НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1995, XL, 3–4, стр. 15–24

Др Ђорђе Кадијевић

НЕКИ ТИПОВИ (ШКОЛСКОГ) МАТЕМАТИЧКОГ ЗНАЊА И ЊИХОВА ПОВЕЗАНОСТ[1]

У раду се разматра процедурално, декларативно и дедуктивно (школско) математичко знање. Истражује се однос ових типова знања, анализира њихова заступљеност у настави математике и указује на могућности унапређивања наставе математике у вези са развијањем декларативног знања, експлицирањем дедуктивног знања и повезивањем процедуралног и декларативног знања.

Три типа разумевања

Анализирајући психолошке основе учења математике, Скемп [1] указује да би требало разликовати три типа разумевања које назива инструментално, релационо и логичко.

Инструментално разумевање означава да је појединац у могућности да успешно манипулише симболима, али су ти симболи по правилу одвојени од појмова које репрезентују. Другим речима, задатак се решава коришћењем правила која су најчешће научена напамет. На пример:

$$\begin{aligned} 2x+3&=15+x\\ 2x-x&=15-3\\ x&=12 \end{aligned}$$

при чему се користи правило „ако моном мења страну, мења и знак“.

Релационо разумевање настаје када појединац уме да вешто барата појмовима користећи њихова својства и међусобне релације. На пример, ако је дат обим и површина троугла, могуће је одредити полупречник круга уписаног у тај троугао ($r=2P/O$). Код релационог разумевања симболи репрезентују одговарајуће појмове, а правила исказују везе међу појмовима а не, као код инструменталног разумевања, везе међу неким (често неразумљивим) симболима.

Логичко разумевање је присутно када појединац уме да успешно дедуктивно резонује, користећи појединачна и општа правила дедуктивног закључивања. Ученици могу да успешно решавају неке задатке и без присуства логичког разумевања, као што показује наредни пример:

$$\begin{aligned} x+5&=8\\ x&=8-5\\ x&=3 \end{aligned}$$

[1] Рад се заснива на излагању које је под истим називом саопштено на Математичком факултету у Београду фебруара 1994. године у оквиру Колоквијума о настави математике

Напомињемо да за велики број ученика једнакост представља операцијски а не релацијски знак (e.g., [2]), што не само ствара потешкоће у настави математике, већ и често отежава програмирање када се користи PROLOG-језик.

Наведени типови разумевања повезани су са различитим типовима знања које можемо назвати процедурално, декларативно и дедуктивно знање. Определили смо се за овакву терминологију упркос могућој неадекватности — код процедуралног и дедуктивног домена уместо термина „знање“ можда је примереније користити термин „вештина“ или „умеће“ — јер истраживачи у настави математике често праве разлику између два типа знања које обично називају процедурално знање (procedural knowledge) и појмовно знање (conceptual knowledge).

У даљем тексту разматрамо процедурално, декларативно и дедуктивно знање, истражујемо њихов однос, анализирамо заступљеност ових типова знања у настави математике и указујемо на могућности унапређивања наставе математике у вези са развијањем декларативног знања, експлицирањем дедуктивног знања и повезивањем процедуралног и декларативног знања. Излагање се базира на нашим претходним истраживањима [3, 4], при чему треба имати у виду да изабрана типизација знања представља само један (никако једини) начин сагледавања математичког знања који може имати значајну теоријску и емпиријску вредност.

Процедурално, декларативно и дедуктивно знање

Процедурално знање, које је резултат и основа инструменталног разумевања, представља знање појединца о специфичним алгоритамским поступцима и њиховом ефективном коришћењу. Са релационим разумевањем повезано је *декларативно знање* (узрокује га, али је и његова последица) којим се означава знање појединца о неким математичким објектима (појмови, правила, алгоритми, итд.), њиховим својствима и међусобним релацијама. *Дедуктивно знање* је резултат и основа логичког разумевања, и оно представља знање појединца о општим и специфичним правилима дедуктивног закључивања и њиховом ефективном коришћењу. Развијање и флексибилно коришћење ових типова знања би требало да чини основу савремене наставе математике јер недавна истраживања указују да би појмове, а тим пре и структуре појмова, требало посматрати као сложене кластере процедуралног, декларативног и дедуктивног знања [5].

