Др Драган Трифуновић

МАТЕМАТИКА ЗА УЧИТЕЉЕ 2

У прошлом прилогу о математици у млађим разредима основне школе писали смо о римским бројевима[1]. Жеља нам је била да учитељу пружимо што више новијих чињеница које треба да оживе час математике и учине га богатијим, занимљивијим. Сада, у овом новом прилогу (други његов део ће бити објављен у наредном броју овог часописа) имамо исти циљ и жељу са операцијом *множења*.

ГРАМАТЕУСОВЕ ДИЈАГОНАЛЕ

Енглез Отред (W. Oughtred, 1574–1660), познат у историји математике по проналаску кинематичког рачунара – логаритмара (шибера), у свом делу *Кључ математике* из 1631. године (*Clavis mathematicae*) за операцију множења користи знак $\times$ и пише $a \times b$, што значи да број a треба помножити бројем b, рецимо 8×17. Ово је било и прво појављивање знака $\times$ у математичкој литератури.

У историји математике било је велико питање, како је Отред дошао до овог знака за множење? Постоје два тумачења и ми ћемо их овде изложити. Наша анализа знака за множење веома је занимљива и учитељу може послужити да од првих часова, када множење почиње да саопштава ђацима, пробуди велико интересовање и открије лепоту чина сазнавања нових истина.

ПРВО. — У скупу природних бројева $\mathbf{N}$ операција множења $(\mathbf{N}, \times)$ може се дефинисати операцијом сабирања

$$a \times b = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{b \text{ пута}}. \tag{1}$$

Релативно, ова је дефиниција сваком човеку од рана позната и некако, природна је. Утврдили смо код људи да на питање: шта значи помножити бројеве 3 и 2, увек се добија одговор да то значи „на три места по два“. Дакако да је ово уистину директна примена дефиниције (1).

Значи, међу операцијама множења и сабирања постоји узајамна веза, те није случајно да се оне у ранијој литератури називају заједничким именом *директне операције*. Да би корисник математичког писма имао *увек* на уму поменуту узрочну везу међу овим операцијама, Отред је од знака за сабирање $+$ начинио знак за множење $\times$ коришћењем принципа *полуметафоре*.[2] Наиме, он је знак за сабирање $+$ ротирао за угао од 45° и добио нов положај овог знака у облику $\times$.

[1] Д. Трифуновић, *Математика за учитеље*, Настава математике XXXVIII, 3–4, 52–60

[2] Принцип полуметафоре у семиотици математике веома је присутан. Знак за интеграл у облику „лабудовог врата“ настао је применом полуметафоре на латинско слово S у чину

Значи, знак за сабирање задржао је свој *облик*, али је добио другачији *положај*, те је тиме Отред исказао нов знак за операцију множења.

Ову чињеницу (1) код множења максимално искористити у настави. Шта то занчи? То значи да поред прописаног методичког захтева да се таблица множења осваја посредством дистрибутивног закона

$$a \times (b+1) = a \times b + a \times 1 = a \times b + a, \tag{2}$$

може да користи и „сукцесивно“ сабирање (1). Рецимо, код случаја 7×4 поред тумачења да је

$$7 \times 4 = 7 \times (3+1) = 7 \times 3 + 7 \times 1 = 7 \times 3 + 7 = 21 + 7 = 28,$$

јер се зна од раније да је $7 \times 3 = 21$ и $7 \times 1 = 7$, искористити и дефиницију (1), те је

$$7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7. \tag{3}$$

Дакако, овде не треба инсистирати на важењу асоцијативног закона у структури $(\mathbf{N}, +)$ да би се збир (3) могао одредити, јер ученик интуитивно осећа како треба одредити поменути збир.

