НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1994, XL, 1–2, стр. 1–11

Др Милосав Марјановић

КОНВЕКСНЕ И КОНКАВНЕ ФУНКЦИЈЕ И КОРЕСПОНДЕНТНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ[1]

1. Увод. Програм IV разреда гимназије математичког усмерења предвиђа тему: „Испитивање функција помоћу извода и цртање њихових графика“.

Помоћу другог извода одређују се врсте карактеристичних тачака графика функције које зовемо превојне тачке, а такође и интервали над којима је функција конвексна, односно конкавна.

Нека је $f\colon A \to \mathbf{R}$, $(A \subset \mathbf{R})$ реална функција реалне променљиве. Подсетимо да скуп

$$\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A \text{ и } y = f(x) \,\}$$

називамо *граф* (*график*) функције f. Скуп

$$\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A \text{ и } y \geqslant f(x) \,\}$$

називамо *надграф*, а скуп

$$\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A \text{ и } y \leqslant f(x) \,\}$$

подграф функције f.

[1] Овим чланком отварамо нову рубрику: „Теме за интензивну обраду“, у оквиру које ћемо, често у наставцима, објављивати садржаје који се могу користити за додатну наставу, стручне семинаре, циклусе предавања за ученике или наставнике ... . Неке од тих тема ће послужити као основа за посебне свеске Материјала за младе математичаре или Посебних издања Друштва математичара Србије.

Када је A интервал, за функцију f кажемо да је конвексна кад је део њеног графика над произвољним интервалом $[x_1, x_2] \subset A$ испод сечице кроз тачке $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Изражавајући ово својство, график конвексне функције видимо као испупчен (конвексан) ако га посматрамо одоздо и у позитивном смеру y-осе. Тачније, тада је надграф функције f конвексан.

Кад је граф функције f испупчен, гледан одозго и у негативном смеру y-осе, функција f је конкавна. Тачније речено, тада је њен подграф конвексан скуп.

Ако геометријским објектима као што су сечица и граф дамо функцијско значење а релацију испод тада схватимо као функцијски однос „једнако или мање“, добићемо једну фундаменталну неједнакост, на основу које се могу извести многе специјалне, укључујући и низ значајних класичних неједнакости.

Приметићемо да је уз овај садржај присутна знатна геометријска зорност и да он пружа разноврсне могућности варирања и продуковања занимљивих примера. Зато се може очекивати креативност самих ученика у смислу састављања и доказивања занимљивих примера неједнакости.

Надамо се да ће наше даље излагање показати да је било оправдано овај садржај одабрати за тему интензивне обраде.

2. Конвексне и конкавне функције. Овде ћемо посматрати реалне функције $f\colon I \to \mathbf{R}$, чији су домени I интервали. Кад говоримо о диференцијабилности функције f на интервалу I претпостављамо егзистенцију извода у свим тачкама, с тим што извод у могућним крајњим тачака схватамо као леви, односно десни, већ према врсти тих крајњих тачака.

Подсетимо се да за функцију $f\colon I \to \mathbf{R}$ кажемо да је *растућа* (*стриктно растућа*) ако

$$(\forall x, y \in I)\, x < y \implies f(x) \leqslant f(y), \quad (f(x) < f(y)),$$

а *опадајућа* (*стриктно опадајућа*) ако

$$(\forall x, y \in I)\, x < y \implies f(x) \geqslant f(y), \quad (f(x) > f(y)).$$