Еволуција математичког знања (филогенеза) јасно указује да се процедурално знање брже развијало од декларативног знања, јер су математичари првенствено били руковођени прагматичким аспектима своје дисциплине (e.g., [6]). Следећи примери из [6] недвосмислено илуструју доминацију процедуралног над декларативним знањем.

> *Паскал* каже да познаје неке који не разумеју да одузимањем 4 од нуле остаје нула.
>
> Према *Бернулију* је $\log a = \log(-a)$ јер
>
> $$\log(-a) = \frac{1}{2}\log(-a)^2 = \frac{1}{2}\log a^2 = \log a.$$

Користећи ред

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

за $x = 2$, *Ојлер* добија $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ и закључује да је -1 веће од бесконачности. У његовој „Алгебри“ (1770. год.) наилазимо на $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$.

На бази метафизичког аргумента, *Лајбниц* тврди да је

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Стога је математика (не рачунајући елементарну геометрију) тек у задња два века добила логичке основе (декларативно и дедуктивно знање) које обезбеђују висок степен поузданости њеног знања.

Изгледа да се и у оквиру развоја математичког знања појединца (онтогенеза) процедурално знање брже развија од декларативног знања. Иако се филогенеза може рефлектовати у онтогенези (e.g., [7]), доминација процедуралног знања појединца над његовим декларативним знањем је највероватније резултат традиционалне наставе математике која се базира на задацима којима се утврђује обим и квалитет процедуралног знања (првенствено се инсистира на вештинама, док је разумевање у другом плану или чак занемарено!). Међутим, треба имати у виду да декларативно знање талентованих ученика млађег узраста може бити боље развијено од њиховог процедуралног знања (e.g., [8]). Ипак, већина ученика успешније одговара на питања типа *како се нешто чини* него *зашто се то чини*, и на питања другог типа обично дају одговоре као да су питања првог типа. (На питање шта је столица деца прво дају одговор типа „столица служи за седење“, а тек касније „столица је део намештаја, састоји се од ... “.)

Размотримо еволуцију дедуктивног знања, помињући неколико најважнијих резултата: прве формализације нашег мишљења потичу од Аристотела и Еуклида (IV и III век п.н.е.); метод научног резоновања разрадио је Декарт (XVII век), алгебраизацију правила закључивања дугујемо Булу (XIX век); ограниченост формалних система, а тиме и формализације нашег мишљења доказао је Гедел у првој половини овог века (e.g., [9]. (Правила хеуристичког закључивања која се налазе у основи бројних математичких активности формализовао је Поља [10] средином овог века.) У овом контексту вреди цитирати Раселов коментар о његовим студијама крајем XIX века (1890–1894) на Универзитету у Кембриџу (Тринити колеџ):

> „Они који су ме учили инфинитезимални калкулус нису знали тачне доказе његових фундаменталних теорема и покушавали су да ме наговоре да прихватим официјелне софизме као чин вере.“ ([6], страна 162)

Очигледно је да су математичари споро овладавали дедуктивним знањем, па ученици не би требало да буду изузетак. Али не само да је развој дедуктивног знања ученика дуготрајан процес, већ је и у већини случајева његов учинак слаб јер је исправно дедуктивно закључивање изван могућности великог броја ученика. Ово је вероватно резултат ученикових интелектуалних способности, али би узроке требало тражити и у (почетном) математичком образовању које је углавном процедурално оријентисано. Напомињемо да би приликом разматрања дедуктивног знања требало имати на уму и следеће чињенице:

> „ ... шта чини математички доказ са становишта математичара практичара? ... *никакав експлицитан одговор не може бити дат.* ... Математика је у реалности облик социјалне интеракције у којој је „доказ“ комплекс формалног и неформалног, израчунавања и необавезних коментара, убедљивог аргумента и позива на имагинацију.“ ([11], стране 66 и 73)

Ова кратка анализа сугерише да се процедурално знање брже развија од декларативног и дедуктивног знања. При томе је експлицитност знања најмања за процедурално а највећа за декларативно знање, док је експлицитност дедуктивног знања негде између експлицитности претходна два.

Однос између процедуралног, декларативног и дедуктивног знања

У циљу сагледавање могуће везе између процедуралног, декларативног и дедуктивног знања, искористимо следећа разматрања.

