Др Владимир Јанковић

СМЕНА ПРОМЕНЉИВИХ КОД ЛЕБЕГОВОГ ИНТЕГРАЛА

У уџбеничкој литератури која обрађује Лебегов интеграл аутори често заобилазе проблем смене променљивих. Када је у питању Риманов интеграл за функције више променљивих често наилазимо на теореме које нису довољно јасно и прецизно формулисане и на доказе који пате од традиционалних импровизација. Циљ овог чланка је да се конкретним решењем помогне у отклањању ових недостатака.

1. Формулација теорема о смени променљивих

Постоје две теореме које се односе на смену променљивих код Лебеговог интеграла. Прва се односи на интеграл функције једне променљиве а друга на интеграл функције више променљивих. Основна разлика ових двеју теорема састоји се у томе што се у првој теореми претпоставља да је функција којом се врши смена апсолутно непрекидна, а у другој теореми се претпоставља да је та функција глатка.

Теорема 1. *Нека је функција* $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *интеграбилна и нека је функција* $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$ *апсолутно непрекидна и неопадајућа, таква да је* $g(\alpha) = a$ *и* $g(\beta) = b$. *Тада важи*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Теорема 2. *Нека је* Δ *отворен скуп у* $\mathbf{R}^n$ *и нека је* $g\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$ *глатка инјекција. Ако је функција* $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D = g(\Delta)$, *интеграбилна, онда важи*

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(g(t))|\det g'(t)|\,dt.$$

2. Апарат за доказивање теорема

Апарат за доказивање формулисаних теорема је стандардна теорија Лебеговог интеграла која се појављује у многим уџбеницима, Фубинијева теорема, за коју ћемо сматрати да је позната иако се не доказује у свим уџбеницима који обрађују Лебегов интеграл, и још две теореме. То су Сардова теорема и теорема о разлагању глатког пресликавања.

Теорема (Сард). *Нека је* G *отворен скуп у* R^n *и нека је функција* $g\colon G \to \mathbf{R}^n$ *глатка. Ако је* $E = \{t \in G \mid \det g'(t) = 0\}$, *онда је* $m(g(E)) = 0$.

Доказ. Скуп G може да се представи као унија пребројиве фамилије затворених коцки из R^n. Нека је C једна од њих. Довољно је доказати да је $m(g(C \cap E)) = 0$. Нека је дужина ивице коцке C једнака L. Постоји реалан број M, такав да је $\|g'(t)\| \leqslant M$ за свако $t \in C$. Нека је $\varepsilon > 0$. Постоји $\delta > 0$, такво да је $\|g'(t) - g'(s)\| < \varepsilon$ за сваке две тачке t, $s \in C$ које задовољавају услов $\|t - s\| < \delta$. За свако $k \in \mathbf{N}$ коцка C може да се разложи на k^n коцки странице L/k, дијаметра $L\sqrt{n}/k$. За довољно велико k њихови дијаметри биће мањи од δ. Нека је S једна од коцки разлагања која има непразан пресек са скупом E; нека је $s \in S \cap E$. Ако је $t \in S$, онда је

$$\|g(t) - g(s)\| \leqslant \|g'(\tau)\| \|t - s\| \leqslant ML\sqrt{n}/k,$$
$$\|g(t) - g(s) - g'(s)(t - s)\| \leqslant \|g'(\tau) - g'(s)\| \|t - s\| < \varepsilon\|t - s\| \leqslant \varepsilon L\sqrt{n}/k.$$

Из прве неједнакости следи да је скуп $g(S)$ садржан у кугли са центром у тачки $g(s)$ и полупречником $ML\sqrt{n}/k$, а из друге неједнакости следи да се скуп $g(S)$ налази у $\varepsilon L\sqrt{n}/k$ околини афине многострукости која пролази кроз тачку $g(s)$ и паралелна је са $\operatorname{Im} g'(s)$. Следи да постоји правоугли паралелепипед који обухвата $g(S)$, има $n - 1$ ивицу дужине $2ML\sqrt{n}/k$ и једну ивицу дужине $2\varepsilon L\sqrt{n}/k$. Зато је

$$m(g(S)) \leqslant (2ML\sqrt{n}/k)^n \varepsilon/M.$$

Одавде добијамо да је

$$m(g(E)) \leqslant k^n (2ML\sqrt{n}/k)^n \varepsilon/M = (2ML\sqrt{n})^n \varepsilon/M.$$

