НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

Др Милосав Марјановић, др Владимир Мићић

МНОЖЕЊЕ У СКУПУ $\mathbf{Q}_0^+$

1. Овај чланак продужује излагање из два претходна чланка: В. Мићић, Љ. Вуковић, Настава математике XXXVIII, 1 и В. Мићић, Настава математике XXXVIII, 2, а биће такође посвећен интуитивном поимању ненегативних рационалних бројева. Настојаћемо, пре свега, да дамо интуитивну основу операцијама множења и дељења у $\mathbf{Q}_0^+$, подстичући формирање схема које доприносе спознавању појмова. Изрази као „раздељивање величине“, „однос величина“ и сл. користе се у циљу описивања тих схема у конкретним ситуацијама, чијим апстраховањем се везујемо за те схеме. Ово истиче значај тих израза — иако они нису математички, тј. формални термини.

Кад видимо на m места по n елемената и желимо да утврдимо број тих елемената, ми реагујемо множећи и пишемо $m \cdot n$. Изражавајући ову интуитивну ситуацију у терминима скупова, $m \cdot n$ је број елемената скупа који је унија m дисјунктних скупова од којих сваки има по n елемената.

Изгледа нам најприродније ову исту ситуацију везати за интуитивно осмишљање множења у скупу $\mathbf{Q}_0^+$.

Сл. 1

2. На ситуацију приказану на слици 1, реагујући сабирањем, писали бисмо $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$, што, продужујући правило записивања збира једнаких сабирака у $\mathbf{N}$, можемо означити и са $3 \cdot \frac{2}{5}$, тј. писати

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{2}{5}.$$

С друге стране, на слици видимо на три места по $\frac{2}{5}$, па укупну количину означавамо са $3 \cdot \frac{2}{5}$. Укупан број петина је $3 \cdot 2$, због тога ту количину можемо изразити разломком $\frac{3 \cdot 2}{5}$. Пошто исто значење повлачи изједначавање ознака, имамо „једнакост“

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5}.$$

Пример. Одељење од 25 ученика је на излету. У пакет-ужини сваки од њих има по $\frac{2}{5}$ табле чоколаде. Колико је табли чоколаде раздељено ученицима?

Сваки од 25 ученика има по $\frac{2}{5}$ табле, па је то укупно $25 \cdot \frac{2}{5}$ табли чоколаде. Број петина је $25 \cdot 2 = 50$, што значи да је укупно раздељено $\frac{50}{5} = 10$ табли.

Оваквим примерима индукујемо правило множења природног броја и разломка у виду

$$k \cdot \frac{m}{n} = \frac{k \cdot m}{n}.$$

Сл. 2

3. Вратимо се на слику 1; употпуњавамо је на начин који приказује слика 2. На њој приказане испрекидане линије подстичу ново сагледавање ситуације. Уочавамо да осенчени делови чине $\frac{2}{5}$ од укупно 3 (чоколаде), ако се подела врши дуж тих линија. Видели смо да је то, без њих, $3 \cdot \frac{2}{5}$. На тај начин „$\frac{2}{5}$ од 3“ изражавамо са $3 \cdot \frac{2}{5}$ (а то је $\frac{6}{5}$).

Оваквим примерима реченицу „$\frac{m}{n}$ од k“ везујемо за множење, тј. израз $k \cdot \frac{m}{n}$. Дакле, реченице „на k места по $\frac{m}{n}$“ и „$\frac{m}{n}$-ти део од k“ имају исто значење и везујемо их за исти израз $k \cdot \frac{m}{n}$ $\left(= \frac{k \cdot m}{n}\right)$.

Смисао који на овај начин дајемо множењу природног броја и разломка проширићемо на случај множења два разломка.

4. Почнимо питањима:

(I) Колико је „$\frac{2}{5}$ од $\frac{2}{5}$“ ?

(II) Колико је „$\frac{2}{5}$ од $\frac{3}{7}$“ ?

Одговоре ћемо скицирати служећи се сликама којима можемо давати и неко стварно значење (табли чоколаде или сл.).

(I)

$\frac{2}{5}$ „$\frac{2}{5}$ од $\frac{2}{5}$“

Сл. 3

Уочавамо да је целина издељена на $5 \cdot 5 = 25$ делова. Издвојена су $2 \cdot 2 = 4$ дела, па је то $\frac{4}{25}$.

