Драгољуб Јовић

ФЕРМАОВ БРОЈНИ НИЗ

Пјер Ферма (Pierre de Fermat, 1601–1655) је, несумњиво, био један од највећих математичара XVII века. У то доба нису се издавали научни часописи нити су се одржавали научни скупови, па је он, као и сви његови савременици, своје резултате и идеје излагао у писмима, која је упућивао истакнутим савременицима, међу којима и Рене Декарту (René Descartes, 1596–1650) и Блезу Паскалу (Blaise Pascal, 1623–1662). Иако његов научни опус обухвата резултате из разних подручја (аналитичка геометрија, теорија вероватноће, математичка анализа, физика, ...), судећи према одушевљењу са којим је о њима писао, њему су најдржи били резултати из теорије бројева. Наш је циљ да се упознамо са једним од тих резуллтата. При томе ћемо се користити савременом терминологијом и начином записивања.

Дефиниција 1. Низ (F_n) природних бројева чији је општи члан

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

је Фермаов низ бројева. Чланови низа су Фермаови бројеви.

Из дефиниције следи да Фермаов низ бројева има следеће особине:

1° сви његови чланови су непарни бројеви;

2° ограничен је одоздо и неограничен одозго;

3° стриктно расте.

Теорема 1. *Узастопни чланови Фермаовог низа бројева су узајамно прости бројеви.*

Доказ. Претпоставимо да постоји природан број n такав да бројеви F_n и F_{n+1} нису узајамно прости. Нека је d њихов заједнички делилац. Дакле, $d \mid F_n$ и $d \mid F_{n+1}$. Из

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \cdot 2} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\ &= \left(\left(2^{2^n}\right)^2 - 1\right) + 2 = \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\ &= \left(2^{2^n} - 1\right) F_n + 2, \end{aligned}$$

закључујемо да $d \mid 2$, што значи да је $d = 1$ или $d = 2$. Како су сви Фермаови бројеви непарни, не може бити $d = 2$. Дакле, број 1 је једини заједнички делилац бројева F_n и F_{n+1}, што значи да су они узајамно прости. ■

Теорема 2. *Производ првих n чланова Фермаовог низа бројева једнак је* $2^{2^n}-1$.

Доказ. Докажимо математичком индукцијом да за сваки природан број n и $x \neq 1$ важи

$$(*)\qquad \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^{2^k}+1\right)=\frac{x^{2^n}-1}{x-1}.$$

За $n=1$ имамо тачну једнакост $x+1=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. За $n=2$ имамо

$$(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1=\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{x^{2^2}-1}{x-1}.$$

Претпоставимо да је једнакост $(*)$ тачна за $n=r$, дакле

$$\prod_{k=0}^{r-1}\left(x^{2^k}+1\right)=\frac{x^{2^r}-1}{x-1}.$$

Одатле следи

$$\prod_{k=0}^{r}\left(x^{2^k}+1\right)=\left(\prod_{k=0}^{r-1}\left(x^{2^k}+1\right)\right)\left(x^{2^r}+1\right)=\frac{x^{2^r}-1}{x-1}\left(x^{2^r}+1\right)$$
$$=\frac{\left(x^{2^r}\right)^2-1}{x-1}=\frac{x^{2^{r+1}}-1}{x-1},$$

што је и требало доказати.

Специјално, за $x=2$, једнакост $(*)$ постаје

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(2^{2^k}+1\right)=\frac{2^{2^n}-1}{2-1}=2^{2^n}-1.$$

Теорема је доказана. ∎

Бројеви $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$ и $F_4=65\,537$ су прости (уверите се у то). На основу ове чињенице Ферма је 1640. године претпоставио да су сви чланови низа (F_n) прости. Он није успео да утврди да ли је број $F_5=2^{32}+1=4\,294\,967\,297$ прост или не. Познати швајцарски и руски математичар Ојлер (Leonhard Euler, 1707–1783) је 1739. године доказао да је F_5 сложен, јер је $F_5=641\cdot 6\,700\,417$, чиме је оповргао Фермаову претпоставку. У даљим настојањим да се испита Фермаов низ бројева утврђено је да су бројеви F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{15}, F_{16}, F_{18}, F_{23}, F_{36}, F_{38}, F_{73} сложени. За број F_8 је 1909, а за број F_{13} 1960. године доказано да су сложени, али њихове ефективне факторизације још увек нису нађене. Насупрот томе, за број F_{16} је доказано да је дељив са $825\,753\,601$, а за број F_{36}, који се пише са преко $18\,000\,000\,000$ цифара, доказано је да је дељив бројем $2\,748\,779\,069\,443$.

Још увек се не зна да ли постоје прости Фермаови бројеви за $n > 4$. А управо они имају велики значај у геометрији. Наиме, 1796. године је Гаус (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) доказао важну теорему:

Правилни m-тоугао, где је m прост број, може се конструисати помоћу лењира и шестара ако и само ако је m Фермаов број.

Сам Гаус је конструисао правилан 17-тоугао ($17 = F_2$). Он је толико ценио тај свој резултат да је, према његовој жељи, на његовом надгробном споменику приказан правилан 17-тоугао уписан у круг. Правилан 257-угао ($257 = F_3$) конструисао је Ришело (Richelot, 1808–1875), а правилан 65537-угао ($65537 = F_4$) конструисао је Хермес (Hermes, 1846–1912).

ОБАВЕШТЕЊЕ

У мотелу „Кладовача“ на Вучјој Пољани тридесетак километара од Кључа одржана је Прва летња републичка школа младих математичара–ученика средњих школа у организацији Друштва математичара Републике Српске, Универзитета у Бањој Луци и Средњошколског центра из Кључа. Захваљујући напорима Боже Рисовића, професора у Средњошколском центру у Кључу и његовом ентузијазму у раду са младим математичарима, мр Дане Пејић, директор ШИП-а „Кључ“ из Кључа омогућио је Школи и њеним полазницима бесплатно коришћење мотела „Кладовача“ са својим услугама. Школа је трајала седам дана: од 24.06. до 01.07.1994. године. Предавачи су били спец. Борис Чекрлија и Борисав Мичић, надзорници Републичког педагошког завода у Бањој Луци, и др Даниел А. Романо, професор Машинског факултета Универзитета у Бањој Луци. Сваки дан слушаоци су били у могућности да се упознају са темама из математике које се, иначе, не сусрећу у редовном средњошколском образовању. Предавања су трајала по четири сата (09.00–12.30). После подне је било резервисано за индивидуални рад. Последњи дан Школе је био резервисан за тестирање ученика и разговор о математици. Према казивању ученика и предавача смештај и храна у мотелу су били одлични. То су остварили радници са несебичним пожртвовањем. Учесници и предавачи школе као и читаво Друштво дугује захвалност тим вредним људима.

Љубазношћу господина Гојка Карача, директора „Штампарије“ у Кључу, учесницима који нису учествовали у раду школе биће омогућено да се упознају са математичким садржајима излаганим на овој школи посредством Билтена школе чије се излажење очекује најкасније до почетка нове школске године.

Руководиоци школе су били Божо Рисовић и Бранко Кевац, професори математике у Средњошколском центру у Кључу.

Излагане су следеће теме: О међусобно инверзним релацијама (3 сата); Линеарне и нелинеарне Диофантове једначине (4 сата); Одређивање екстремних вредности елементарним путем (8 сати); О генерализацији функцијских, парних и непарних и периодичних релација (4 сата); О функцијама $x \mapsto [x]$ и $x \mapsto \{x\}$ (3 сата) и Пети Еуклидов постулат (1 сат).

Д.Р.