Др Весна Јевремовић

ЗАДАЦИ ИЗ ПЛАНИМЕТРИЈЕ

У оквиру припрема за полагање пријемног испита из математике за упис на факултет које се одржавају на Грађевинском факултету у Београду, неколико часова је посвећено задацима из планиметрије. Задаци су формулисани са понуђеним одговорима, с обзиром да такву форму имају и задаци на пријемном испиту.

1. Дате су паралелне праве p, q и r, при чему је растојање правих p и q једнако 3, а растојање правих q и r једнако 7. При томе је права q између правих p и r. Нека је $ABCD$ квадрат чија су темена A, B и C редом на правим p, q и r. Страница квадрата је:

а) $\sqrt{10}$; б) 4; в) $\sqrt{21}$; г) $\sqrt{58}$.

2. Дат је једнакокраки троугао основице 2. Произвољни правоугаоник који је уписан у тај троугао тако да је једна страница правоугаоника на основици троугла, а остала два темена на крацима троугла, има константан обим. Висина која одговара основици таквог троугла једнака је:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

3. Дате су тачке P, Q, R и X. Тачка X се симетрично пресликa у односу на P у тачку A; тачка A се симетрично преслика у односу на Q у тачку B; тачка B се симетрично преслика у односу на тачку R у тачку C. Са тачком C се цео поступак понови. Тако се добија:

а) средиште дужи AB; б) тежиште троугла ABC; в) тачка X; г) средиште дужи AX.

4. Дат је једнакостранични троугао ABC странице 1. Тачка D је у равни троугла ABC. Највећа могућа вредност збира растојања тачака B и C од праве AD је:

а) 1,1; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) 2.

5. Висина једнакостраничног троугла ABC једнака је 6. Нека је D произвољна тачка дужи AB. Колико има кружница полупречника 2 које додирују праву CD и кружницу описану око троугла ABC?

а) 0; б) 4; в) 6; г) 8.

6. Колико постоји кружница које су једнако удаљене од темена датог ромба за који је оштар угао на основици једнак $60°$?

а) бесконачно много; б) 7; в) 4; г) 0.

7. Дат је једнакостранични троугао ABC странице a и око њега је описана кружница. Нека је тачка D произвољна тачка на мањем луку AB. Вредност $AD + BD - CD$ је:

а) константна; б) највећа ако је D средиште лука AB; в) најмања ако је $D = A$ или $D = B$; г) $a \operatorname{tg} \angle DAB$.

8. Каквим се подударним четвороуглима може прекрити раван:

а) само правоугаоницима; б) само ромбовима; в) паралелограмима или трапезима; г) конвексним четвороуглима произвољног облика.

9. Центар O кружнице описане око троугла ABC се пресликава симетрично страницама троугла у тачке M, N и P. У троуглу MNP права MO садржи

а) висину троугла MNP; б) тежишну линију троугла MNP; в) симетралу угла троугла MNP; г) ниједну од тих линија.

10. Тачке M, N, P и Q су центри квадрата конструисаних над страницама паралелограма $ABCD$ у његовој спољашњој области. Четвороугао $MNPQ$ је:

а) ромб; б) трапез; в) квадрат; г) правоугаоник.

11. Из тачке P ван кружнице чији је центар тачка O повучене су праве које секу кружницу. Скуп средишта при том добијених тетива је:

а) лук кружнице; б) лук елипсе; в) лук параболе; г) лук хиперболе.

12. Тачка M је у унутрашњој области разностраног троугла ABC, али није на некој од тежишних линија тог троугла. Тачка M се креће паралелно страници BC док не додирне страницу AC, затим се креће паралелно AB док не додирне BC, а онда паралелно AC док не додирне AB итд. При том кретању тачка ће кроз почетни положај проћи:

а) у петом кораку; б) у седмом кораку; в) у деветом кораку; г) никада.

13. У оштроуглом троуглу тачка O је ортоцентар. Кружнице описане око троуглова OAB, OAC и OBC имају:

а) једнаке полупречнике; б) једнаке полупречнике само ако је троугао једнакостранични; в) полупречнике који се односе као одговарајуће странице троугла; г) полупречнике који се односе као косинуси одговарајућих углова.

14. Конвексан 13-тоугао се може разрезати на паралелограме:

а) ако је правилан; б) никад; в) ако има пар паралелних страница; г) ако има два пара паралелних страница.

15. Дат је паралелограм $ABCD$ и тачка P на AD тако да је $AP = \frac{1}{4}AD$. Нека је R пресек дијагонале AC и праве BP. Ако је површина $ABCD$ једнака S, тада је површина APR једнака:

а) $S/40$; б) $S/44$; в) $S/55$; г) $S/60$.

