Др Павле Младеновић

10. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

1. Информације о такмичењу

Десета Балканска математичка олимпијада одржана је у главном граду Кипра Никозији у времену од 3. до 8. маја 1993. године. На овом такмичењу ученика средњих школа учествовале су шесточлане екипе из Албаније, Бугарске, Грчке, Југославије, Кипра и Румуније. Екипу Југославије на овом такмичењу чинили су следећи ученици:

1. **Гвозденовић Небојша**, ученик IV разреда Гимназије „Светозар Марковић" у Суботици,
2. **Ђапић Петар**, ученик III разреда Гимназије „Јован Јовановић Змај" у Новом Саду,
3. **Николић Владимир**, ученик IV разреда Ваљевске гимназије у Ваљеву,
4. **Остојић Дарко**, ученик III разреда Гимназије „Јован Јовановић Змај" у Новом Саду,
5. **Ставров Ива**, ученица III разреда Математичке гимназије у Београду,
6. **Стевановић Драган**, ученик IV разреда Гимназије „Светозар Марковић" у Нишу.

Руководиоци југословенске екипе били су:

1. Др Павле Младеновић, доцент Математичког факултета у Београду, руководилац екипе,
2. Мр Предраг Тановић, сарадник Математичког института у Београду, заменик руководиоца,
3. Љубица Киселички, професор математике из Суботице.

Ученици наше екипе постигли су следеће резултате:

Стевановић Драган освојио је златну медаљу, Ђапић Петар, Остојић Дарко и Гвозденовић Небојша освојили су сребрне медаље, а Николић Владимир и Ставров Ива су освојили бронзане медаље. Према укупном броју освојених поена југословенска екипа се у незваничном екипном пласману налази на другом месту иза екипе Бугарске.

И поред увођења нових и пооштрених санкција против наше земље, Друштво математичара Кипра позвало је екипу Југославије да учествује на 10. Балканској математичкој олимпијади и посебно показало спремност да буде домаћин нашој екипи на овом такмичењу.

Путовање наше екипе организовало је Друштво математичара Србије.

Све трошкове боравка наше екипе на Кипру сносио је организатор такмичења. У спонзорисању путних трошкова наше екипе учествовали су Министарство просвете Републике Србије, Секретаријат за јавне службе Ниша, Математички институт у Београду, а највећи део средстава обезбедио је анонимни дародавац са Кипра.

Током трајања 10. Балканске математичке олимпијаде наша екипа је у Никозији и другим Кипарским градовима и местима наишла на изузетно срдачан пријем, а учешћу наше екипе дата је велика пажња и у кипарским средствима јавног информисања. Сви учесници 10. Балканске математичке олимпијаде били су примљени и код кипарског архиепископа господина Хризостомоса. Том приликом је господин Хризостомос посебно срдачно разговарао са члановима југословенске делегације и зажелео нам свима мир и срећу.

Жири 10. Балканске математичке олимпијаде који су чинили руководиоци екипа једногласно је донео одлуку да се организација 11. Балканске математичке олимпијаде 1994. године повери Савезној Републици Југославији. Нама сада предстоји да се добро припремимо за то такмичење, како бисмо следеће године били добри домаћини математичким екипама балканских земаља.

2. Задаци

1. Ако су a, b, c, d, e, f реални бројеви за које важи

$$a+b+c+d+e+f=10, \tag{1}$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2+(f-1)^2=6, \tag{2}$$

одредити максималну вредност броја f.

2. Позитиван цео број са децималном репрезентацијом

$$a_N\cdot 10^N+a_{N-1}\cdot 10^{N-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$$

(a_i су цифре из $[0,9]$), зове се „монотон“ ако је $a_N\leqslant a_{N-1}\leqslant\ldots\leqslant a_0$. Одредити број свих монотоних бројева са не више од 1993 цифре.

3. Нека се кругови C_1 и C_2 са центрима O_1 и O_2, респективно, додирују споља у тачки Г. Нека је, даље, C круг са центром O који додирује кругове C_1 и C_2 у тачкама A и B, респективно, тако да се центри O_1 и O_2 налазе унутар круга C. Заједничка тангента у тачки Г кругова C_1 и C_2 сече круг C у тачкама K и L. Ако је D средиште дужи KL, доказати да је $\angle O_1OO_2=\angle ADB$.