За функцију која је било растућа било опадајућа, кажемо да је *монотона.*

Кад је f диференцијабилна и растућа функција, тада је количник

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0,$$

па је одатле: $(\forall x \in I)\, f'(x) \geqslant 0$. Кад је f диференцијабилна и испуњен је услов $(\forall x \in I)\, f'(x) \geqslant 0$, тада, за $x < y$, на основу Lagrange-ове теореме, имамо

$$f(x) - f(y) = (x - y) f'(\xi) \leqslant 0,$$

па је f растућа функција. Дакле, *диференцијабилна функција* $f\colon I \to \mathbf{R}$ *је растућа ако и само ако:* $(\forall x \in I)\, f'(x) \geqslant 0$*, односно опадајућа ако и само ако* $(\forall x \in I)\, f'(x) \leqslant 0$. Посебно, *кад је* $(\forall x \in I)\, f'(x) > 0$*,* f *је стриктно растућа, а кад је* $(\forall x \in I)\, f'(x) < 0$*,* f *је стриктно опадајућа.*

Приметимо да у класи диференцијабилних функција, оне са ненегативним изводом се управо подударају са растућим функцијама те класе. За ову исту класу дефинишимо *конвекене функције* као оне функције $f\colon I \to \mathbf{R}$ чији су изводи $f'\colon I \to \mathbf{R}$ растуће функције. Оне, пак, функције ове класе чији су изводи $f'\colon I \to \mathbf{R}$ опадајуће функције дефинишемо као *конкавне функције*.

На основу ових дефиниција немамо одмах ону геометријску представу о конвексним и конкавним функцијама о којој је било речи у уводу. Зато, проучимо прво однос конвексне (по горњој дефиницији) функције $f\colon I \to \mathbf{R}$ и тангенте у произвољној тачки $(x_0, f(x_0))$ њеног графика.

Тангента у тачки $(x_0, f(x_0))$ је линеарна по x функција

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Разлика

$$\begin{aligned} f(x) - y(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) \end{aligned}$$

је ненегативна, јер: $x < x_0 \implies f'(\xi) < f'(x_0)$ и $x > x_0 \implies f'(\xi) > f'(x_0)$.

Тако смо доказали да се график конвексне функције налази изнад сваке своје тангенте. Слично бисмо доказали да је график конкавне функције испод сваке свој тангенте.

Приметимо да кад је $f\colon I \to \mathbf{R}$ два пута диференцијабилна функција, да је тада f конвексна (конкавна) ако и само ако је: $(\forall x \in I)\, f''(x) \geqslant 0$, $(f''(x) \leqslant 0)$, а што одмах следи из претходне карактеризације монотоних функција преко извода.

Однос између графика конвексне (односно конкавне) функције и његове произвољне сечице је посебно значајан и том односу посвећујемо следећи параграф.

3. Основна неједнакост. Нека су x и y дати реални бројеви и претпоставимо $x < y$. Тада, за сваки реални број c, постоји јединствени реалан број α, такав да је

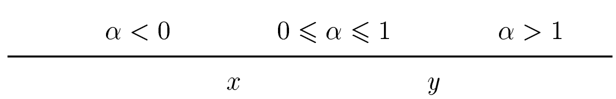
$$c = (1 - \alpha)x + \alpha y.$$

Заиста, схватајући ову неједнакост као једначину са непознатом α, имамо јединствено решење

$$\alpha = \frac{c - x}{y - x}.$$

Приметимо да

$$\begin{aligned} \alpha < 0 &\implies c = (1-\alpha)x + \alpha y \leqslant (1-\alpha)x + \alpha x = x, \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 &\implies x = (1-\alpha)x + \alpha x \leqslant (1-\alpha)x + \alpha y \\ &\qquad = c \leqslant (1-\alpha)y + \alpha y = y, \\ \alpha > 1 &\implies c = \alpha x + (1-\alpha)y \leqslant \alpha y + (1-\alpha)y = y. \end{aligned}$$



Посебно приметимо да кад α тече од 0 до 1, тачка c пролази кроз све тачке интервала $[x, y]$, почев са x и завршив са y.

Израз $\alpha x + (1-\alpha)y$ називамо *линеарна комбинација* тачака x и y. Кад је $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, такву комбинацију називамо *конвексна комбинација* тачака x и y.