16. Ортоцентар H троугла ABC симетрично је пресликан у односу на све странице троугла. Тако добијени троугао и дати троугао имају заједнички:

а) ортоцентар; б) центар описане кружнице; в) центар уписане кружнице; г) тежиште.

17. Тежишне линије које одговарају катетама у правоуглом троуглу су једнаке 3 и 4. Хипотенуза тог троугла је:

а) $\sqrt{20}$; б) 7; в) 5; г) ниједан од датих бројева.

18. Дат је троугао ABC и произвољне тачке $X \in BC$, $Y \in AC$ и $Z \in AB$. Средишта дужи AX, BY и CZ:

а) припадају једној правој; б) не припадају ниједној правој; в) поклапају се; г) су ближа темену које је наспрам најдуже странице троугла него осталим теменима.

19. У конвексном шестоуглу $ABCDEF$ тачке U, V, W, X, Y и Z су редом средишта страница. Троуглови UWY и VXZ имају заједничко тежиште:

а) само ако је шестоугао правилан; б) увек; в) никад; г) ако су наспрамне странице шестоугла паралелне.

20. Дат је једнакостранишни троугао ABC. Тачка P је у равни троугла и CP је паралелно AB. Кружница са центром у тачки P која додирује праву AB сече праве CA и CB редом у тачкама M и N. Угао MPN је:

а) константан и већи од $60°$; б) константан и једнак $60°$; в) константан и једнак $45°$; г) константан и мањи од $45°$.

Резултати, упутства и решења

1. *Тачан одговор је* г).

Решење. Нека је $ABCD$ квадрат који задовољава услове задатка (види слику). Нека је d права која садржи D и паралелна је датим правим. Нека је E пресек d и BC, а F пресек q и AD. Нека је s права која садржи тачку C и нормална је на дате праве и нека су U и V пресеци те праве и правих q и d. На основу подударности троуглова ABF и CDE закључујемо да је растојање правих d и r једнако растојању правих p и q. На основу подударности троуглова CBU и DVC добијамо да је $BU = CV$, па је $BC^2 = BU^2 + UC^2 = 58$.

Сл. уз задатак 1

Сл. уз задатак 2

2. *Тачан одговор је* а).

Решење. Нека је $MNPQ$ један правоугаоник уписан у дати троугао. Дужине страница тог правоугаоника су $MN = x$ и $NP = y$. По услову задатка је

$x+y = \text{const}$. Из правоуглог троугла PNB (в. слику) налазимо $y = \frac{1}{2}(c-x)\operatorname{tg}\beta$, $c = AB$. Значи да је

$$x + \frac{1}{2}(c-x)\operatorname{tg}\beta = \text{const}.$$

Одатле налазимо $\operatorname{tg}\beta = 2$, па је $CH = \dfrac{AB}{2}\operatorname{tg}\beta = 2$.

3. *Тачан одговор је* в).

Решење. Нека су D, E и F тачке које се добијају у наставку поступка. Како је композиција две централне симетрија транслација, добијамо да је (в. слику)

$$\overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{PQ}, \quad \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{RP} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{QR}.$$

Одатле је

$$\overrightarrow{XF} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{RP} + 2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{0},$$

што значи да је $F = X$.

Сл. уз задатак 3

Сл. уз задатак 5

4. *Тачан одговор је* в).

Решење. Нека су B' и C' подножја нормала из B и C на праву AD и нека је $\angle DAB = \varphi$. Тада је $\angle B'BA = 30^\circ - \varphi$. Даље је

$$BB' + CC' = \cos(30^\circ - \varphi) + \sin\varphi.$$

Екстремна вредност ове функције постиже се за $\varphi = \pi/3$ и једнака је $\sqrt{3}$. (Скицирајте слику.)

5. *Тачан одговор је* в).

Решење. Центар неке кружнице која задовољава услове задатка налази се на правој која је паралелна правој CD и на растојању 2 од ње, а такође се налази на кружници која је концентрична кружници описаној око троугла ABC, а њен полупречник је за 2 већи или за 2 мањи од полупречника кружнице описане око троугла ABC. Према датим подацима, без обзира на положај D, постоји шест кружница са наведеним својством. Видети слику.

6. *Тачан одговор је* б).