Овим тумачењем настанка знака за операцију множења долази се до својства да је множење специјални случај сабирања. Ово је велики податак у настави математике на којем се треба посебно задржати и при томе указати на најсавременији податак. Данас савремени рачунари, чије су брзине у извршавању операција несхватљиво велике, не знају множити, већ само сабирати. На улазу у рачунар (тастатура) постоји дугме — наредба са ознаком $\times$ за множење. То је тачно и рецимо за производ 8×7 излази резултат 56. Али, при реализацији ове операције рачунар се користи дефиницијом (1), односно множење своди на „сукцесивно“ сабирање. То корисник рачунара споља не види, али је нужно да познаје шта се збива у аритметичком уређају при операцији множења.[3]

Када већ помињемо рачунар и моћ полуметафоре у математичкој семиотици да би знак изазвао асоцијацију на суштину и настанак самог знака, наведимо и случај операције дељења. На тастатурама свих рачунских машина дељење је означено знаком $\div$. Погрешно је мислити да је ова црта разломачка црта. Овај знак је полуметафором настао од знака за одузимање $-$ и знака за дељење : у чину њиховог спајања. Јер, дељење се може дефинисати операцијом одузимања, а што је битно у анализи операције. Рецимо, случај $15 : 3 = 5$, јер је број 3 пет пута узастопно одузиман, односно

$$15 : 3 = 5 \iff 15 - 3 = 12,\ 12 - 3 = 9,\ 9 - 3 = 6,\ 6 - 3 = 3,\ 3 - 3 = 0.$$

„истезања“; знак за релације „веће од“ $>$ или „мање од“ $<$ настао је применом полуметафоре на знак за релацију једнакости $=$, тако што је крај знака једнакости „притиснут“ и спојен са једне стране; знак за егзистенцијални квантификатор $\exists$ настао је „обртањем“ великог слова E за 180° итд. О полуметафори у математичком писму погледати књигу С. Маркус, *Математичка поетика*, Београд 1974.

[3] Пожељно је да учитељ, без устезања, на час донесе било који рачунар (џепни, средњи и сл) и да деца виде на тастатури знак за множење и лично ураде неке најједноставније производе. Мишљења смо да је у овом тренутку присуство рачунара битно. Не обазирати се на приговор да за децу на том узрасту није пожељан рачунар. У овој прилици рачунар служи само као визуелни доказ о постојању знака $\times$, а не да се он уведе у наставу математике.

Знак за множење $\times$ изгубио се у основној настави математике. То је велика штета из напред наведених сазнајних чињеница. Према нашим знањима, овим чином учитељу је одузето право благо из руку да развије „причу о множењу“, а дата му је тачка потпуно безначајна без корена и подстрека. Знак за множење $\times$ треба вратити учитељима који ће га веома добро искористити у настави таблице множења и др.

Колико је познато, данас је знак $\times$ у математичком писму задржан само код векторског производа $\vec{a} \times \vec{b}$, производа два скупа $A \times B$ и обележавању формата матрице $n \times m$.

ДРУГО. — Тумачење настанка знака за множење $\times$ у директној је вези са схемом, алгоритмом за извршавање ове операције. Како је у прво време када је позициони декадни запис броја овладао нашом цивилизацијом било веома тешко обављати операцију множења, Граматеус (Gramateus) је 1518. године увео схематизован поступак за множење. Наиме, ако треба два природна броја a, b (a, $b < 10$) помножити, тада поступити по схеми

$$\begin{array}{ll} a & 10-a \\ b & 10-b \end{array}$$

Разлике по дијагоналама су једнаке, односно

$$a-(10-b)=b-(10-a),$$

а то је цифра десетног места $a+b-10$. Цифра места јединица добија се множењем комплемената, тј. $(10-a)(10-b)$. Значи,

$$a \times b = 10(a+b-10)+(10-a)(10-b).$$

Покажимо ово Граматеусово правило на примерима 7×8, 6×9, 6×7 и 9×8. Имамо да је

$$\begin{array}{cc} 7 & 3 \\ 8 & 2 \\ \hline 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 6 & 4 \\ 9 & 1 \\ \hline 5 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 6 & 4 \\ 7 & 3 \\ \hline 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 9 & 1 \\ 8 & 2 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

Ове дијагонале у Граматеусовом поступку које су повезале чиниоце са њиховим комплементима, директно су утицале да операција множење добије знак $\times$. У ово верују многи историчари математике, па и писац ових редова. Свакако да су оба тумачења, и Отредово и Граматеусово, прихватљива за историју математике и веома корисна за наставу математике.