• Настанак математичког знања може се посматрати кроз процес *објектификације* (objectification) којим се процедурално знање у вези са процесима трансформише у декларативно знање у вези са објектима, њиховим особинама и међусобним релацијама. На пример, функција се може посматрати као трансформација која повезује објекте из два скупа, али и као објект који, између осталог, може учествовати у процесима диференцијације и интеграције. (Улога функције у средњошколској настави математике слична је улози броја у основношколској настави математике.)

• Декларативно знање трансформише се у процедурално знање кроз процес *процедурализације.* У оквиру овог процеса дефинишемо кораке неког поступка, e.g, одређивање вредности израза коришћењем правила за рад са логаритмима, којим ученицима помажемо да без већег размишљања решавају одређене класе математичких задатака на начин како то експерти обично чине.

• Дефиниција равномерног кретања
„Кретање је равномерно ако се путеви једнаких дужина прелазе за исте временске интервале“
може се исказати декларативно са

$$s_1 : s_2 = t_1 : t_2,$$

или процедурално са

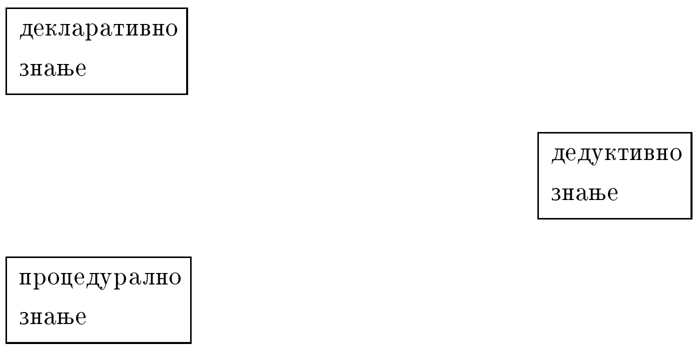
$$s_1 : t_1 = s_2 : t_2,$$

тј.

$$s : t = \text{const.},$$

односно (користећи појам брзине) $v = \text{const.}$, при чему размену средњих чланова пропорције омогућује елемент дедуктивног знања [12].

Претходна разматрања указују да процедурално и декларативно знање могу бити повезани директно или посредством дедуктивног знања. Основна релација међу овим типовима знања могла би бити као на слици 1. Слика приказује и хијерархију међу овим типовима знања према којој процедурално, дедуктивно и декларативно знање формирају три растућа нивоа. Хијерархија се базира на степену метакогниције потребне на сваком нивоу. Напомињемо да метакогниција означава свесност појединца о сопственом знању и мисаоним процесима у оквиру које се остварује посматрање, регулисање и оркестрација ових процеса.



Слика 1. Однос процедуралног, декларативног и дедуктивног знања

Алгоритам (појам) релевантан за решавање неког проблема обично се концептуализује координацијом одговарајућег процедуралног и декларативног знања. Ево неких примера:

1. Три посластичара начине 4 торте за 5 сати рада. За које време (оријентационо) четири посластичара начине 10 торти?
Упутство. У циљу добијања локалне процедуре, користити појам *време израде једне торте.*

2. Извести формулу за запремину зарубљене пирамиде.
Упутство. У циљу добијања глобалне процедуре, користити разлику запремина две пирамиде.

3. У току је реконструкција тунела (моста), па се возила могу кретати само једном траком. Предложити светлосну регулацију саобраћаја.
Упутство. Експериментисати са трајањем једног светлосног циклуса (црвено и зелено светло). Решење је повезано са концептуализацијом локалног појма *брзина најспоријег возила* [13]. (Пре пропуштања возила на једном крају пута треба зауставити проток возила на другом крају пута и омогућити да и најспорије возило безбедно пређе пут под реконструкцијом).

4. Дизајниран је нови модел бицикла. Предложити његову цену.
Упутство. Узети да се зависност потражње бицикла од његове цене

описује линеарном функцијом и максимизирати профит [14]. Решење је повезано са концептуализацијом глобалног појма *канонички облик* квадратног тринома и глобалне процедуре *издвајање квадрата* бинома јер се зависност профита од цене описује квадратном функцијом.

