавање $f\colon \mathbf{R}^1 \to S^1$ одговарајућих простора стања. Лако се можемо уверити да се ту ради о пресликавању $\theta \mapsto \cos(\theta)+i\sin(\theta)$ где се S^1 идентификује са скупом јединичних комплексних бројева.

Овај пример као и управо дефинисано пресликавање се могу врло добро искористити за дефинисање и извођење својстава степена пресликавања $f\colon S^1 \to S^1$.

Пример 5.4. Вратимо се сада нашем моделу, неизбежном Смешку Јанусу. Раније смо дефинисали скуп његових стања као скуп свих његових положаја при чему се два положаја сматрају једнаким (еквивалентним) ако се из једног од тих положаја може прећи у други непрекидним померањем Смешка при чему лице целим путем остане паралелно самом себи. Као и у претходним примерима одредимо многострукост свих стања овог система. За сада означимо овај простор стања са $\mathcal{F}$. Као и у претходном примеру, занемаривањем нити на којима је обешено лице, долазимо до непрекидног пресликавања $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ где је $\mathcal{G}$ простор стања самог лица. При томе претпостављамо да два положаја самог лица дају исто стање уколико се од једног до другог може прећи паралелним преносом. Дакле $\mathcal{G}$ је скуп (простор) свих положаја које може заузети лице ако му једну одређену тачку (нпр. „нос“) центрирамо у координатном почетку. Сваки такав положај лица се може описати са два ортонормирана вектора, нпр. један од њих је орт на вертикалној оси симетрије а други јединични вектор нормалан на раван лица са оне стране на којој је осмех. Пар таквих вектора се може јединственим образом допунити до ортонормираног, позитивно оријентисаног система од три вектора а то значи да је положај лица заправо одређен једном матрицом из $SO(3,\mathbf{R})$. Три изабрана вектора се могу видети као вектори колоне те матрице. Дакле, $\mathcal{G} = SO(3,\mathbf{R})$ а Дираков трик показује да се за сваки елемент $a \in SO(3,\mathbf{R})$, $f^{-1}(a)$ састоји од тачно два елемента. Ми смо већ имали такву ситуацију у одељку 4 где је уз помоћ кватерниона било описано пресликавање $h\colon S^3 \to SO(3,\mathbf{R})$, па следећи став не би требао да дође као велико изненађење.

Став 5.5. *Простор стања Смешка $\mathcal{F}$ је тродимензионална сфера S^3. Шта више, сфера S^3 се може идентификовати уз помоћ природног пресликавањем ϕ са $\mathcal{F}$ тако да се при тој идентификацији пресликавање f може видети као пресликавање h. Другим речима се то исказује тако да се каже да следећи дијаграм комутира, односно да је $f\circ\phi = \mathbf{1}\circ h$, где је $\mathbf{1}$ идентично пресликавање, $\mathbf{1}(x) = x$ за све $x \in S^2$.*

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F} \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ S^2 & \xrightarrow[\mathbf{1}]{} & S^2 \end{array}$$

Доказ. Први кратак доказ тврђења следи из у топологији добро познате чињенице да постоји само једно, нетривијално дволисно наткривање простора $SO(3, \mathbf{R})$.

Пошто не претпостављамо ни елементарно предзнање из топологије, наведимо други доказ који се изводи директном конструкцијом пресликавања ϕ. Нека је $q \in S^3$ јединични кватернион. Како описати положај Смешка који одговара том кватерниону? Пре свега изаберимо један положај који ће одговарати кватерниону $\mathbf{1}$, нпр. нека то буде основни положај у ком је лице слободно обешено. Ортонормирани систем вектора који одговара том положају можемо означити са i, j и k. Уз помоћ пресликавања h налазимо $h(q) \in SO(3, \mathbf{R})$ и самим тим ми лако одређујемо у ком се положају мора налазити само лице, наиме то је тачно онај положај у који пређе лице ако се на њега примени трансформација $h(q)$. Међутим, познато нам је да постоје тачно два стања Смешка која одговарају том положају лица и није одмах видљиво које од тих стања изабрати за $\phi(q)$. Поступак је следећи. Изаберимо било коју криву $\gamma = \gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, која води од $\mathbf{1}$ до q, $\gamma(0) = \mathbf{1}$, $\gamma(1) = q$. Ова крива задаје криву $h(\gamma(t))$ у $SO(3, \mathbf{R})$. Последњу криву можемо искористити да полако ротирамо лице из основног положаја тако да у тренутку t применимо на лице ротацију $h(\gamma(t))$ при томе добро пазећи да лице не прође између нити што постижемо нпр. тако што нити склањамо у страну. Тиме долазимо до стања које означавамо са $\phi(q)$. Читалац би требало да се увери да ова конструкција не зависи од пута као и да овако дефинисано пресликавање ϕ има сва жељена својства.

