Др Драгослав Љубић

ВЕКТОРИ У $\mathbf{E}^3$ БЕЗ АКСИОМА ПОДУДАРНОСТИ

Аксиоматска теорија заснована на аксиомама 3-димензионог еуклидског простора $\mathbf{E}^3$ без аксиома подударности није ништа друго до аксиоматска теорија афиног простора $\mathbf{R}^3_{af}$. Циљ овог чланка је да докаже (прецизније, скицира доказ) ово тврђење језиком еуклидске геометрије. Иако је дотично тврђење опште позната чињеница, коју многи писци уџбеника цитирају, аутору овог текста није познато ни једно место где је оно и доказано изван оквира пројективне геометрије. Циљ ћемо постићи тако што ћемо у простору $\mathbf{E}^3$ дефинисати векторе не користећи аксиоме подударности[1] и показати да овако дефинисани вектори образују 3-димензиони векторски простор над пољем реалних бројева $\mathbf{R}$. Тиме бисмо извршили пола задатка. Други део задатка, проверу еуклидских аксиома на тачкама, правама и равнима афиног простора $\mathbf{R}^3_{af}$, веома је једноставно спровести, па ћемо то у овом чланку изоставити.

Вектори, сабирање вектора

Наш амбијентни простор, зваћемо га *е-афини простор* и означавати са $\mathcal{E}^3$, јесте аксиоматска теорија заснована на аксиомама инциденције, поретка и паралелности еуклидског 3-димензионог простора $\mathbf{E}^3$ (Аксиоме I1–I7, II1–6, IV1–2, V1 [2]). Унутар овог простора ћемо изградити модел 3-димензионог афиног простора над пољем реалних бројева $\mathbf{R}$. Афину структуру дефинишемо у три корака. Најпре дефинишемо појам вектора, потом дефинишемо сабирање вектора и најзад множење вектора и скалара. У најгрубљим цртама ћемо скицирати овај поступак остављајући заинтересованом читаоцу да се са детаљима упозна из рада [1].

Векторе дефинишемо слично као у $\mathbf{E}^3$ — као класе еквиваленције неке релације на скупу уређених парова тачака. Овог пута, међутим, тражимо да парови (A,B) и (C,D) представљају исти вектор ако су то парови одговарајућих темена паралелограма. За колинеарне парове тачака (A,B) и (C,D) потребан нам је „посреднички“ пар тачака (E,F) ван праве AB. Да би овако дефинисана релација била релација еквиваленције, потребна је теорема 1. Теорему 1 ћемо доказати да бисмо истакли потребу за тродимензионим простором[2]. Нећемо, међутим, показивати како ова теорема за последицу даје транзитивност горепоменуте релације. (Доказ је једноставна последица теореме 1 и састоји се из разматрања више случајева.)

[1] Вектори се у $\mathbf{E}^3$ обично дефинишу као класе еквиваленције релације бити подударан, паралелан и истосмеран на скупу оријентисаних дужи.

[2] Употребом само раванских аксиома се теорема 1 не може доказати. Види напомену на крају чланка.

Дефиниција 1. Парови (A, B) и (C, D), $A \neq B$, $C \neq D$, тачака простора $\mathcal{E}^3$ су у релацији ρ ако је $ABDC$ паралелограм, или ако су тачке A, B, C, D колинеарне а $ABFE$ и $CDFE$ су паралелограми за неке тачке E, $F \in \mathcal{E}^3$. У релацији ρ су и сви парови (A, A) истих тачака простора $\mathcal{E}^3$.

Теорема 1. *Ако су у простору $\mathcal{E}^3$ $ABDC$ и $CDFE$ паралелограми, и ако су тачке A, B, E, F неколинеарне, тада је и $ABFE$ паралелограм.*

Доказ. Приметимо најпре да $AB \parallel CD$ и $CD \parallel EF$ повлачи $AB \parallel EF$, тако да треба само показати $AE \parallel BF$.