Процедурално, декларативно и дедуктивно знање у настави математике

Садашње стање. У настави математике код нас и у свету највише пажње посвећено је развијању процедуралног знања, тј. усвајању алгоритамских вештина (али се општи успех писмених провера знања, уз мање изузетке, углавном креће у границама од 40% до 50%). Мало или нимало простора дато је задацима којима се утврђује степен разумевања односа између појмова, тј. обим и квалитет декларативног знања. Стога не треба да изненади чињеница да је на квалификационом испиту за упис у гимназије и стручне школе у Републици Србији (јун 1993. год.) само 17% ученика (узорак је чинило 784 ученика из Београда и Сомбора) тачно решило следећи задатак:

5. Шипка облика ваљка има масу 5 kg. Колику би масу имала таква шипка (од истог материјала) ако би била 2 пута дебља, али и два пута краћа?.

Истраживачи у области математичког образовања све више увиђају потребу коришћења квалитативних задатака чије тачно решавање захтева релационо (и логичко) разумевање (e.g., [15]). Експерименти са рачунарски подржаним учењем/поучавањем указују да коришћење рачунара у настави математике даје више простора развоју декларативног и дедуктивног знања него што је то случај у традиционалној настави, јер се ефективно коришћење специфичних алгоритама може препустити рачунару. Међутим, изгледа да постоји проблем повезивања процедуралног и декларативног знања (e.g., [16]). Истакнимо да је одсуство повезаности процедуралног и декларативног знања уочено и у традиционалној настави математике, јер није утврђено да боље разумевање побољшава алгоритамски учинак [17].

Одсуство повезаности између процедуралног и декларативног знања може бити узроковано слабо развијеним дедуктивним знањем на чијем се усвајању инсистира (чини нам се прекасно) тек у оквиру средњошколске наставе математике. (Геометријски садржаји основношколске наставе математике допуштају коришћење једноставних дедукција и омогућују припрему ученика за дедуктивно закључивање које их очекује у средњошколској настави математике.) При томе настава математике истиче само дедуктивне (и индуктивне) аспекте математике — хеуристички аспекти најчешће су потпуно занемарени — што код ученика може да формира непотпуну (или чак погрешну) слику о појединим садржајима математике. Међутим, треба имати у виду да на повезивање процедуралног и декларативног знања осим дедуктивног знања утичу и други фактори, међу којима су изгледа најутицајнији метакогниција и афективне варијабле.

Истакнимо и једну важну чињеницу. Традиционална настава математике још увек игнорише онтогенезе математичког знања ученика упркос богатој ризници налаза у вези са психологијом учења математике (e.g., [18]).

Унапређивање наставе математике. У овом делу указујемо на могућности унапређивања наставе математике у вези са развијањем декларативног знања, експлицирањем дедуктивног знања и повезивањем процедуралног и декларативног знања.

Развијање декларативног знања требало би базирати на решавању квалитативних задатака код којих су (неке) конкретне вредности изостављене или су у другом плану, рецимо:

> 6. Површина правоугаоника је два пута већа од површине квадрата. За колико је најмање обим правоугаоника већи од обима квадрата?
>
> 7. При куповини неког артикла потребно је платити порез. Ако се за куповину овог артикла у готовом даје попуст, шта је потребно пре обрачунати: порез или попуст? (Износ пореза и попуста наведен је у процентима, а порез се обрачунава на суму новца коју купац даје.)
>
> 8. Доказати да је збир растојања ма које тачке у унутрашњости једнакостраничног троугла од његових страница једнак висини тог троугла.
>
> 9. Неколико радника заврше један посао за извесно време. Да ли посао двоструко мањег обима може бити завршен за три пута краће време ако се број радника повећа за 4?

Наравно да је декларативно знање потребно и за решавање квантитативних задатака код којих су конкретне вредности и формално решење у првом плану, на пример:

> 10. Аутобус редовно саобраћа између места A и места B крећући се брзином 80 km/h. Због квара на мотору аутобус је кренуо из места A са 15 минута закашњења, али је ипак стигао у место B на време јер се кретао 10 km/h брже него иначе. Одредити растојање између ових места.

Међутим, у квантитативним задацима ипак доминира процедурално знање, поготово ако је ученик већ решавао сличне задатке.