Кад су $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ две различите тачке у равни, тада произвољна тачка $c = (c_1, c_2)$ праве кроз те две тачке може да се напише као линеарна комбинација $c = (1-\alpha)x + \alpha y$, где је

$$\alpha = \frac{c_1 - x_1}{y_1 - x_1} = \frac{c_2 - x_2}{y_2 - x_2}.$$

Заиста, кад је $c_1 = (1-\alpha)x_1 + \alpha y_1$, тада је

$$c_2 = x_2 + \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}(c_1 - x_1) = x_2 + \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}\alpha(y_1 - x_1) = (1-\alpha)x_2 + \alpha y_2,$$

(са $y_1 \neq x_1$).

Кад је $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, конвексна комбинација $(1-\alpha)x + \alpha y$ представља тачке дужи чији су крајеви $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$.

Сад ћемо доказати да је за конвексне и конкавне функције однос графика и његове сечице заиста такав како смо то изложили у уводу, односно тако ћемо доказати да су надграф конвексне и подграф конкавне функције конвексни скупови.

Теорема. *Нека је $f\colon I \to \mathbf{R}$ конвексна (одн. конкавна) функција и нека су x, $y \in I$ произвољне тачке и $\alpha \in [0,1]$. Тада важи неједнакост*

$$f[(1-\alpha)x + \alpha y] \leqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

(одн. неједнакост

$$f[(1-\alpha)x + \alpha y] \geqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)\,).$$

Доказ. Претпоставимо да је $x < y$ и узмимо $c = (1-\alpha)x + \alpha y$, са

$$\alpha = \frac{c - x}{y - x}, \quad 1 - \alpha = \frac{y - c}{y - x}, \quad (x < c < y).$$

Претпоставимо да је f конвексна функција. Примењујући Lagrange-ову теорему, имамо

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) - f(c) &= (1-\alpha)(f(x) - f(c)) + \alpha(f(y) - f(c)) \\
&= (1-\alpha)(x-c)f'(\xi_1) + \alpha(y-c)f'(\xi_2) \\
&= \frac{y-c}{y-x}(x-c)f'(\xi_1) + \frac{c-x}{y-x}(y-c)f'(\xi_2) \\
&= \frac{y-c}{y-x}(c-x)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] \geqslant 0,
\end{aligned}$$

а последњи израз је позитиван, јер је

$$x < \xi_1 < c < \xi_2 < y,$$

па је $f'(\xi_2) \geqslant f'(\xi_1)$.

Приметимо да кад је $x = c$ или $c = y$, неједнакост такође важи (сводећи се на једнакост). Такође неједнакост важи и у случају $y < x$, кад се сменом $\beta = 1 - \alpha$ и заменом улога тачака x и y своди на случај који смо доказали. ∎

Напомена 1. Кад је $0 < \alpha < 1$ (тј. $x < c < y$) и функција f' стриктно растућа, доказана неједнакост се своди на једнакост ако и само ако је $x = y$.

Напомена 2. Не претпостављајући диференцијабилност, функција $f\colon I \to \mathbf{R}$, где је I интервал, каже се да је конвексна ако за сваки $\alpha \in [0,1]$ и сваке x, $y \in I$, важи неједнакост

$$f[(1-\alpha)x + \alpha y] \leqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Тада је надграф функције f конвексан скуп. Заиста, нека су (x_1, y_1) и (x_2, y_2) тачке надграфа, тј. $y_1 \geqslant f(x_1)$ и $y_2 \geqslant f(x_2)$, $(x_1,\, x_2 \in I)$. Тада

$$(1-\alpha)y_1 + \alpha y_2 \geqslant (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) \geqslant f[(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2],$$

тј. произвољна тачка дужи $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$,

$$\big((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2\big)$$

припада надграфу.

Кад је надграф конвексан скуп, тада горња неједнакост очигледно важи па, дакле, $f\colon I \to \mathbf{R}$ је конвексна функција ако и само ако је њен надграф конвексан скуп.