4. Нека је p прост број, а m природан број, $m\geqslant 2$. Доказати да једначина

$$\frac{x^p+y^p}{2}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^m \tag{3}$$

има решење $(x,y)\neq(1,1)$ у скупу позитивних целих бројева ако и само ако је $m=p$.

— Време за рад 4 сата и 30 минута.
— Сваки задатак вреди 10 поена.

3. Решења задатака

1. Из једнакости (1) и (2) добијамо

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=2(a+b+c+d+e+f)=20.$$

Користећи неједнакост између квадратне и аритметичке средине добијамо

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5} \geqslant \left(\frac{a+b+c+d+e}{5}\right)^2,$$

одакле следи $5(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) \geqslant (a+b+c+d+e)^2$. Како је $a+b+c+d+e = 10-f$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 20-f^2$, то даље добијамо $5\cdot(20-f^2) \geqslant (10-f)^2$. Последња неједнакост је еквивалентна са $6f^2-20f \leqslant 0$, тј. $0 \leqslant f \leqslant \dfrac{10}{3}$.
Лако је видети да за $a=b=c=d=e=\dfrac{4}{3}$ важи $f=\dfrac{10}{3}$. Према томе, максимална вредност броја f при датим условима једнака је $\dfrac{10}{3}$.

2. Нека је A скуп свих монотоних бројева са не више од 1993 цифре и B скуп свих низова дужине 1993 који имају следећи облик

$$\underbrace{00\ldots0}\,\underbrace{11\ldots1}\,\underbrace{22\ldots2}\ldots\underbrace{99\ldots9}$$

и садрже бар један члан различит од нуле. (У неким низовима могу се појављивати само неке, а не све цифре.) Низови таквог облика су 1993-комбинације са понављањем елемената 0, 1, …, 9, па је број елемената скупа B једнак $\dbinom{1993+10-1}{10-1}-1$. Између скупова A и B постоји бијекција, па следи да је и број елемената скупа A једнак $\dbinom{2002}{9}-1$.

3. *Прво решење.* Нека су M, N тачке у којима праве $A\Gamma$, $B\Gamma$, респективно, секу круг C, сл. 1. Тада је $O_1O_2 \parallel OM$ и $O_1O_2 \parallel ON$. Према томе, тачке M, D, O, N су колинеарне и троугао ABD је троугао чија су темена подножја висина троугла MNP, где је P пресек правих AN и BM. Пошто је тачка O средиште дужи MN, то тачке A, O, D и B припадају Ојлеровом кругу троугла MNP. На основу тога следи $\angle O_1OO_2 = \angle AOB = \angle ADB$.

Сл. 1

Сл. 2

Друго решење. Заједничка тангента кругова C и C_1 у тачки A, заједничка тангента кругова C и C_2 у тачки B и заједничка тангента кругова C_1 и C_2 у тачки Γ секу се у једној тачки. (Докажите то!) Означимо ту тачку са S, сл. 2. Тада важе следеће једнакости

$$\angle SAO = \angle SDO = \angle SBO = 90^\circ.$$

Зато тачке S, A, D, O и B припадају кругу са пречником SO, па одатле следи $\angle O_1OO_2 = \angle AOB = \angle ADB$.

4. За $m = p$ једначина (3) прима облик $\dfrac{x^p + y^p}{2} = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^p$ и има бесконачно много решења облика (x, x), где је x позитиван цео број.
Обрнуто, претпоставимо да једначина (3) има решење (x, y), где су x и y позитивни цели бројеви. Ако је $x = y$, онда (3) прима облик $x^p = x^m$, одакле следи $m = p$. Размотримо сада случај $x \neq y$. Довољно је још показати да у том случају једнакост (3) доводи до контрадикције. Заиста, за $x \neq y$ добијамо $x^2 + y^2 > 2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ и

$$x^{n+1} + y^{n+1} = \frac{x+y}{2}(x^n + y^n) + \frac{x-y}{2}(x^n - y^n) > \frac{x+y}{2}(x^n + y^n),$$

одакле индуктивно добијамо да за сваки цео број $n \geqslant 2$ важи неједнакост $x^n + y^n > 2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$. Како за бројеве x и y по претпоставци важи једнакост (3), то следи