Решење. Око датог ромба се не може описати кружница, тако да одговор не може бити а). Скуп темена можемо на више начина поделити на подскупове. Издвојимо темена A, B и D и нека је k кружница описана око тог троугла. Тачке A, B и D су једнако удаљене од било које кружнице концентричне кружници k. Међу тим кружницама је и она која је једнако удаљена од сва четири темена ромба (в. слику). Следећу кружницу која задовољава услове задатка налазимо у скупу кружница које су концентричне кружници описаној око троугла ABC. Аналогно, при посматрању троуглова ACD и BCD налазимо још две кружнице. Подела на A, B и C, D, као и подела на A, D и B, C не дају ниједно ново решење. Међутим, кад темена поделимо на A, C и B, D имамо још три кружнице које задовољавају услове задатка (в. слику).

Слике уз задатак 6

7. *Тачан одговор је* а).

Решење. Нека је $M \in DC$ и $DM = BM$. Троугао BMD је једнакостранични, а троуглови BMC и BDA су подударни, па је $DB + DA - DC = 0$. Скицирајте слику.

8. *Тачан одговор је* г).

Решење. Јасно је да је могуће прекрити раван правоугаоницима, паралелограмима, трапезима, а да је могуће и произвољним подударним четвороугловима показује слика.

9. *Тачан одговор је* а).

Решење. Имамо да је, види слику, $NP \parallel YZ \parallel CB$, а како је $OM \perp CB$, закључујемо да је $OM \perp MP$.

Сл. уз задатак 8 Сл. уз задатак 9

10. *Тачан одговор је* в).

Решење. Нека је M центар квадрата над AD, N центар квадрата над AB и P центар квадрата над BC. Троуглови AMN и BPN су подударни, па је $MN = NP$. Како је $AN \perp NB$ и $\angle ANM = \angle BNP$, следи да је $MN \perp NP$. Скицирајте слику.

11. *Тачан одговор је* а).

Решење. Нека је M средиште једне тетиве. Тада је $\angle MPO = 90°$, па се тачка M налази на кружници чији је пречник PO.

12. *Тачан одговор је* б).

Решење. Пошто је $NP \parallel RS \parallel AB$, $ST \parallel PQ \parallel AC$ и $RQ \parallel MN \parallel BC$ закључујемо да су троуглови CNP, RAQ и STB подударни. Стога ће права која садржи тачку T и паралелна је BC садржати и тачке M и N (видети слику).

Сл. уз задатак 12 Сл. уз задатак 13

13. *Тачан одговор је* а).

Решење. Доказаћемо да је полупречник кружнице описане око троугла AOB једнак полупречнику кружнице описане око троугла ABC. Нека је S центар кружнице описане око троугла ABC и нека су M и N средишта AB и OB (видети слику), а P центар кружнице описане око троугла AOB. Имамо да је $\angle PSB = \gamma$, а да је $\angle SPB = \angle SPN + \angle NPB = (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) = \gamma$. Троугао PSB је једнакокраки, па је $PB = BS$. Аналогно важи за полупречнике кружница описаних око троуглова AOC и BOC.

14. *Тачан одговор је* б).

Решење. Ако би било могуће разрезати многоугао на паралелограме, за сваку страницу многоугла морала би постојати страница која јој је паралелна, што значи да би многоугао имао паран број страница.

15. *Тачан одговор је* а).

Решење. Висина тог троугла једнака је једној петини висине паралелограма. Скицирајте слику и докажите ово тврђење на основу сличности троуглова APR и CRB.

16. *Тачан одговор је* б).

Решење. Нека је D тачка симетрична тачки H у односу на BC. Како је $\angle CAD = \angle CBD$, закључујемо да се тачка D налази на кружници описаној око троугла ABC.

17. *Тачан одговор је* а).

Решење. Нека су a и b катете датог троугла. Применом Питагорине теореме на правоугле троуглове чије су хипотенузе тежишне линије датог троугла добијамо:

$$a^2/4 + b^2 = 3^2, \quad b^2/4 + a^2 = 4^2.$$

Одатле је $a^2 + b^2 = 20$.

18. *Тачан одговор је* б).

Решење. Нека су M, N и P средишта страница датог троугла. Средишта дужи AX, BY и CZ су на различитим страницама троугла MNP, па не може постојати права којој те тачке припадају.

19. *Тачан одговор је* б).

Решење. Нека је O произвољна тачка, а T тежиште троугла UWY. Тада је:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OW} + \overrightarrow{OY}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})\right) \\ &= \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}).\end{aligned}$$

Исти резултат добијамо и за $\overrightarrow{OS}$, где је S тежиште троугла VXZ, па се тачке T и S поклапају.

20. *Тачан одговор је* б).

Решење. Нека су тачке M' и N' централно симетричне тачкама M и N у односу на тачку C. Тачке M' и N' су на датој кружници, па је $\angle N'PM'$ једнак траженом углу. Како је $\angle N'NM' = 30^\circ$, то је $\angle N'PM' = 60^\circ$. Скицирајте слику.