Нека су равни паралелограма $ABDC$ и $CDFE$ разне. Тада су због $AC \parallel BD$ и $CE \parallel DF$ равни ACE и BDF разне паралелне равни. Праве AB и EF су разне паралелне праве и образују раван α коју дисјунктне равни ACE и BDF секу по паралелним правама AE и BF.

Нека су сада паралелограми $ABDC$ и $CDFE$ у истој равни α и нека су G и H тачке ван равни α такве да је $ABHG$ паралелограм. Тада, на основу претходно доказаног, редом закључујемо да су паралелограми и $CDHG$, $EFHG$, $ABFE$. ■

Теорема 2. *Релација ρ је релација еквиваленције.*

Дефиниција 2. Класе еквиваленције релације ρ зовемо векторима. Вектор пара тачака (A, B) означићемо са $\overrightarrow{AB}$, или малим словом латинице уколико није потребно истаћи представника класе еквиваленције. Скуп свих вектора простора $\mathcal{E}^3$ ћемо означити са V^3.

Правац, колинеарност, и *копланарност вектора* дефинишемо на уобичајен начин.

За сваку тачку $A \in \mathcal{E}^3$ и сваки вектор $v \in V^3$ постоји јединствена тачка $B \in \mathcal{E}^3$ таква да је $\overrightarrow{AB} = v$. Ова особина ће нам послужити да дефинишемо сабирање вектора.

Дефиниција 3. Нека је A фиксна тачка простора $\mathcal{E}^3$. Збир вектора u и v је вектор w, такав да је $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$ и $w = \overrightarrow{AC}$ за неке тачке $B, C \in \mathcal{E}^3$.

Дефиниција је коректна уколико вектор $u + v$ не зависи од „посредничке“ тачке A. То ћемо установити наредном теоремом.

Теорема 3. *Ако је $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{E}^3$ и $u, v \in V^3$, и ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE} = u$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF} = v$, тада је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$.*

Доказ. Ако се неке две од тачака A, B, C поклапају, тврђење једноставно доказујемо. Претпоставимо, стога, да су A, B, C разне тачке. Рећи ћемо да је тачка X у специјалном положају у односу на тројку разних тачака (U, Y, Z), уколико није на правама UY, UZ, нити је на правој кроз U паралелној са правом YZ.

Ако тачка D није у специјалном положају у односу на тројку (A, B, C), тада је ова теорема последица теореме 1, јер су тада $ADEB$ и $BEFC$ паралелограми, па је то и $ADFC$.

Ако је, пак, тачка D у специјалном положају у односу на тројку (A, B, C), тада теорему доказујемо помоћу „посредничке“ тројке тачака (D', E', F'), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'E'} = u$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{E'F'} = v$, такве да тачка D' није у специјалном положају ни према једној од тројки тачака (A, B, C), (D, E, F). ∎

По дефиницији 1 сви вектори $\overrightarrow{AA}$, $A \in \mathcal{E}^3$, су међусобно једнаки, а по дефиницији 3 вектор $\overrightarrow{AA}$ је неутрал за сабирање. Означићемо овај вектор са o. Асоцијативност сабирања је непосредна последица дефиниције 3, а $-\overrightarrow{AB}$ је вектор $\overrightarrow{BA}$. Комутативност се може доказати применом асоцијативности!

Теорема 4. *Ако је $u, v \in V^3$, тада је $u + v = v + u$.*

Доказ. Ако су u и v неколинеарни вектори, тада је за $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$ и четврто теме D паралелограма $ABCD$ испуњено $u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = v + u$.

Ако су u и v колинеарни вектори, тада их разложимо на сабирке $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, од којих никоја два нису колинеарна, па је на основу претходно доказаног $u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + u_1 + u_2 = v + u$. ∎

Последица 1. *Ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, тада је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Доказ. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$. ∎

Талесова теорема, множење вектора и рационалних бројева

Индуктивно ћемо дефинисати множење вектора целим бројем: $0 \cdot \overrightarrow{AB} = o$, $n \cdot \overrightarrow{AB} = (n-1) \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$, и најзад $(-n) \cdot \overrightarrow{AB} = -(n \cdot \overrightarrow{AB})$, $n \in \mathbf{N}$. На основу асоцијативности сабирања и дефиниције се лако показује да је за $m, n \in \mathbf{Z}$ и $\overrightarrow{AB} \in V^3$:

$$(m+n) \cdot \overrightarrow{AB} = m \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{AB}, \tag{1}$$

$$(mn) \cdot \overrightarrow{AB} = m \cdot (n \cdot \overrightarrow{AB}) \quad \text{и} \tag{2}$$

$$1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}. \tag{3}$$

Кључ доказа Талесове теореме је теорема о средњој линији троугла.