Како последња неједнакост важи за свако $\varepsilon > 0$, из ње следи да је $m(g(E)) = 0$. ∎

Под оператором пројектовања $P_j\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ подразумевамо оператор задат са $P_j(x) = x_j$, за $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}$. Нека је U отворен скуп у $\mathbf{R}^n$ и нека је функција $g\colon U \to \mathbf{R}^n$ глатка. Са $g'(t)$ означавамо Фрешеов извод функције g у тачки t. У коначнодимензионом случају Фрешеов извод може да се изједначи са Јакобијевом матрицом. Под $\det g'(t)$ подразумевамо детерминанту Јакобијеве матрице, односно јакобијан, функције g у тачки t. За функцију g кажемо да је проста уколико се највише једна од њених компонената g_j, $j = 1, 2, \ldots n$, разликује од одговарајућег оператора пројектовања.

Теорема. *Нека је g глатко пресликавање отвореног скупа $U \subset \mathbf{R}^n$ у $\mathbf{R}^n$. Ако је $\det g'(s) \neq 0$, онда постоји отворена околина V тачке s на којој се функција g може представити у облику*

$$g = h_n \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ h_1 \circ k,$$

где су h_1, h_2, …, h_n глатке просте функције а k функција која пермутује променљиве.

Доказ. Како је $\det g'(s) \neq 0$, у последњој врсти Јакобијеве матрице $g'(s)$ постоји елемент који је различит од нуле и чији је кофактор различит од нуле. Нека се такав елемент налази у колони чији је редни број m_n. Нека је $k_{n-1} : U \to \mathbf{R}^n$ функција задата са

$$k_{n-1}(t) = (g_1(t), \ldots, g_{n-1}(t), P_m(t)).$$

Лако је видети да је $\det k'_{n-1}(s) \neq 0$ (овај јакобијан је једнак кофактору о коме је раније било речи). Постоји отворена околина V_{n-1} тачке s на којој је пресликавање k_{n-1} дифеоморфизам. Нека је функција $h_n\colon k_{n-1}(V_{n-1}) \to \mathbf{R}^n$ задата са

$$h_n(u) = (u_1, \dots, u_{n-1}, g_n(k_{n-1}^{-1}(u))).$$

Тада је $g = h_n \circ k_{n-1}$ на V_{n-1}. У претпоследњој врсти Јакобијеве матрице $k'_{n-1}(s)$ постоји елемент који је различит од нуле и чији је кофактор различит од нуле. Нека се такав елемент налази у колони чији је редни број m_{n-1}. Нека је $k_{n-2}\colon V_{n-1} \to \mathbf{R}^n$ функција задата са

$$k_{n-2}(t) = (g_1(t), \dots, g_{n-2}(t), P_{m_{n-1}}(t), P_{m_n}(t)).$$

Лако је видети да је $\det k'_{n-2}(s) \neq 0$. Постоји отворена околина V тачке s на којој је пресликавање k_{n-2} дифеоморфизам. Нека је функција $h_{n-1}\colon k_{n-2}(V_{n-2}) \to \mathbf{R}^n$ задата са

$$h_{n-1}(u) = (u_1, \dots, u_{n-2}, g_{n-1}(k_{n-2}^{-1}(u)), u_n).$$

Тада је $k_{n-1} = h_{n-1} \circ k_{n-2}$ на V_{n-2}. Настављањем овог поступка доћи ћемо на крају до тога да се на некој отвореној околини V_0 тачке s функција g може представити у облику

$$g = h_n \circ h_{n-1} \circ \dots \circ h_1 \circ k_0,$$

где су h_1, h_2, ... , h_n просте глатке функције, а k_0 функција задата са

$$k_0(t) = (P_{m_1}(t), P_{m_2}(t), \dots, P_{m_n}(t)),$$

за коју важи $\det k'_0(s) \neq 0$. Из овог последњег услова следи да су бројеви m_1, m_2, ... , m_n различити међу собом, тј. да функција k_0 пермутује променљиве. Довољно је ставити да је $V = V_0$ и да је $k = k_0$. ■