Кад је $f\colon I \to \mathbf{R}$ конвексна функција, тада је f непрекидна, сем могуће у крајевима интервала I. Такође постоје леви и десни изводи f'_-, f'_+ и једнаки су, сем могуће на скупу тачака који је највише пребројив. Ова значајна својства везују се за рад: J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math., 30, 175–193 (1906).

Jensen је посматрао и слабији услов (кад је $\alpha = 1/2$)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Узастопном применом ове неједнакости, следи

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_N)}{N},$$

кад је $N = 2^n$. Међутим, ако задња неједнакост важи за N, важиће и за $N-1$. Заиста,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1}}{N-1} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} + y}{N},$$

кад је $y = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1}}{N-1}$, па ће бити

$$f(y) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{N-1}) + f(y)}{N},$$

одакле

$$f(y) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{N-1})}{N-1}.$$

Дакле, N може бити било који природни број већи од 1.

За $1-\alpha = \dfrac{m}{N}$, $\alpha = \dfrac{n}{N}$ рационалне, имамо такође

$$f[(1-\alpha)x + \alpha y] \leqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y),$$

па слабији услов повлачи део јачег кад је $\alpha \in \mathbf{Q}$.

За непрекидну функцију f, како то лако видимо, следи да су оба услова еквивалентни (а то следи и кад је f одозго ограничена (Jensen), мерљива (H. Blumberg, Trans. Amer. Math. Soc., 20, (1919)) или чак ако има мерљиву мајоранту (W. Sierpinski, Fund. Math. 5 (1924))).

Примери функција које задовољавају слабији и не задовољавају јачи услов морају бити врло „неконструктивни“. Они се задају коришћењем ткзв. Hamel-ове базе за скуп реалних бројева $\mathbf{R}$ (G. Hamel, Math. Annalen, 60 (1905)).

4. Примери.

1. Функција $f\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, дата са $f(x) = x^a$, има други извод $f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$, па је за

(I) $a \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, $f'' \geqslant 0$;

(II) $a \in [0,1]$, $f'' \leqslant 0$,

тј. у првом случају функција је конвексна, а у другом конкавна. У случајевима $a=0$ и $a=1$, f је линеарна функција и истовремено је конвексна и конкавна (а кореспондентне неједнакости се тада своде на једнакости).

Кад је $\alpha \in [0,1]$, имаћемо за свако $x>0$ и $y>0$, следеће неједнакости:

(1) за $a > 1$,

$$[(1-\alpha)x + \alpha y]^a \leqslant (1-\alpha)x^a + \alpha y^a,$$

(2) за $0 < a < 1$,

$$[(1-\alpha)x + \alpha y]^a \geqslant (1-\alpha)x^a + \alpha y^a,$$

(3) за $a < 0$,

$$[(1-\alpha)x + \alpha y]^a \leqslant (1-\alpha)x^a + \alpha y^a.$$

Узимајући $a = -k$, $(k>0)$, добијамо

$$\frac{1}{[(1-\alpha)x + \alpha y]^k} \leqslant (1-\alpha)\frac{1}{x^k} + \alpha\frac{1}{y^k},$$

односно

$$[(1-\alpha)x + \alpha y]^k \geqslant \frac{x^k y^k}{(1-\alpha)y^k + \alpha x^k}. \tag{4}$$

Тако, кад је $a > 1$, имамо двоструку неједнакост

$$\frac{x^a y^a}{(1-\alpha)y^a + \alpha x^a} \leqslant [(1-\alpha)x + \alpha y]^a \leqslant (1-\alpha)x^a + \alpha y^a.$$

Укључујући и случај $a = 1$, из задње неједнакости следи процена производа две конвексне комбинације са размењеним улогама тачака x и y,

$$[(1-\alpha)x + \alpha y] \cdot [(1-\alpha)y + \alpha x] \geqslant xy$$

(а што се може и елементарније доказати посматрајући квадратну функцију по α, на левој страни ове неједнакости).