(II)

$\frac{3}{7}$ „$\frac{2}{5}$ од $\frac{3}{7}$“

Сл. 4

Целина је издељена на $7 \cdot 5 = 35$ делова, а издвојено је $3 \cdot 2 = 6$ делова. То је $\frac{6}{35}$.

„$\frac{2}{5}$ од $\frac{2}{5}$“ ћемо писати као израз $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$, а једначећи, даље као $\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{4}{25}$. Исто тако „$\frac{2}{5}$ од $\frac{3}{7}$“ записујемо и једначимо овако

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}.$$

Примећујемо да је $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ и $7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$, па „$\frac{2}{5}$ од $\frac{3}{7}$“ пишемо као $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$ или $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$.

Оваквим примерима индукујемо правило записивања „$\dfrac{m}{n}$-ти део од $\dfrac{p}{q}$“ са

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$$

и кажемо да је то $\dfrac{m\cdot p}{n\cdot q}$, односно пишемо

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}.$$

Операцију означену са „ $\cdot$ “ прогласимо множењем разломака и кажемо да је формула

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

правило множења. Можемо га исказати речима: множењем два разломка добијамо разломак чији је бројилац једнак производу бројилаца а именилац једнак производу именилаца та два разломка.

5. Следећи корак мора бити провера правила која су важила за множење у скупу $\mathbf{N}_0$. Мишљења смо да при томе треба комбиновати њихово индуковање већ описаним путем (формирањем одговарајућих схема и непосредним израчунавањима) са извођењем тих правила у општем случају применом правила у $\mathbf{N}_0$. Приказаћемо то на примерима дистрибутивног закона (први приступ), комутативног и асоцијативног закона (други приступ).

Израчунајмо прво производ $\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}\right)$. Имамо

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5+8}{20}=\frac{2}{3}\cdot\frac{13}{20}=\frac{26}{60}=\frac{13}{30}.$$

Израчунајмо затим збир производа $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{5}$. Налазимо

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{12}+\frac{4}{15}=\frac{10+16}{60}=\frac{26}{60}=\frac{13}{30}.$$

„$\dfrac{2}{3}$ од $\dfrac{1}{4}$“ $\qquad p \qquad$ „$\dfrac{2}{3}$ од $\dfrac{2}{5}$“

„$\dfrac{2}{3}$ од $\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}$“

Сл. 5

Послужимо се сликом (сл. 5) на којој су две количине, условно, раздвојене непрекидном линијом p. „Лево“ од те линије имамо „$\frac{2}{3}$ од $\frac{1}{4}$“, а „десно“ од ње „$\frac{2}{3}$ од $\frac{2}{5}$“, па је то заједно „$\frac{2}{3}$ од $\frac{1}{4}$“ и „$\frac{2}{3}$ од $\frac{2}{5}$“, тј. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}$. Ако не водимо рачуна о линији p, имамо „$\frac{2}{3}$ од $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$“ тј. $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)$. Пошто се ради о истим количинама, то су ови бројеви једнаки, па пишемо

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right),$$

што смо раније, израчунавањем, проверили. На тај начин индукујемо дистрибутивни закон

$$\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}.$$

Из једнакости

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}=\frac{p\cdot m}{q\cdot n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}$$

(користили смо се коммутативношћу множења у $\mathbf{N}_0$) закључујемо да је множење комутативно у $\mathbf{Q}_0^+$. Слично, једнакости

$$\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{p\cdot r}{q\cdot s}=\frac{m\cdot(p\cdot r)}{n\cdot(q\cdot s)}=\frac{(m\cdot p)\cdot r}{(n\cdot q)\cdot s}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}\cdot\frac{r}{s}=\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{r}{s}$$

показују асоцијативност уведене операције множења у $\mathbf{Q}_0^+$ (користили смо се асоцијативношћу множења у $\mathbf{N}_0$). На исти начин можемо извести и нека друга правила. На пример, због већ упознатог правила скраћивања $\left(\frac{m\cdot k}{n\cdot k}=\frac{m}{n}\right)$, важи

$$\frac{l\cdot m}{n}\cdot\frac{p}{l\cdot q}=\frac{l\cdot m\cdot p}{n\cdot l\cdot q}=\frac{l\cdot m\cdot p}{l\cdot n\cdot q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}.$$

6. Израз $3:5$ нема вредност у скупу $\mathbf{N}$, али смо му у скупу $\mathbf{Q}_0^+$ дали смисао. Наиме, једначили смо $3:5$ са $\frac{3}{5}$. У општем случају смо, за $m\in\mathbf{N}_0$, $n\in\mathbf{N}$ писали $m:n$ као $\frac{m}{n}$.