3. Докази теорема о смени променљивих

Доказ теореме 1. Тврђење (теореме) је тачно уколико је f карактеристична функција интервала. Нека је $I = (c,d) \subset (a,b)$ и нека је $g^{-1}(I) = (\gamma,\delta) \subset (\alpha,\beta)$. Тада је

$$\begin{aligned}\int_a^b \chi_I(x)\,dx &= \int_c^d dx = d - c = g(\delta) - g(\gamma)\\ &= \int_\gamma^\delta g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \chi_I(g(t))g'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Тврђење је тачно уколико је f карактеристична функција отвореног скупа. Нека је G отворен подскуп од (a,b). Скуп G може да се представи као унија највише пребројиве фамилије дисјунктних подинтервала од (a,b): $G = \bigcup_{k\in K} I_k$. Тада је

$$\begin{aligned}\int_a^b \chi_G(x)\,dx &= \int_a^b \sum_{k\in K} \chi_{I_k}(x)\,dx = \sum_{k\in K}\int_a^b \chi_{I_k}(x)\,dx = \sum_{k\in K}\int_\alpha^\beta \chi_{I_k}(g(t))g'(t)\,dt\\ &= \int_\alpha^\beta \sum_{k\in K} \chi_{I_k}(g(t))g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \chi_G(g(t))g'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Тврђење је тачно уколико је f карактеристична функција затвореног скупа. Нека је F затворен подскуп од (a,b). Скуп F може да се представи као разлика интервала (a,b) и отвореног подскупа од (a,b): $F=(a,b)\setminus G$. Тада је

$$\begin{aligned}\int_a^b \chi_{_F}(x)\,dx &= \int_a^b [1-\chi_{_G}(x)]\,dx = \int_a^b dx - \int_a^b \chi_{_G}(x)\,dx\\ &= \int_\alpha^\beta g'(t)\,dt - \int_\alpha^\beta \chi_{_G}(g(t))g'(t)\,dt\\ &= \int_\alpha^\beta [1-\chi_{_G}(g(t))]g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \chi_{_F}(g(t))g'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Тврђење је тачно уколико је f карактеристична функција мерљивог скупа. Нека је E мерљив подскуп од (a,b). Нека је $\varepsilon>0$. Постоје затворен скуп F и отворен скуп G, такви да је $F\subset E\subset G\subset(a,b)$ и да је $m(G\setminus F)<\varepsilon$. Из $\chi_{_F}\leqslant\chi_{_E}\leqslant\chi_{_G}$ следи

$$\int_a^b \chi_{_F}(x)\,dx \leqslant \int_a^b \chi_{_E}(x)\,dx \leqslant \int_a^b \chi_{_G}(x)\,dx,$$

$$\int_\alpha^\beta \chi_{_F}(g(t))g'(t)\,dt \leqslant \int_\alpha^\beta \chi_{_E}(g(t))g'(t)\,dt \leqslant \int_\alpha^\beta \chi_{_G}(g(t))g'(t)\,dt.$$

Како је

$$mF = \int_a^b \chi_{_F}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \chi_{_F}(g(t))g'(t)\,dt \quad \text{и}$$

$$mG = \int_a^b \chi_{_G}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \chi_{_G}(g(t))g'(t)\,dt,$$

из горњих неједнакости следи да је

$$\left|\int_a^b \chi_{_E}(x)\,dx - \int_\alpha^\beta \chi_{_E}(g(t))g'(t)\,dt\right| \leqslant mG-mF<\varepsilon.$$

Како је ε произвољан позитиван број, то је

$$\int_a^b \chi_{_E}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \chi_{_E}(g(t))g'(t)\,dt.$$