Из неједнакости (2), за $\alpha = 1/2$, имамо

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^a \geqslant \frac{x^a + y^a}{2}, \quad (0 < a < 1).$$

Кад је $a = 1/2$, биће

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}.$$

Квадрирајући ову неједнакост, после сређивања добијамо познату елементарну неједнакост

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

(однос аритметичке и геометријске средине два броја).

Функција $f(x) = x^a$ је за $a \neq 1$ и $a \neq 0$ стриктно конвексна, односно конкавна, зависно од вредности параметра a. Ако је $0 < \alpha < 1$, у неједнакостима (1), (2) и (3) јавља се знак једнакости само кад је $x = y$. Та чињеница може да нам служи за одређивање највеће и најмање вредности, како ћемо то у следећим примерима интерпретирати.

Претпоставимо да је збир позитивних бројева x и y константан, тј. претпоставимо да је $x + y = s$. Тада је, на основу неједнакости о односу аритметичке и геометријске средине

$$x(s-x) \leqslant \frac{s^2}{4}.$$

Тако је функција

$$\varphi(x) = x(s-x)$$

одозго ограничена са $s^2/4$ и достиже ту вредност кад је $x = s - x$, тј. $x = s/2$.

Геометријски, ову чињеницу интерпретирамо тако што од правоугаоника датог обима $2s$, највећу површину има квадрат стране $s/2$.

Кад је за позитивне бројеве x и y производ $x \cdot y = p$ константан, на основу исте неједнакости следи

$$x + \frac{p}{x} \geqslant 2\sqrt{p},$$

тј. функција $\psi(x) = x + \dfrac{p}{x}$ узима најмању вредност $2\sqrt{p}$, кад је $x = \dfrac{p}{x}$, тј. $x = \sqrt{p}$.

Нека су a и b позитивне константе и $k \neq 1$ и $k \neq 0$. Посматрајмо функцију

$$f(x) = (ax+b)^k = (a+b)^k \left(\frac{a}{a+b}x + \frac{b}{a+b}\right)^k, \quad (x > 0).$$

Узимајући $y = 1$, $\alpha = \dfrac{b}{a+b}$, $1-\alpha = \dfrac{a}{a+b}$, за $k > 1$, имаћемо

$$(ax+b)^k \leqslant (a+b)^k \left[\frac{a}{a+b}x^k + \frac{b}{a+b}\right] = (a+b)^{k-1}(ax^k + b),$$

односно

$$\frac{(ax+b)^k}{ax^k+b} \leqslant (a+b)^{k-1}.$$

Тако функција

$$\varphi(x) = \frac{(ax+b)^k}{ax^k+b}, \quad (x \geqslant 0)$$

је непрекидна, $\varphi(0) = b^{k-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = a^{k-1}$, за $k > 0$. Тако је ова функција ограничена и за $k > 1$ узима највећу вредност $(a+b)^{k-1}$, за $x = 1$.

Слично, кад је $0 < k < 1$, функција φ узима најмању вредност $(a+b)^{k-1}$, кад је $x = 1$.

2. Функција $y = \ln x$ је конкавна, јер је $y'' = -1/x^2 < 0$. За $\alpha \in [0,1]$, $x > 0$ и $y > 0$, важи неједнакост

$$\ln[(1-\alpha)x + \alpha y] \geqslant (1-\alpha)\ln x + \alpha \ln y.$$

Антилогаритмујући, имаћемо

$$x^{1-\alpha}y^\alpha \leqslant (1-\alpha)x + \alpha y. \tag{5}$$

Кад је $0 < \alpha < 1$, сменом $u = x^{1-\alpha}$, $v = y^\alpha$, неједнакост постаје

$$u \cdot v \leqslant (1-\alpha)u^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha v^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Са ознакама $\dfrac{1}{1-\alpha} = p$, $\dfrac{1}{\alpha} = q$, претходна неједнакост постаје

$$u \cdot v \leqslant \frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q, \tag{6}$$

са $p > 1$, $q > 1$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Користећи неједнакост (6), изводимо следећу значајну класичну неједнакост.

