Др Јудита Цофман

ЧАС ПОНАВЉАЊА У ЈЕДНОЈ ШКОЛИ У ЕНГЛЕСКОЈ СА ЈЕДАНАЕСТОГОДИШЊИМ УЧЕНИЦИМА

Пре неколико година предавала сам математику једанаестогодишњим ђацима у једној школи у Великој Британији. Био је крај школске године и сви смо се осећали уморни. Да бих раздрмала разред, предложила сам следећу „игру са математичким асоцијацијама“:

Игра почиње тако што ја пишем на табли кратку реченицу са неком математичком садржином. Играчи треба да смисле следећу „математичку реченицу“, чија се садржина надовезује на садржину претходне реченице. Реченицу најхитријег играча написаћемо на табли, испод прве реченице. После тога ће ученици формулисати трећу реченицу, везану за садржину претходне реченице, па четврту реченицу, са асоцијацијама са трећом реченицом, и тако даље. Циљ игре је да се на овај начин обухвати што више градива.

За почетак одабрала сам, као математички исказ, једначину

$$x + y = 10.$$

Прве реченице ученика, подстакнуте горњом изјавом, биле су облика $8 + 2 = 10$, $3 + 7 = 10$, $0.2 + 9.8 = 10$, $2\frac{1}{4} + 7\frac{3}{4} = 10$, $-3 + 13 = 10$, $10 + 0 = 10$ и томе слично. После тога један од ученика се досетио:

„x и y се могу схватити као координате једне тачке у правоуглом координатном систему“.

Нацртали смо на табли координатни систем, са неколико тачака (x, y), чије су координате задовољавале једначину $x + y = 10$, сл. 1. Инспирисане сликом, следиле су реченице:

„Тачке, чије координате x и y задовољавају услов $x + y = 10$ леже на заједничкој правој.“

„Слика 1 приказује правоугаонике, чије је једно теме координатни почетак, друго теме је на x-оси, треће на правој са једначином $x + y = 10$, а четврто на y-оси.“

Сл. 1

Затим су стизале констатације:

„Сваки од горе разматраних правоугаоника има обим једнак 20 дужинских јединица.“

„Обими ових правоугаоника су исти, али су им површине различите.“

Ученици су прешли на израчунавање површина правоугаоника са обимом 20, у низу специјалних случајева. Након тога неколико ученика је изјавило:

„Од свих правоугаоника обима 20, квадрат има највећу површину.“

Тиме се указала згодна прилика да се ученицима истакне потреба за *доказом* неких математичких истина. Постоји бесконачно много правоугаоника са обимом 20; није могуће израчунати површину сваког од њих. Садржај последње реченице треба потврдити (или оповргнути) у општем случају.

Неко време смо ћутали и размишљали, а онда су Сари очи заблистале и узвикнула је: „Ја сам уверена да исказ важи, јер ја то видим!“ На мој зачуђени поглед Сара је показала ова два цртежа (слика 2 (а) и (б)).

(а) (б)

Сл. 2

На слици 2(а) је представљен квадрат $OPRS$, уписан у троуглу MNO са теменима $M(0,10)$, $N(10,0)$ и $O(0,0)$. Сара је извршила рефлексију троуглова A и B, користећи као осу рефлексије праву SR, односно RP. Пошто су површине троуглова A и B једнаке површинама њихових рефлектованих слика A', односно B', Сара је утврдила да је:

(1) Површина квадрата $OPRS$ једнака половини површине троугла MNO.

Слика 2(б) приказује произвољни правоугаоник $OTUV$, уписан у троуглу MNO, различит од квадрата $OPRS$. Рефлексијом у односу на праву VU, односно UT, троуглови A и B се трансформишу у троуглове A' и B'. Овог пута B' „извирује“ из троугла OMN. Сара је дошла до закључка да је површина правоугаоника $OTUV$ мања од збира површина троуглова A' и B', дакле и од збира површина троуглова A и B. Пошто површине правоугаоника $OTUV$ и троуглова A и B заједнички чине површину троугла MNO, следило је:

(2) Површина правоугаоника $OTUV$ је мања од половине површине троугла MNO.

Из (1) и (2) произлази доказ ове истине:

„*Од свих правоугаоника, уписаних у троугао MNO (другим речима, од свих правоугаоника обима 20), квадрат има највећу површину.*“

Сарине слике су нас одушевиле својом очигледношћу. У то се час завршио. Имала сам утисак да смо од ове математичке игре сви профитирали — ђаци исто тако као и ја: Поновили смо низ детаља из пређеног градива, утврђивали смо везе између тема из разних области, изненада смо се сукобили са специјалним случајем изопериметријског проблема[1] и, на крају, наишли смо на један изванредно леп математички доказ.

Математички Институт
Универзитета у Ерлангену

[1] Изопериметријски проблеми се односе на налажење оне геометријске фигуре у скупу датих геометријских дводимензионалних фигура истог обима, чија је површина највећа.