С обзиром да је развој декларативног знања условљен метакогницијом, *настава математике би требало да подстиче ученикове метакогнитивне активности*. То се између осталог може постићи уколико се од ученика захтева да приликом решавања квалитативних задатака и сложенијих задатака уопште повремено одговарају на следећа питања: „Шта сада радиш?“, „Зашто то радиш?“ и „Како ће ти то помоћи да решиш постављени задатак?“ [19]. При томе ученици могу постављени задатак решавати у пару, тако да један ученик решава задатак и објашњава његово решавање, док му други поставља горе поменута питања. (При решавању следећег задатка ученици могу да замене улоге.)

Експлицирање дедуктивног знања могло би се заснивати на тзв. двостубачној аргументацији коју наводимо за тврђење да се наспрам једнаких страница троугла налазе једнаки углови (табела 1). (У општем случају, у колони *разлози* појављиваће се оно што је дато, дефиниције, аксиоме, теореме и правила дедуктивног закључивања.) Предлажемо да пре сачињавања самосталних доказа, ученици реконструишу неколико аргументација на бази делова готових аргументација [20], при чему се међу овим деловима могу налазити непотребни и/или погрешни делови. Наравно, иста или слична табела (видети [21]) може се користити и при решавању задатака који нису доказног типа.

Дато: $AB = AC$	Тражи се: $\angle B = \angle C$
Тврђења	*Разлози*
$AB = AC$	дато
$AC = AB$	дато
$BC = CB$	иста дуж
$\triangle ABC \cong \triangle ACB$	став ССС
$\angle B = \angle C$	последица подударности

Q.E.D. (крај доказа)

Табела 1. Двостубачна аргументација

хеуристички modus ponens	$\dfrac{A\ ,\ A \implies B}{\text{вероватно } B}$	хеуристички modus tolens	$\dfrac{\neg A\ ,\ A \implies B}{\text{вероватно } \neg B}$

Табела 2. Два хеуристичка силогизма

С обзиром да се хеуристичко закључивање налази у основи бројних математичких активности, у оквиру експлицирања дедуктивног знања ученицима би поред основних правила дедуктивног и индуктивног закључивања и начина њиховог коришћења требало указати и на најважније хеуристике, најзаступљеније хеуристичке силогизме и начин њиховог коришћења имајући у виду истраживања Поље [10, 21]. Овде пре свега мислимо на три хеуристике: генерализацију, специјализацију и аналогију, и два хеуристичка силогизма: хеуристички modus ponens и хеуристички modus tolens. Ови хеуристички силогизми[2] наведени су у табели 2.

Напомињемо да су поменута матакогнитивна питања релевантна и за развој дедуктивног знања. При томе треба имати у виду да ће на ова питања, нарочито у почетку, задовољавајуће одговоре моћи да да само мали број ученика.

[2]Хеуристички силогизми ништа не доказују, али су корисни јер могу довести до откривања нових чињеница, рецимо:

Циљ нашег истраживања је доказивање тврђења A. Нисмо успели да оповргнемо A. Нека је B тврђење за које важи: ако је A тачно, тачно је и B. Нисмо успели да оповргнемо B, јер би тада, на основу modus tolensa, оповргли и A. Настојимо да докажемо B и у томе успевамо, па, на основу хеуристичког modus ponensa, имамо разлога да верујемо да је A вероватно тачно и да би вредело наставити са тражењем његовог доказа.

Иако *повезивање процедуралног и декларативног знања* представља значајан теоријски и емпиријски проблем, истраживачи у области математичког образовања нису се бавили дизајнирањем и валидацијом методичких приступа који подстичу развој процедуралног, декларативног и дедуктивног знања и омогућују значајно повезивање процедуралног и декларативног знања. Наше претходно истраживање [4], које је реализовано на узорку углавном изнадпросечно интелигентних ученика првог разреда гимназије, указало је да решавање математичких проблема кроз пројектовање база знања специфичних експертних система — системи су специфични јер не садрже репрезентацију експертског знања — може да доведе до значајног увећања процедуралног и декларативног знања и значајног повезивања ових типова знања. Ученици су базе знања пројектовали за проблеме кретања користећи текст едитор и љуску експертног система, а за реализацију овако конципиране проблемске наставе математике коришћен је методички приступ REPROPIT (РЕшавање ПРОблема Пројектовањем Интелигентних Тутора). (REPROPIT је настао интеграцијом Пољиног [21] и Шенфелдовог [19] модела проблемске наставе математике са методологијом писања програма у логици [22] базираној на брзом прототиповању [23] кроз програмирање у логици и PROLOG-језику [24, 25]. Упркос значајном налазу, откривање могућности побољшања и повезивања процедуралног и декларативног знања у оквиру традиционалне или рачунарски подржане наставе математике тек предстоји. При томе би истраживања првенствено требало усмерити ка откривању онтогенезе и међузависности процедуралног, декларативног и дедуктивног знања. У реализацији овог веома сложеног и дугорочног задатка могли би се користити и експертни системи чије мултимедијалне базе знања пројектују ученици.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Skemp, R. R, *The Psychology of Learning Mathematics (expanded American edition).* Hillsdale, New Jersey; Lawrence Erlbaum, 1987