Неједнакост Hölder-а (O. Hölder, Nachrichten (1889).) *Нека је* $p > 1$, $q > 1$ *и* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *и нека су* $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ *низови позитивних бројева. Тада важи неједнакост*

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leqslant \{x_1^p + \cdots + x_n^p\}^{1/p}\{y_1^q + \cdots + y_n^q\}^{1/q}.$$

Доказ. Нека је $X=\{x_1^p+\cdots+x_n^p\}^{1/p}$, $Y=\{y_1^q+\cdots+y_n^q\}^{1/q}$. Узимајући $u=\dfrac{x_i}{X}$, $v=\dfrac{y_i}{Y}$ у неједнакости (6), добијамо

$$\frac{x_iy_i}{XY}\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{x_i^p}{X^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{y_i^q}{Y^q},\quad(i=1,\ldots,n).$$

Сумирајући ове неједнакости, добићемо

$$\frac{x_1y_1}{XY}+\cdots+\frac{x_ny_n}{XY}\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{X^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{y_1^q+\cdots+y_n^q}{Y^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

одакле је

$$x_1y_1+\cdots+x_ny_n\leqslant XY,$$

што је и треабло доказати.

Не претпостављајући да су низови $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ са позитивним члановима, Hölder-ова неједнакост има следећу нешто општију форму

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|\leqslant\{|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p\}^{1/p}\{|y_1|^q+\cdots+|y_n|^q\}^{1/q}.$$

Напомена. За векторе $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$, скаларни производ се дефинише са

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

а норма (дужина) са

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\{x_1^2+\cdots+x_n^2\}^{1/2}.$$

Кад је $p=2$, $q=2$, Hölder-ова неједнакост се своди на Cauchy-еву

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|\leqslant\{x_1^2+\cdots+x_n^2\}^{1/2}\{y_1^2+\cdots+y_n^2\}^{1/2}$$

или, записујући у векторским терминима,

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,$$

па тако доказујемо да је скаларни производ два n-димензиона вектора једнак или мањи од производа њихових дужина (норми). Следећу важну класичну неједнакост извешћемо служећи се неједнакошћу Hölder-а.

Неједнакост Минковског (H. Minkowski) *Нека је $p>1$. Ако су $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ низови позитивних бројева, тада важи неједнакост*

$$\{(x_1+y_1)^p+\cdots+(x_n+y_n)^p\}^{1/p}\leqslant\{x_1^p+\cdots+x_n^p\}^{1/p}+\{y_1^p+\cdots+y_n^p\}^{1/p}.$$

Доказ. Збир

$$S=(x_1+y_1)^p+\cdots+(x_n+y_n)^p$$

напишимо као

$$S=x_1(x_1+y_1)^{p-1}+\cdots+x_n(x_n+y_n)^{p-1}+y_1(x_1+y_1)^{p-1}+\cdots+y_n(x_n+y_n)^{p-1},$$

па на ова два збира производа применимо Hölder-ову неједнакост

$$\begin{aligned} S \leqslant \{x_1^p + \cdots + x_n^p\}^{1/p}\{(x_1+y_1)^{(p-1)q} + \cdots + (x_n+y_n)^{(p-1)q}\}^{1/q} \\ + \{y_1^p + \cdots + y_n^p\}^{1/p}\{(x_1+y_1)^{(p-1)q} + \cdots + (x_n+y_n)^{(p-1)q}\}^{1/q}, \end{aligned}$$

где је стављено $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$. Како је $(p-1)q = p$, десна страна има фактор $S^{1/q}$, којим делећи добијамо

$$S^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \{x_1^p + \cdots + x_n^p\}^{1/p} + \{y_1^p + \cdots + y_n^p\}^{1/p},$$

што је неједнакост Минковског, јер је $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$.