Подсетимо се да смо, на пример, решење једначине $2x=6$ налазили у $\mathbf{N}$ по правилу $x=6:2$, $x=3$. Формлано пишући (по правилу решавања у $\mathbf{N}$) решење једначине $5x=3$, налазимо $x=3:5$, и то, односно $\frac{3}{5}$, заиста јесте решење ове једначине у $\mathbf{Q}_0^+$, што проверавамо множећи у $\mathbf{Q}_0^+$: $5\cdot\frac{3}{5}=\frac{5\cdot 3}{5}=3$.

Генерално, једначина

$$m\cdot x=n,\qquad m\in\mathbf{N},\quad n\in\mathbf{N}_0,$$

има решење у $\mathbf{Q}_0^+$, $x=\frac{m}{n}$, што проверавамо множећи у $\mathbf{Q}_0^+$:

$$m\cdot\frac{n}{m}=\frac{m\cdot n}{m}=n.$$

7. Питање колико се пута 8 садржи у 48 решавамо дељењем 48 са 8, дакле $48 : 8 = 6$, и налазимо одговор да се 8 садржи у 48 шест пута. Ако исто питање поставимо за бројеве 8 и 51, налазимо да се 8 садржи у 51 шест пута и остатак је 3. Имајући $3 : 8$ осмишљено као $\frac{3}{8}$, можемо писати

$$51 : 8 = 6 + \frac{3}{8}.$$

Проверимо да је заиста тако:

$$\left(6 + \frac{3}{8}\right) \cdot 8 = 6 \cdot 8 + \frac{3}{8} \cdot 8 = 48 + 3 = 51.$$

Враћање на дељење са остатком у овом облику може бити увод у дељење разломака.

8. Шта је $\frac{3}{4} : 5$? Користећи се нашом схемом (сл. 6) представићемо $\frac{3}{4}$, па узети пети део тога. Добијамо 3 дела целине разбијене на $4 \cdot 5$ делова. Дакле, то је

$$\frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}.$$

На тај начин можемо индуковати правило дељења разломка природним бројем:

$$\frac{m}{n} : p = \frac{m}{n \cdot p}.$$

Сл. 6

Сл. 7

Шта је $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$? Ово питање можемо схватити као: Колико се пута $\frac{1}{4}$ садржи у $\frac{3}{4}$? Користећи се сликом (сл. 7) налазимо да је очигледан одговор 3.

Реченицу „5 се садржи у 8“ заменимо реченицом „однос бројева 5 и 8“. Тај однос означавамо са

$$5 : 8 = \frac{5}{8}.$$

Однос бројева:

(I) 17 и 7 је $17 : 7 = 2 + \frac{3}{7}$; (II) 4 и 11 је $4 : 11 = \frac{4}{11}$; (III) 11 и 10 је $11 : 10 = 1 + \frac{1}{10}$ итд.

Тако, враћајући се на наше претходне примере, имамо да је однос бројева:
(IV) $\frac{3}{4}$ и 5 је $\frac{3}{4}:5=\frac{3}{20}$; (V) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$ је $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3$.

9. Шта је однос бројева $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$? Доведимо ова два разломка на исти именилац. Имамо

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{21}{35},\quad \frac{4}{7}=\frac{4\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{20}{35}.$$

Стога је њихов однос

$$\frac{21}{35}:\frac{20}{35}=\frac{21}{20}.$$

Сад можемо прећи на општи случај и питати: шта је однос бројева $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$?