Теорема 5. **(Теорема о средњој линији троугла)** *Ако је $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{B_1B_2}$, тада је $\overrightarrow{A_2B_2} = 2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$.*

Доказ. Нека је C тачка за коју је $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$. Тада је на основу последице 1 $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2C}$. Из истог разлога је и $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{B_1B_2}$, одакле је поново на основу последице 1 $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB_2}$. Дакле, $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_2C} + \overrightarrow{CB_2} = 2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. ∎

Последица 2. *Ако је $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $A_1 \neq O$, и ако су B_1 и B_2 тачке неке праве b која садржи тачку O и различита је од праве OA_1, тада је $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{B_1B_2}$ ако и само ако је $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, ако и само ако је $\overrightarrow{A_2B_2} = 2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$.*

Теорема 6. *Нека су A_1, A_2, A_3, A_4 тачке неке праве a и B_1, B_2, B_3, B_4 тачке пресека паралелних правих кроз A_1, A_2, A_3, A_4 и неке праве b. Ако је $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_3A_4}$, тада је $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_3B_4}$.*

Доказ. Нека су C и D тачке за које је $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_3D} = \overrightarrow{A_3A_4}$. Тада је $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B_3D}$, па је на основу последице 1 $\overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{CD}$. Ако је $C = D$, тада је $B_1 = B_3$ и $B_2 = B_4$, па је у овом случају теорема доказана. Претпоставимо стога $C \neq D$.

Тачке C и D су на паралелама кроз A_2 и A_4 које секу праву b у тачкама B_2 и B_4, па како је и $CD \parallel B_2B_4$, то је $\overrightarrow{B_2B_4} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B_1B_3}$. Најзад, $\overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{B_2B_4}$ и последица 1 дају $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_3B_4}$. ∎

Последица 3. *Нека паралелне праве* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *секу праве* a *и* b *у тачкама* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *и* $B_0, B_1, \ldots B_n$. *Ако је* $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \cdots = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, *тада је* $\overrightarrow{B_0B_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \cdots = \overrightarrow{B_{n-1}B_n}$. *Ако је уз то* $A_0 = B_0$, *тада је* $\overrightarrow{A_nB_n} = n \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$.

Доказ. Први део тврђења је последица теореме 6. Други део тврђења доказујемо индукцијом, с тим да је први корак индукције дат теоремом 5. Нека је $A_0 = B_0 = O$ и нека је C тачка за коју је $\overrightarrow{A_nC} = \overrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}}$. Тада је на основу индукцијске претпоставке $\overrightarrow{A_nC} = (n-1) \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$, а на основу последице 1 $\overrightarrow{B_{n-1}C} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{OA_1}$. Стога је $\overrightarrow{CB_n} = \overrightarrow{CB_{n-1}} + \overrightarrow{B_{n-1}B_n} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$, па је $\overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{A_nC} + \overrightarrow{CB_n} = n \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. ■

Последица 4. *Нека разне копланарне праве* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *секу праве* a *и* b *у тачкама* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *и* $B_0, B_1, \ldots B_n$. *Ако је* $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \cdots = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, $\overrightarrow{B_0B_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \cdots = \overrightarrow{B_{n-1}B_n}$, *и ако је* $c_1 \parallel c_0$, *тада је права* c_1 *паралелна и осталим правама* $c_2, \ldots, c_n$. *Ако је уз исте претпоставке и* $A_0 = B_0$, *тада је* $\overrightarrow{A_nB_n} = n \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$.