Тврђење је тачно уколико је f једноставна мерљива функција на интервалу (a,b). Нека је $j(x)=\sum\limits_{k\in K} c_k\chi_{_{E_k}}(x)$, где су E_k, $k\in K$, дисјунктни мерљиви подскупови интервала (a,b) и c_k, $k\in K$, ненегативни реални бројеви. Тада је

$$\begin{aligned}\int_a^b j(x)\,dx &= \int_a^b \sum_{k\in K} c_k\chi_{_{E_k}}(x)\,dx = \sum_{k\in K} c_k \int_a^b \chi_{_{E_k}}(x)\,dx\\ &= \sum_{k\in K} c_k \int_\alpha^\beta \chi_{_{E_k}}(g(t))g'(t)\,dt\\ &= \int_\alpha^\beta \sum_{k\in K} c_k\chi_{_{E_k}}(g(t))g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta j(g(t))g'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Нека је (j_k) растући низ једноставних мерљивих функција на (a,b), који у свакој тачки конвергира функцији f. Тада је

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_a^b j_k(x)\,dx\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta j_k(g(t))g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Тврђење важи за произвољну функцију f интеграбилну на (a,b). Заиста

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx\\ &= \int_\alpha^\beta f^+(g(t))g'(t)\,dt - \int_\alpha^\beta f^-(g(t))g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Доказ теореме 2. Ако тврђење теореме важи за ненегативну мерљиву функцију f, онда оно важи за произвољну интеграбилну функцију f. Заиста

$$\begin{aligned}\int_D f(x)\,dx &= \int_D f^+(x)\,dx - \int_D f^-(x)\,dx\\ &= \int_\Delta f^+(g(t))|\det g'(t)|\,dt - \int_\Delta f^-(g(t))|\det g'(t)|\,dt\\ &= \int_\Delta f(g(t))|\det g'(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Зато надаље можемо претпостављати да је f ненегативна мерљива функција.

Ако свака тачка s скупа D има отворену околину V за коју важи

$$\int_{g(V)} f(x)\,dx = \int_V f(g(t))|\det g'(t)|\,dt,$$

онда је тврђење теореме тачно. Ако је претпоставка овог тврђења задовољена, онда постоји највише пребројива фамилија отворених скупова V_k, $k\in K$, таква да је $\Delta = \bigcup_{k\in K} V_k$ и да је

$$\int_{g(V_k)} f(x)\,dx = \int_{V_k} f(g(t))|\det g'(t)|\,dt,$$

за свако $k\in K$ и сваку ненегативну мерљиву функцију f на $g(V_k)$. Постоји фамилија мерљивих скупова E_k, $k\in K$, који су дисјунктни, покривају $g(\Delta)$ и задовољавају услов $E_k\subset g(V_k)$ за свако $k\in K$. Тада важи

$$\begin{aligned}\int_D f(x)\,dx &= \int_D \sum_{k\in K}\chi_{E_k}(x)f(x)\,dx\\ &= \sum_{k\in K}\int_D \chi_{E_k}(x)f(x)\,dx = \sum_{k\in K}\int_{g(V_k)}\chi_{E_k}(x)f(x)\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in K} \int_{V_k} \chi_{E_k}(g(t)) f(g(t)) |\det g'(t)|\, dt \\
&= \sum_{k\in K} \int_{\Delta} \chi_{E_k}(g(t)) f(g(t)) |\det g'(t)|\, dt \\
&= \int_{\Delta} \sum_{k\in K} \chi_{E_k}(g(t)) f(g(t)) |\det g'(t)|\, dt = \int_{\Delta} f(g(t)) |\det g'(t)|\, dt.
\end{aligned}
$$

Нека су Δ_1 и Δ_2 , отворени скупови у $\mathbf{R}^n$ и нека су $g_1 : \Delta_1 \to \mathbf{R}^n$ и $g_2 : \Delta_2 \to \mathbf{R}^n$ глатке инјекције. Ако је тврђење теореме тачно за функције g_1 и g_2 и ако је $g_1(\Delta_1) \subset \Delta_2$, онда је тврђење теореме тачно и за функцију $g = g_2 \circ g_1$. Заиста, ако је функција $f\colon g(\Delta_1) \to \mathbf{R}$ ненегативна и мерљива, онда је