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m = \frac{x^p + y^p}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p,$$

па одатле добијамо $m > p$. Нека је $(x, y) = d$, $x = ud$, $y = vd$, где је $(u, v) = 1$. Тада једнакост (3) прима облик

$$u^p + v^p = 2d^{m-p}\left(\frac{u+v}{2}\right)^m. \tag{4}$$

Ако $x \not\equiv y \pmod 2$, онда је $u + v$ непаран број и важи $(u+v)^m \mid u^p + v^p$, а то је контрадикција, јер је $m > p$. Према томе, u и v су оба непарни бројеви. Претпоставимо да је $u + v = 2^\alpha t$, где је $\alpha \geqslant 1$ и t непаран број. У том случају, за $p = 2$ имамо

$$u^2 + v^2 = (2^\alpha t - v)^2 + v^2 = 2^{2\alpha}t^2 - 2^{\alpha+1}tv + 2v^2, \tag{5}$$

а за $p \geqslant 3$ добијамо

(6)

$$\begin{aligned} u^p + v^p &= (2^\alpha t - v)^p + v^p \\ &= 2^\alpha t\left[(2^\alpha t)^{p-1} - \binom{p}{1}(2^\alpha t)^{p-2}v + \cdots - \binom{p}{p-2}2^\alpha t v^{p-2} + pv^{p-1}\right], \end{aligned}$$

где је pv^{p-1} непаран број. Из једнакости (5) и (6) следи да степен броја 2 у канонској репрезентацији броја $u^p + v^p$ није већи од α. Како је степен двојке у десној страни једнакости (4) већи или једнак $(\alpha-1)m+1$, то следи неједнакост

$$(\alpha-1)m+1 \leqslant \alpha. \tag{7}$$

Како је $m > p \geqslant 2$, то из неједнакости (7) следи $\alpha = 1$. Према томе, $u+v=2t$, где је t непаран број и $t \geqslant 3$, а једнакост (4) прима облик

$$(2t-u)^p + u^p = 2d^{m-p}t^m. \tag{8}$$

Пошто је $(u,v)=1$, то следи да је и $(u,t)=1$, па из једнакости (8) следи да је $p \neq 2$. Према томе, p је непаран број, а једнакост (8) прима облик

$$(2t)^p - \binom{p}{1}(2t)^{p-1}u + \cdots - \binom{p}{p-2}(2t)^2u^{p-2} + 2ptu^{p-1} = 2d^{m-p}t^m. \tag{9}$$

Једнакост (9) можемо записати у следећем погоднијем облику:

$$2^pt^{p-1} - \binom{p}{1}(2^{p-1}t^{p-2} + \cdots - \binom{p}{2}4tu^{p-2} + 2pu^{p-1} = 2d^{m-p}t^{m-1}. \tag{10}$$

Из једнакости (10) следи да $t \mid p$. Према томе, $t = p \geqslant 3$. Пошто је p прост број, то следи $p \mid \binom{p}{2}$. Зато су сви сабирци у једнакости (10), различити од $2pu^{p-1}$, дељиви са p^2, а сабирак $2pu^{p-1}$ није дељив са p^2. Контрадикција.

4. Напомене

Жири је задатке предложене на такмичењу класификовао по тежини на следећи начин: први – лак, други – лак, трећи – средње тежине, четврти – тежак. Резултати наших ученика по задацима били су следећи:

Име ученика	1	2	3	4	Σ	медаља
Ђапић Петар	10	10	5	0	25	сребро
Гвозденовић Небојша	2	10	9	2	25	сребро
Николић Владимир	10	4	2	0	16	бронза
Остојић Дарко	10	10	1	2	23	сребро
Ставров Ива	0	8	0	2	10	бронза
Стевановић Драган	10	10	10	4	34	злато
Σ	42	52	27	10	131	

Слаб резултат наших ученика на задатку 4 може се оправдати тежином тог задатка. Међутим, релативно слаб резултат и на задатку 3 треба, вероватно, објаснити неадекватном припремљеношћу за решавање геометријских задатака. О томе би свакако требало водити рачуна приликом организовања припрема за следеће циклусе такмичења.