Сасвим прецизно се горња конструкција дефинише уз помоћ хомотопских класа путева γ који повезују тачке $\mathbf{1}$ и q. Проверава се да су простор стања Смешка, простор хомотопских класа путева у $SO(3, \mathbf{R})$ који полазе из јединичне матрице, простор хомотопских класа путева γ на сфери и сама сфера S^3 у природној бијективној кореспонденцији. Овде се у оба случаја сматра да су два пута у истој хомотопској класи уколико полазе и завршавају у истим тачкама и уколико међу њима постоји хомотопија тј. једнопараметарска фамилија таквих путева која их повезује. ■

Напомена. Занимљиво је да су у S^3 свака два пута који почињу и завршавају се у истим тачкама хомотопна у горњем смислу док то не важи за $SO(3, \mathbf{R})$. Овај феномен је у вези са чињеницом да је фундаментална група сфере тривијална а пројективног простора нетривијална и једнака цикличној групи $\mathbf{Z}_2$. Последње значи да у случају пројективног простора, за сваке две тачке постоје тачно два хомотопски различита пута која их спајају.

6. Хопфова фибрација

Узмите поново у руке ваш модел Смешка. Сад би већ требало да се осетите као човек који у руци држи јединични кватернион а покретањем модела на разне стране можете замислити да сте кренули у шетњу по тродимензионалној јединичној сфери.

На пример, стварно или у мислима изведимо следећи експеримент. Узмите јединичну (дводимензионалну) сферу у нашем амбијентном простору $\mathbf{R}^3$, изаберите тачку на њој и сместите центар лица Смешка на то место тако да раван лица буде тангентна на сферу S^2 као и да лице гледа напоље. Примећујемо да сваком стању Смешка одговара јединствена тачка на сфери где се лице може сместити а да горњи услови буду задовољени. Тиме је дефинисано непрекидно пресликавање

$$\xi : S^3 \to S^2 \ .$$

Ротирањем лица у његовој равни која је као што је речено тангентна на сферу S^2, добијамо сва могућа стања Смешка асоцирана са истом тачком на сфери. Ротирањем за 360^0 прелазимо у антиподално стање а ротацијом за 720^0 се коначно враћамо у првобитан положај. Према томе, скуп $\xi^{-1}(x)$ свих стања која одговарају фиксној тачки $x \in S^2$ на дводимензионалној сфери је хомеоморфан (тополошки једнак) јединичној кружници. Видимо дакле да се тродимензионална сфера S^3 раслојава на слојеве хомеоморфне кружници при чему је простор који служи да параметризира све те кружнице јединична дводимензионална сфера. Овакво раслојавање се често зове и фибрација (fiber = влакно) и ово горе пресликавање се назива *Хопфова фибрација*.

Откриће овог пресликавања од стране Хопфа (H. Hopf), публиковано 1935, свакако је један од празника, можда чак и један од рођендана Топологије. Тих рођендана има више а један од првих је Ојлерово (L. Euler) откриће теореме о графовима мотивисане проблемом Кенигсбершких мостова као и откриће теореме о полиедрима која каже да је број страна + број темена конвексног полиедра у $\mathbf{R}^3$ једнак броју ивица увећаном за два.

Х. Хопф је овим примером, а ослањајући са на тзв. Хопфову инваријанту, доказао да је трећа хомотопска група $\pi_3(S^2)$ дводимензионалне сфере нетривијална. То је био први нетривијални резултат о хомотопским групама сфера након што су оне биле уведене од стране Хуревица (W. Hurewicz) и када је уз помоћ теорије Брауеровских степена пресликавања опажено да је $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$. Занимљиво је како се у овом случају, може пратити еволуција неких фундаменталних идеја топологије што обично у науци није случај јер се првобитне идеје не виде под наслагама све нових и нових истраживања.