[2] Shoecraft, P, *"Equals" Means "Is the Same As"*, Arithmetic Teacher, 36, 8 (1989), 36–40

[3] Kadijević, Đ, *Learning, Problem Solving and Mathematics Education*, Department of Computer Science, University of Copenhagen: report 93/3 (1993).

[4] Kadijević, Đ, *Projektovanje inteligentnih tutorskih programa za individualno učenje matematike (doktorska disertacija)*, Tehnički fakultet "M. Pupin", Univerzitet u Novom Sadu, 1994

[5] Tessmer, M., Wilson, B., Driscoll, M., *A New Model of Concept Teaching and Learning.* Educational Technology Research and Development, 38 (1990), 45–53

[6] Kline, M., *Mathematics: The Loss of Certainty.* New York, Oxford University Press 1980

[7] Harper, E., *Ghosts of Diophantus.* Educational Studies in Mathematics, 18 (1987), 75-90

[8] Lupkowski-Shoplik, A. E., Sayler, M. F., Assouline, S. G. *Mathematics Achievement of Talented Elementary Students: Basic Concepts vs. Computation.* In Colangelo, N., Assouline, S. G., Ambroson, D. L. (Eds.), Talent Development (Volume II). Dayton, Ohio, Ohio Psychology Press., 1994

[9] Hofstadter, D. R., *Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid.* London, Penguin, 1979

[10] Pólya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princenton, New Jersey, Princenton University Press, 1954

[11] Davis, P. J., Hersh, R., *Descartes' Dream: The World According to Mathematics.* London, Penguin, 1990

[12] Freudenthal, H., *Weeding and Sowing.* Dordrecht, Holland, D. Reidel Publishing Company, 1978

[13] Clatworthy, N. J., Galabraith, P. L., *Mathematical Modelling in Senior School Mathematics: Implementing an Innovation*, Teaching Mathematics and its Application, 10 (1991), 6–28.

[14] The Spode Group, *Solving Real Problems with Mathematics (Vol. I)*, Cranfield, Bedford, Cranfield Press. 1981

[15] Dreufus, T., Eisenberg, T., *Conceptual Calculus: Fact or Fiction?*, Teaching Mathematics and its Application, 9 (1990), 63–67.

[16] Yerushalmy, M., *Effects of Computerized Feedback on Performing and Debugging Algebraic Transformations*, Journal of Educational Computing Research, 7 (1991), 309–330.

[17] Nesher, P., Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related?, For the Learning of Mathematics, 6 (1986), 2–9.

[18] Nesher, P., Kilpatrick, J., (Eds.) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge, Cambridge University Press, (1990)

[19] Schoenfeld, A. H., *Mathematical Problem Solving.* Orlando, Florida, Academic Press, (1985)

[20] Goldstein, S., *Jigsaw Proofs.* Mathematics Teacher, 82 (1989), 186–187.

[21] Polja, Dž., *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Zagreb, Školska knjiga, 1966

[22] Galle, P., Kóvacs, L. B., *The logic of worms: a study in architectural knowledge representation.* Environment and Planning B: Planning and Design, 19 (1992), 5–31.

[23] Tripp, S. D., Bichelmeyer, B., *Rapid Prototyping: An Alternative Instructional Design Strategy.* Educational Technology Research and Development, 38 (1990), 31–44.

[24] Sterling, L., Shapiro, E., *The Art of Prolog.* Cambridge, Massachusetts, MIT press, 1986

[25] Bratko, I., *Prolog Programming for Artificial Intelligence (second edition).* Wokingham, England, Addison-Wesley, 1990