$$
\begin{aligned}
\int_{g(\Delta_1)} f(x)\, dx &= \int_{g_2(\Delta_2)} \chi_{g(\Delta_1)}(x) f(x)\, dx = \\
&= \int_{\Delta_2} \chi_{g(\Delta_1)}(g_2(u)) f(g_2(u)) |\det g_2'(u)|\, du \\
&= \int_{g_1(\Delta_1)} f(g_2(u)) |\det g_2'(u)|\, du \\
&= \int_{\Delta_1} f(g_2(g_1(t))) |\det g_2'((g_1(t))| |\det g_1'(t)|\, dt \\
&= \int_{\Delta_1} f(g_2(g_1(t))) |\det g_2'((g_1(t)) \cdot g_1'(t)|\, dt \\
&= \int_{\Delta_1} f((g_2 \circ g_1)(t)) |\det (g_2 \circ g_1)'(t)|\, dt \\
&= \int_{\Delta_1} f(g(t)) |\det g'(t)| dt.
\end{aligned}
$$

На основу доказаних чињеница, Сардове теореме и теореме о разлагању глатке функције закључујемо да је довољно доказати да је тврђење теореме тачно у случајевима када је Δ правоугли паралелепипед и када је функција g пермутација променљивих или када је функција g проста. Први случај је тривијалан, па ћемо се задржати само на другом. Нека је $\Delta = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, нека је функција $g\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$ задата са $g(t) = (g_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t))$. Даље, нека је $\Delta' = (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, $I = (a_1, b_1)$ и $I(t') = g(I_x\{t'\})$, где је $t' = (t_2, \ldots, t_n)$. Тада је

$$
\begin{aligned}
\int_{g(\Delta)} f(x)\, dx &= \int_{\Delta'} \left(\int_{I(t')} f(x)\, dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_{\Delta'} \left(\int_{I} f(g(t)) |\partial g_1(t)/\partial t_1|\, dt_1 \right) dt_2 \ldots dt_n \\
&= \int_{\Delta} f(g(t)) |\partial g_1(t)/\partial t_1|\, dt = \int_{\Delta} f(g(t)) |\det g'(t)|\, dt.
\end{aligned}
$$

Овде смо два пута применили Фубинијеву теорему и једанпут Теорему 1 о смени промењљиве код Лебеговог интеграла функције једне промењљиве. ∎

4. Коментари

1. У књизи [1] Теорема 1 је формулисана као задатак, а у [3] дата је са доказом. У оба случаја у формулацији теореме се претпоставља да је функција g монотоно растућа, што је, као што смо видели, непотребно јака претпоставка. Доказ дат у овом чланку се разликује од оног из књиге [3].

2. У књизи [4] формулисана је и доказана теорема о смени промењљивих код Римановог интеграла, која је слична Теореми 2. Доказ Теореме 2 који је овде дат инспирисан је доказом из ове књиге. Интересантно је да је доказ теореме која се односи на случај Римановог интеграла сложенији од доказа теореме која се односи на случај Лебеговог интеграла. Због тога се намеће питање да ли је уопште потребно доказивати теорему о смени промењљивих код вишеструког Римановог интеграла, или се треба позвати на теорему која се односи на Лебегов интеграл. Можда студентима математике који у току свог школовања уче Лебегов интеграл уопште не треба предавати Риманов интеграл функција више промењљивих.

3. У [6] дат је други доказ Теореме 2. Приступ из те књиге могао би да буде тема посебног чланка.

4. Фубинијева теорема може да се нађе у књизи [1] без доказа, а у [2] са доказом. Сардова теорема у овом облику може да се нађе у [4]. Теорема о разлагању глатког пресликавања може се наћи у књизи [5] у облику који је сличан датом у овом чланку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аљанчић, С.: *Увод у реалну и функционалну анализу*, Грађевинска књига, Београд, 1968.
[2] Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В.: *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва, 1981.
[3] Натансон, И.П.: *Теория функций вещественной переменной*, Наука, Москва, 1974.
[4] Spivak, M.: *Calculus on Manifolds*, W.A. Benjamin, New York, 1965.
[5] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1964.
[6] Parthasaraty, K.R.: *Introduction to Probability and Measure*, Macmillan, Delhi, 1977.