Кад су $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ произвољни низови, примењујући $|x_i+y_i|^p \leqslant (|x_i| + |y_i|)^p$, имамо и следећу општију форму ове неједнакости

$$\{|x_1+y_1|^p + \cdots + |x_n+y_n|^p\}^{1/p} \leqslant \{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\}^{1/p} + \{|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p\}^{1/p}.$$

Кад је $p = 2$, ова неједнакост писана у векторским терминима, биће

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

тј. норма збира два n-димензиона вектора једнака је или мања од збира њихових норми.

3. Извешћемо и директни (тј. без коришћења Hölder-ове неједнакости) доказ неједнакости Минковског.

Нека је

$$\{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\}^{1/p} = X, \quad \{|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p\}^{1/p} = Y.$$

Тада, можемо претпоставити $X \neq 0$ и $Y \neq 0$. Биће

$$\begin{aligned} \frac{\sum |x_i+y_i|^p}{(X+Y)^p} &\leqslant \frac{\sum(|x_i|+|y_i|)^p}{(X+Y)^p} = \sum \left(\frac{X}{X+Y}\cdot\frac{|x_i|}{X} + \frac{Y}{X+Y}\cdot\frac{|y_i|}{Y}\right)^p \\ &\leqslant \sum \left[(1-\alpha)\frac{|x_i|^p}{X^p} + \alpha\frac{|y_i|^p}{Y^p}\right] \quad \text{(где смо узели } \alpha = \frac{Y}{X+Y}, \\ &\quad 1-\alpha = \frac{X}{X+Y} \text{ и користили конвексност функције } f(x) = x^p) \\ &= (1-\alpha)\frac{\sum |x_i|^p}{X^p} + \alpha\frac{\sum |y_i|^p}{Y^p} = (1-\alpha) + \alpha = 1, \end{aligned}$$

тј.

$$\left\{\sum |x_i+y_i|^p\right\}^{1/p} \leqslant X + Y.$$

4. *Нека је* $f\colon [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ *конвексна функција, а* $x_1, \ldots, x_n$ *низ позитивних бројева. Тада важи неједнакост*

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n) \leqslant f(x_1+\cdots+x_n)+(n-1)f(0).$$

(M. Petrović, Publ. Math. 1 (1932)).

За $\alpha_i = \dfrac{x_i}{s}$, $s = x_1+\cdots+x_n$, биће $x_i = (1-\alpha_i)\cdot 0 + \alpha_i \cdot s$. Примењујући основну неједнакост, имамо

$$f(x_i) \leqslant (1-\alpha_i)f(0)+\alpha_i f(s) \quad (i=1,\ldots,n),$$

па сабирајући, добијамо

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n) \leqslant (n-1)f(0)+f(s).$$

(наставиће се)

ОБАВЕШТЕЊЕ

ОСНИВАЊЕ САВЕЗА ДРУШТАВА МАТЕМАТИЧАРА ЈУГОСЛАВИЈЕ

У Београду је 27.05.1994. године одржана оснивачка скупштина Савеза друштава математичара Југославије. Донета је одлука о формирању Савеза који чине Друштво математичара Србије и Друштво математичара и физичара Црне Горе. Савез ће наставити делатности које је у области математике и рачунарства вршио Савез друштава математичара, физичара и астронома СФР Југославије.

За председника Савеза изабран је проф. др Владимир Мићић, а за генералног секретара др Слободанка Јанковић. Остали чланови Извршног одбора су проф. др Зоран Каделбург (председник Друштва математичара Србије), проф. др Радоје Шћепановић (заменик председника Друштва математичара и физичара Црне Горе), проф. др Веселин Перић (председник Комисије за научни рад), проф. др Милосав Марјановић (председник Комисије за наставу) и др Раде Дорословачки (председник Комисије за младе математичаре).

Предузети су кораци да се обнови учешће Савеза у раду Интернационалне математичке уније. У вези с тим наш представник др Веселин Перић учествовао је у раду 12. Генералне скупштине Уније, која је одржана у Луцерну 31. јула и 1. августа 1994. године.