Хопф је до своје инваријанте дошао показавши да су кружнице $\xi^{-1}(x)$ и $\xi^{-1}(y)$ за $x, y \in S^2$, $x \neq y$, увек заланчане. Л. Понтрјагин (Л. Понтрягин) је инвентивном анализом ове ситуације, такође анализирајући инверзне слике појединих тачака и њихове тзв. цевасте (tubular) околине добио општије резултате али и, што је још важније, дошао до појма кобордизма. Р. Том (René Thom) је ову конструкцију пренео на било каква векторска раслојења (простори Тома, Томов изоморфизам), ово избацује у први план векторска раслојења и у наставку у спрези са другим идејама појављује се K-теорија, теорија индекса итд.

Слике на наредној страни илуструју Хопфову фибрацију при чему је сфера S^3 визуелизована као $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$. Фибре раслојења су груписане у траке а траке су организоване у торусе ради боље прегледности. Слике су сукцесивни инсерти из лепе анимације базиране на следећем једноставном `"Mathematica"` програму.

```
Hopf[n_, a_, rng_] :=
ParametricPlot3D[Evaluate[

Table[
{((a+1/a)+(1/a-a)Sin[r+(i+s/4)*Pi/n])Sin[r],
((a+1/a)+(1/a-a)Sin[r+(i+s/4)*Pi/n])Cos[r],
(1/a-a)Cos[r+(i+s/5)*Pi/n]},
{i,1,2n}]],
{r,0,2Pi},{s,0,1},
PlotPoints->{30,2},
PlotRange->{{-rng,rng},{-rng,rng},{-rng,rng}}]
```

7. Епилог

На крају последњег параграфа је већ наговештено колики је значај пресликавања које носи Хопфово име а које се на тако магичан начин појавило у вези са нашим Смешком. То није све. Мени позната слика о овом пресликавању, стварана више година, далеко је од комплетне и увек би на своје велико задовољство и изненађење поново открио то пресликавање у новом окружењу. Навешћу неколико таквих примера.

7.1. Спин електрона. Простор стања неког система у квантној механици је скуп јединичних вектора у неком комплексном Хилбертовом простору. У случају *спина*, неке врсте унутрашњег угаоног момента елементарне честице, простор стања је коначно димензионалан, дакле у питању је сфера коначне димензије. Сама „количина“ спина је увек иста и износи $\hbar/2, \hbar, 3\hbar/2, \dots$, за разне елементарне честице, рецимо у случају електрона износ је $\hbar/2$ где је $\hbar$ једна од фундаменталних константи (Планкова константа). Честице са разломљеним спином се називају Фермиони а оне са целим Бозони. Међутим иако је износ спина константан, „оса“ вртње може бити различита а све ово се слаже са интуицијом мале лоптице у $\mathbf{R}^3$ која може имати различите осе ротације, дакле као простор стања се намеће $SO(3,\mathbf{R})$. Међутим у случају електрона није баш тако, уосталом није Дирак (P. Dirac) „за џабе“ измислио свој трик са каишем. Простор стања у овом случају је сфера S^3 виђена као дволисно наткривање од $SO(3,\mathbf{R})$ описана у одељку 4. У случају електрона асоцирани Хилбертов простор је $\mathbf{C}^2$ и може се идентификовати са телом кватерниона виђеним као дводимензионални комплексни векторски простор. Сваки кватернион $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k = z + j\,z'$ где су $z = \alpha + \beta i$ и $z' = \gamma + \delta i$ комплексни бројеви се дакле може видети као пар (z, z') комплексних бројева. Са становишта квантне механике парови $q = (z, z')$ и $q' = (e^{i\phi}z, e^{i\phi}z')$ дефинишу исто стање. Пресликавање које дефинише прелаз од простора S^3 свих стања на простор у горњем смислу идентификованих стање је, шта друго, Хопфова фибрација.

Има више места где читалац може пронаћи више детаља о о овој слици нпр. у књизи [Pe] R. Penrose-а.

7.2. Магнетски монополи. Ми смо видели да се сфера S^3 може видети као раслојење над сфером S^2 при чему је фибра (fiber) или слој кружница S^1.

Лепа слика тог раслојења је горе описана уз помоћ нашег Смешка чије лице смо прислањали уз унапред задану дводимензионалну сферу. Ово није једини пример раслојења над дводимензионалном сфером и слојем S^1. Нпр. да смо прислањали уз 2-сферу само лице и поновили конструкцију добили бисмо друго раслојење које је 2 пута увијеније од Хопфовог раслојења. У општем случају се сва таква раслојења одређују целобројним степеном „увијања" слоја S^1 над S^2, дакле оваквих раслојења има онолико колико и целих бројева.