Напомена. Приметимо да ако је $A_0 = B_0$, у последици 4 можемо избацити праву c_0 и претпоставку $c_0 \parallel c_1$.

На основу последице 4, за неколинеарне векторе $u = \overrightarrow{A_1O}$, $v = \overrightarrow{OB_1}$ и цео број n важи

$$n \cdot (u + v) = n \cdot u + n \cdot v, \tag{4}$$

а читаоцу остављамо да докаже да (4) важи и за колинеарне векторе.

Множење вектора рационалним бројевима. Сада можемо да дефинишемо векторе $\frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ и $\frac{m}{n}\cdot AB$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, као и да докажемо да множење вектора рационалним бројевима има очекиване особине.

На основу теореме 6, за дати природан број n и дати вектор $\overrightarrow{OA_n}\neq o$, постоји вектор $\overrightarrow{OA_1}$ такав да је $\overrightarrow{OA_n}=n\cdot\overrightarrow{OA_1}$. Заиста, ако на произвољној правој $b\neq OA_n$ кроз тачку O одредимо тачке $B_1,B_2,\dots,B_n$, такве да је $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{B_1B_2}=\cdots=\overrightarrow{B_{n-1}B_n}$, тада се тачка A_1 добија у пресеку праве OA_n и праве која садржи тачку B_1 и паралелна је правој A_nB_n. С друге стране, ако је $n\cdot\overrightarrow{OA_1'}=\overrightarrow{OA_n}$ за неку тачку A_1', тада је $A_1'B_1\parallel A_nB_n$ на основу последице 4, па је $A_1'=A_1$, односно „n-ти део вектора“ $\overrightarrow{OA_n}$ је једнозначно одређен. Ово нам омогућује да дефинишемо вектор $\frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{AB}$, а тиме и вектор $\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{AB}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$.

Дефиниција 4. Вектор $\frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{AB}$, $n\in\mathbf{N}$, је вектор $\overrightarrow{CD}$, такав да је $n\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$. Вектор $\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{AB}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, је вектор $m\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$.

Најпре установљујемо да вреди

$$\frac{m\cdot p}{n\cdot p}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{AB},\quad n,p\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{Z}$$

тј. да смо претходном дефиницијом дефинисали множење вектора и рационалног броја (независно од записа рационалног броја као количника целог и природног броја). Потом доказујемо једнакост

$$m\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{n}\cdot(m\cdot\overrightarrow{AB}),\quad m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N}. \tag{5}$$

Особина (2) вреди за $m=\frac{1}{m'}, n=\frac{1}{n'}$, $m',n'\in\mathbf{N}$, а на основу релације (5) вреди и за произвољне рационалне бројеве m,n.

Особина (1) за целе бројеве доказује особину (1) за рационалне бројеве.

Особина (4) вреди за целе бројеве, а за рационалне бројеве облика $n=\frac{1}{n'}$, $n'\in\mathbf{N}$ следи из последице 4. Најзад, на основу дефиниције 4, особина (4) вреди за произвољан рационалан број n.

Како особине (1)–(4) вреде за произвољне рационалне бројеве m,n и произвољне векторе u,v, то је V^3 векторски простор над $\mathbf{Q}$.

За два колинеарна вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}\neq o$ дефинишемо количник $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=k$, уколико је $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$, $k\in\mathbf{Q}$.

Теорема 7. (Талесова теорема) *Ако разне копланарне праве a,b,c, $b\parallel a$, секу разне праве p и p' редом у тачкама A,B,C и A',B',C' и ако је за неки рационалан број k, $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}=k$, тада је $b\parallel c$ ако и само ако је $\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}=k$. Ако је $A=A'$, тада је, уз било коју од ове две еквивалентне претпоставке, $\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{CC'}}=k$.*

Доказ. Нека је $k = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $m' = |m|$ и нека су $A_1, A_2, \dots, A_{m'-1}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ тачке за које је $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \dots = \overrightarrow{A_{m'-1}B}$ и $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{C_1C_2} = \dots = \overrightarrow{C_{n-1}C}$. Сада тврђење следи на основу последице 3. ∎

Подударност. Подударност дефинишемо на скупу уређених парова тачака правих истог правца.