Математичке књиге 16. и 17. века биле су видно оптерећене Граматеусовим схемама, те на предлог знаменитог Лајбница (Gottfried Leibniz, 1646–1716) 1693. године уведен је за множење знак $\cdot$ (тачка), рецимо $17 \cdot 13$ или $7 \cdot 8$.[4] Од Лајбница почиње и време када се за множење два броја a, b не користи никакав знак и пише само ab, што је до данас задржано. Једино, ако се у терму поред симболичких

[4]Корисно је овде указати на словенско порекло великог Лајбница. Наиме, он је био по народности Лужички Србин и када је то хтео да истакне у своје презиме уносио је слово t (Leibnitz). Његово право име је Богомир Лајбнић.

слова налазе и нумеричке вредности, тада се користи знак за множење. Рецимо, $26 \cdot 32ab$ или $a^2b/16 \cdot 7c$.

И за веће бројеве Граматеусове дијагонале важе, при чему се мења база комплемента. На пример, треба помножити $98 \times 75 = 7350$ или $64 \times 82 = 5248$. Имамо следеће

$$\begin{array}{cc} 98 & 2 \\ 75 & 25 \\ \hline 73 & 50 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 64 & 36 \\ 82 & 18 \\ \hline 52 & 48 \end{array}$$

Као што смо поменули, човеку је у његовом развоју било веома тешко множити, а камоли делити. Из ових разлога, развило се више различитих поступака који су олакшавали рад на овој операцији, као што је књиговодствено множење, скраћено множење и др. Ове поступке није потребно уносити у наставу математике, јер се показало да они оптерећују ученика, а не воде ничему.

Поред поменутог Граматеусовог поступка (4) у историји математике забележена су још два начина множења из 17. и 18. века који гласе

$$a \times b = 10a - a(10a - b); \quad 7 \times 8 = 10 \cdot 7 - 7(10 - 8) = 70 - 14 = 56 \tag{5}$$

$$a \times b = (10 - a)(10 - b) + 10(a + b) - 100; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} 7 \times 8 &= (10 - 7)(10 - 8) + 10(7 + 8) - 100 = 3 \cdot 2 + 10 \cdot 15 - 100 \\ &= 6 + 150 - 100 = 6 + 50 = 56 \end{aligned}$$

Било би можда корисно да учитељ сам обради један од ова два случаја и тако добије нов алат при множењу бројева.

Сл. 1. Присуство Граматеусовог поступка у множењу бројева у *Аритметици* Василија Дамјановића из 1767. године

У нашим математичким књигама 18. и 19. века налази се Граматеусова схема. У фототипији (сл. 1) овде доносимо два фрагмента о множењу из Дамјановићеве аритметике из 1767. године, где се лепо уочава коришћење Граматеусових дијагонала.[5]

За потребе бројања, обављања рачунских операција и мерења, човек се користио својим телом. У елементарном рачуну користио је своје прсте.[6] Нисмо успели да проверимо, али верујемо да је Граматеус до свог поступка за множење (4) дошао преко прстију. Наиме, време све до позне ренесансе карактерише доба када је човек множио уз помоћ својих прстију (народна рачуница)[7] или абаком (рачунаљка) у рукама властеле, двора и скупина ондашњих интелектуалаца. У историји математике овај се поступак назива *инструменталним*. Овако добијен резултат на прстима или абаку записивао се. Значи, веома ретко се множило у писаном облику.

На слици 2 смо илустровали пример множења 8×7 уз помоћ прстију, где се јасно уочава Граматеусова схема. Покушати сам наместити прсте за следеће производе 9×9, 6×8 и 7×9.

Да заокружимо излагање о знаку за множење. Како је површина правоугаоника одређена производом два броја, то се у ранијим књигама – инкунабулама и рукописним књигама слика правоугаоника користила као знак за множење. На пример, производ 17×32 писао се као $17 \,\square\, 32$. У 7. веку у Индији (време Брахмагупте) користила се скраћеница од речи *произведено* (= бхавита), па се писало 6 8 бха 48, што значи $6 \times 8 = 48$. У првој математичкој књизи Мухамеда Мусе ал-Хваризмија (780–850) написаној на основама декадног бројевног записа, није коришћена математичка симболика.