У теорији тзв. Дираковихмагнетских монопола ([EGH]) појављују се управо оваква раслојења а одговарајући цели бројеви су познати под именом тополошки набој магнетског монопола.

7.3. Геометрија хармонијских осцилатора. Обичан хармонијски осцилатор је систем чија се динамика описује диференцијалном једначином $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$. Многа периодична кретања у природи се описују овом једначином. Уобичајни начин решавања ове једначине је њено свођење на систем $dx/dt = \omega u$, $du/dt = -\omega x$. Показује се овај систем има тзв. први интеграл $I = x^2 + u^2$ што је у вези са очувањем тоталне енергије система. Пар хармонијских осцилатора је систем $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$, $d^2y/dt^2 + \mu^2 y = 0$, где се као први интеграл појављује величина $E = x^2 + u^2 + y^2 + v^2$ где је $v := dy/dt$. Ово значи да у фазном простору $\mathbf{R}^4$ у ком су координате (x, u, y, v), криве $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, $v = v(t)$ решења горњег система увек путују по (хипер)површима где је величина E константна (очување енергије). Специјално видимо да ове криве (зову се интегралне криве) раслојавају површ $E = 1$ а то је јединична сфера S^3 у $\mathbf{R}^4$.

У случају да је разломак ω/μ рационалан број, интегралне криве су кружнице и добијамо раслојења описана у претходном примеру. Прецизније речено, ове кружнице се препознавају као фибре раслојења асоцираних са магнетским монополима. Специјално за $\omega/\mu = 1$ пред нама је поново Хопфова фибрација!

Много више интересантних детаља о геометрији и топологији пара хармонијских осцилатора, може се наћи у чланку [Me], K. Meyer-a.

7.4. „Кватерниони" виших димензија. Поља реалних и комплексних бројева, као и тело кватерниона су примери структура дефинисаних на еуклидским просторима $\mathbf{R}^n$. Један од чувених класичних проблема математике био је да се испита који еуклидски простори допуштају такву структуру односно у најопштијој форми, за које n се на R^n може дефинисати (непрекидно) множење које има својства алгебре са дељењем.

Врло суптилном тополошком техником која се ослања на тзв. кохомолошке операције у K-теорији, J. F. Adams, M. F. Atyah, 1966, доказано је да поред горе наведених случајева још само $\mathbf{R}^8$ допушта нешто слично. Бројеви који се тако добијају називају се *октаве* или Кејлијеви бројеви. Међутим алгебра ових бројева, иако допушта дељење, није асоцијативна тако да других (комутативних или некомутативних) поља у природи поред већ набројаних нема! Ипак, ако сматрате да се у крајњој линији може живети без структуре поља и да је структура алгебре сасвим добра и довољна, онда се кватерниони могу на врло леп начин генералисати до тзв. Клифордових алгебри. Ове алгебре су дефинисане над просторима $\mathbf{R}^{2^n}$ и такође могу послужити за репрезентацију изометрија из групе $SO(n,\mathbf{R})$. У овом случају се такође долази до дволисног наткривања а група која игра улогу наше тродимензионалне сфере је група $\mathrm{Spin}(n)$. Према томе наша сфера S^3, са одговарајућом структуром групе, има поред имена $\mathrm{Sp}(1)$ и $SU(2,\mathbf{C})$ још једно, $\mathrm{Spin}(3)$.

Захвалност. Jürgen Richter Geberth и Александар Липковски заслужни су за "Mathematica" анимацију. Ивана и Душан Живаљевић су заслужни за идеје и реализацију осталих цртежа у овом чланку и овај есеј о сфери и одговарајући „сладолед“-хонорар је посвећен њима.

РЕФЕРЕНЦЕ

[B–T] R.Bott, L.W.Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1982. (Руски превод, МИР 1989).

[EGH] T.Eguchi, P.B.Gilkey, A.J.Hanson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Noth-Holland, 1980.

[F–F] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, *Курс Гомотопической Топологии,* Наука 1989.

[Ka] L.H.Kauffman, *On Knots*, Annals Math. Studies 115, Princeton Univ. Press, 1987.

[K–L] H.Kocak, D.Leidlaw, *Computational Graphics and the Geometry of* S^3, The Mathematical Intelligencer, Vol.9, no.1, 8–10, 1987.

[Me] K.R.Meyer, *The Geometry of Harmonic Oscillators*, American Math. Monthly, 97, no.6, June 1990, 457–465.

[Pe] R.Penrose, *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, 1989.

ОБАВЕШТЕЊЕ