Дефиниција 5. Парови тачака (A, B) и (C, D) су подударни ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, или $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Подударност парова тачака је релација еквиваленције јер је то и релација ρ. На основу саме дефиниције је пар тачака (A, B) подударан пару тачака (B, A), па је то у ствари релација на скупу неуређених парова тачака (правих истог правца). Линеарне аксиоме подударности простора $\mathbf{E}^3$ (оне које се односе на подударност парова тачака исте праве) су једноставне последице одговарајућих својстава вектора.

Непрекидност, множење вектора и реалних бројева.

Непрекидност у $\mathcal{E}^3$ уводимо као у [2] аксиомама IV 1 (Архимедова аксиома) и IV 2 (Канторова аксиома). (Дефиниција 5 омогућује да прихватимо формулацију аксиоме IV 1 из [2].)

Аксиоме IV 1 и 2 омогућују да се, као у свим стандардним књигама основа геометрије, на правој (а тиме и на правама истог правца) уведе *мерење дужи*. Ово мерење се слаже са претходно уведеним множењем вектора и рационалних бројева, тј. ако је $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, $k \in \mathbf{Q}$, тада је $AB = |k| \cdot CD$. (Као што је уобичајено, меру дужи означавамо исто као и саму дуж.)

За сваку дуж AB, $A \neq B$, сваки позитиван реалан број k, и сваку тачку C, на правој $p \parallel AB$, $C \in p$, постоје тачно две тачке D_1, D_2 такве да је $CD_1 = CD_2 = k \cdot AB$. Ово својство нам даје дефиницију производа реалног броја и вектора. Наиме, $k \cdot \overrightarrow{AB}$ је онај од вектора $\overrightarrow{CD}_1$, $\overrightarrow{CD}_2$ који је истог смера као вектор $\overrightarrow{AB}$, а $(-k) \cdot \overrightarrow{AB}$ је онај други. И ова операција се слаже са претходно дефинисаном операцијом множења вектора и рационалног броја, тј. операцију множења вектора и рационалног броја смо проширили на операцију множења вектора и реалног броја. Особине (1)–(3) за множење вектора и реалног броја следе директно из особина мерења дужи, а особина (4), односно Талесова теорема, се једноставно доказује применом Талесове теореме за рационалне бројеве и аксиома непрекидности.

Како особине (1)–(4) вреде за произвољне реалне бројеве m, n и произвољне векторе u, v, то је V^3 векторски простор над $\mathbf{R}$. Тиме је постигнут циљ који смо себи поставили на почетку овог поглавља, тј. показано је да је аксиоматска теорија заснована на аксиомама 3-димензионог еуклидског простора $\mathbf{E}^3$ без аксиома подударности ништа друго до аксиоматска теорија афиног простора $\mathbf{R}^3_{af}$.

Напомена. Раванске аксиоме еуклидске геометрије нису (без аксиома подударности) довољне за дефиницију вектора! Ако у $\mathbf{R}^2$ „прогласимо“ да за $k > 0$ праве имају једначине

$$y = \begin{cases} k(x-a), & \text{за } x \geq a, \\ 2k(x-a), & \text{за } x < a, \end{cases}$$

а оставимо једначине правама $x = c$, $y = c$ и $y = k(x-a)$, $k < 0$, добијамо модел *е-афине равни* (види [3, стр. 22]). У овом моделу, међутим, за тачке $A = (-1, 0)$, $B = (-1, -1)$, $C = (1, 0)$, $D = (1, -1)$, $E = (0, 2)$ и $F = (0, 1)$ не вреди теорема 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Вељковић: *Вектори без аксиома подударности*, Магистарски рад, Математички факултет у Београду, 1994.
[2] Д. Лопандић: *Геометрија*, Научна књига, Београд 1980.
[3] Д. Палман: *Пројективна геометрија*, Школска књига, Загреб 1984.