Доведимо бројеве $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ на заједнички именилац:

$$\frac{m}{n}=\frac{m\cdot q}{n\cdot q},\quad \frac{p}{q}=\frac{p\cdot n}{q\cdot n}=\frac{n\cdot p}{n\cdot q}.$$

Однос бројева $\frac{m\cdot q}{n\cdot q}$ и $\frac{n\cdot p}{n\cdot q}$ једнак је $\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$. Сад се израз $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}$ јавља као ознака тог односа, а изражен је разломком $\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$. На тај начин индукујемо правило

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}.$$

10. Повезаћемо сада разматрања изложена у **8**. са решавањем једначине

$$\frac{p}{q}\cdot x=\frac{m}{n},\qquad p,q,n\in\mathbf{N},\quad m\in\mathbf{N}_0.$$

Формално можемо писати

$$x=\frac{m}{n}:\frac{p}{q},$$

(чиме продужујемо правило решавања једначина) и односу $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}$ можемо дати значење $\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$. На тај начин можемо дељење у $\mathbf{Q}_0^+$ дефинисати једначењем израза

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}.$$

Приметимо да је $\frac{m\cdot q}{n\cdot p}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}$, па једнакост којом дефинишемо дељење у $\mathbf{Q}_0^+$ можемо писати и овако

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p},\qquad m\in\mathbf{N}_0,\quad p,q,n\in\mathbf{N}.$$

Дакле, делити разломком $\frac{p}{q}$ је исто што и множити њему реципрочним разломком $\frac{q}{p}$. Ово свођење дељења на множење једно је од оправдања за увођење појма реципрочног разломка.

Приметимо да је сада основа за решавање једначина у $\mathbf{Q}_0^+$ иста као у скупу $\mathbf{N}_0$. Наиме, ако су a, b, $c \in \mathbf{Q}_0^+$, тада су релације

$$a \cdot b = c, \quad a = c : b, \quad b = c : a \qquad (a \neq 0, b \neq 0)$$

еквивалентне и служе и овде као веза између операција множења и дељења.

11. Напоменимо да је $\mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}_0^+ \setminus \{0\}$ са операцијом множења комутативна група. То омогућује формални приступ увођењу разломака $\dfrac{m}{n}$ $(m \in \mathbf{N}_0,\, n \in \mathbf{N})$ који је ослоњен на правила о решавању једначина. Мислимо да то треба да буде последњи, а никако први корак у поступку излагања и изградње структуре $(\mathbf{Q}^+, \cdot)$.

На пример, $\dfrac{m}{n}$ је решење једначине $n \cdot x = m$, а $\dfrac{p}{q}$ једначине $q \cdot y = p$. Шта је $x \cdot y$? Множењем налазимо

$$(n \cdot x) \cdot (q \cdot y) = m \cdot p,$$

односно (применом асоцијативности и комутативности)

$$(n \cdot q) \cdot (x \cdot y) = m \cdot p.$$

Одатле је

$$x \cdot y = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}.$$

Шта је $\dfrac{x}{y}$? Дељењем налазимо

$$\frac{n \cdot x}{q \cdot y} = \frac{m}{p}, \quad \text{тј.} \quad \frac{n}{q} \cdot \frac{x}{y} = \frac{m}{p}.$$

Означимо $u = \dfrac{x}{y}$. Онда је

$$\frac{n}{q} \cdot u = \frac{m}{p},$$

$$(n \cdot p) \cdot u = m \cdot q.$$

Дакле,

$$u = \frac{m \cdot q}{n \cdot p} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}.$$

С друге стране је

$$u = \frac{x}{y} = x : y = \frac{m}{n} : \frac{p}{q},$$

чиме је показано да из очувања правила следи уведена дефиниција дељења у $\mathbf{Q}_0^+$.

12. Скицирали смо главне кораке којима осмишљавамо операцију множења и, у вези са њоме, операцију дељења у скупу $\mathbf{Q}_0^+$. Низ међукорака и правила рачунања и важних оперативних поступака смо изоставили.

Циљ нам је био да скицирамо пут којим се прво развија значење (уз подесне просторне кодификације), па одатле индукују правила и поступци рачунања. Такав пут, колико год да је пожељан, није увек изводљив у потпуности. У стварној настави, поштујући „lex parsimoniae“ често ћемо предност давати практично изводљивијем приступу. На пример, дељењу разломака можемо приступити формалније, очекујући да ће се у свести ученика одговарајућа когнитивна схема формирати кроз одговарајући избор примера и њихово решавање.