Немачки математичар Михаел Штифел (Michael Stifel, 1486– 1567) за знак операције множења уводи слово M и пише $a\,M\,b$, нпр. $3\,M\,4 = 12$. Ово је урадио

---

[5] Василије Дамјановић, *Новаја сербскаја аритметика*, Венеција 1767. — Очигледно да је код производа 8×6 начињена штампарска грешка. Штампање ове прве српске аритметике у Теодосијевој штампарији у Венецији спровео је Захарије Орфелин, а што је утврдио академик Мирослав Пантић. На основу овога, мишљења смо да су у овој књизи Граматеусове дијагонале Орфелинови графички цртежи.

[6] Човек је од искона осетио да му сопствено тело може помоћи у мерењу и бројању. На свом телу налазио је и мерне јединице и бројевне системе. Из ових побуда, рецимо, наш математичар и на гласу архитекта Емилијан Јосимовић (1823–1897) проглашава својим „вјерују“ исказ „БРОЈ И МЕРА, ТО ЈЕ МОЈА ВЕРА“ и тога се придржава у животу. Није случајно што старе мере имају називе: *стопа, корак, хват, лакат, педаљ, палац* и др; или што је важећи бројевни систем декадни, јер човек има десет прстију, или што се Французи у бројању користе и прстима ногу, па за 90 изговарају $4 \times 20 + 10$, тј. quatre vent dix, или што се цифре у енглеском језику називају digits, што је настало од латинске речи digitus што значи прст. Као што смо писали, римско пет је знак испружене шаке са отвореним палцем, а десет две такве спрегнуте шаке. Помоћу прстију одређује се број дана у месецу, положај Месеца на небеском своду, даљина објета у природи и друго.

Наш је Вук био упознат са антрополошким основама мера и бројева те саветује да се својим телом користимо за рачун и мерење. Помоћу прстију се броји, сабира. Прсти су довели до епохалног проналаска нуле, што је равно проналаску ватре и точка. Помоћу прстију се памти таблица множења и др.

[7] Писац ових редова припремио је студију о народној рачуници код Срба која садржи многе истражене појединости из етноматематике на нашим просторима. Добијена сазнања упоређивана су са сличним са подручја Русије, Француске и Пољске.

Сл. 2. Граматеусов поступак у множењу бројева налази се међу прстима човекових руку; илустрован је пример 8×7 (скица: Владимир Трифуновић, студент)

у својој аритметици средином 16. века, тачније у делу M. Stifel, *Arithmetica integra*, Norimbergae 1544. Методолошки указано, Штифел је за симбол множења искористио *прво слово* глагола Multiplicare (множити). Овај Штифелов поступак знали су стари Александријци. Тако, нпр. Диофант ($\Delta\iota o\varphi\alpha\nu\tau o\varsigma$, 3. век) је за квадрат једног броја употребљавао знак Δ као *прво слово* речи $\Delta\grave{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ (сила, како су стари Грци звали квадрат).

У математичким књигама за народ и основне школе ранијих времена знак за множења и опште, математичка симболика није постојала. Користиле су се речи на месту знака. Рецимо, 7 пута 8 чини 56. Ово налазимо у књигама Западне Европе, а такође код Руса и код нас.

Приметимо да у математичким делима старе Грчке, Византије, Италије није коришћен знак за множење и друге операције.

У наш језик глагол за операцију $a \times b$ *множити* увео је Вук Караџић. Било је овако. Занимљива је била реч *млого* у смислу „*млоге* су ријечи … “ или „Ко у један пут *млого* иште, с празном се торбом кући врати“.[8] Од ове речи образован је облик за операцију множења. Тако у Вуковом *Рјечнику* из 1818. године имамо за *млого* значење више (multo) са следећим изведеним речима: *мложење, мложина, мложити.* Међутим, у новом *Рјечнику* из 1852. године Вук ово исправља и доводи на данашњи облик: *множење, множина, множити.*

Дуго је у нашој математичкој литератури 18. и 19. века за операцију „множити“ коришћена страна реч „мултиплицирати“, а ређе облик „мложити“ (нпр. радови Манојла Јанковића (1758–1791), Атанасија Стојковића (1773–1832) и др). Постоје слични математички термини страног порекла који су остали до средине нашег века у употреби. Рецимо, професор Богдан Гавриловић (1864–1947) у својим расправама и књигама *никада* се није користио речју *једначина*, већ еквација и др.

[8] Вук Ст. Караџић, *Први Српски Буквар*, Беч 1827.