Здравко Старц

ИДЕНТИТЕТИ У ТРОУГЛУ[1]

У овом чланку доказаћемо неке идентитете облика

$$f(X,Y,Z)=g(s,R,r),$$

где је f симетрична функција, X, Y, Z су елементи троугла, s полуобим, R полупречник описаног круга и r полупречник уписаног круга троугла.

Поступак је следећи: најпре, формира се алгебарска једначина трећег степена чија су решења три елемента троугла; затим, полазећи од неке симетричне функције изражене преко основних симетричних полинома помоћу Вијетових формула долазимо до идентитета наведеног облика.

Наведимо, основни симетрични полиноми променљивих x, y, z су

$$s_1=x+y+z,\quad s_2=xy+yz+zx,\quad s_3=xyz$$

и Вијетове формуле за корене x, y, z алгебарске једначине трећег степена

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0\qquad (a_0\neq 0)$$

гласе

$$x+y+z=-\frac{a_1}{a_0},\quad xy+yz+zx=\frac{a_2}{a_0},\quad xyz=-\frac{a_3}{a_0}.$$

У даљем излагању користићемо следећу таблицу неких симетричних функција представљених помоћу основних симетричних полинома:

$$x^2+y^2+z^2=s_1^2-2s_2, \tag{1}$$

$$x^3+y^3+z^3=s_1^3-3s_1s_2+3s_3, \tag{2}$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)=s_1s_2-s_3, \tag{3}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{s_2}{s_3}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{s_1}{s_3}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{s_2^2-2s_1s_3}{s_2^2}, \tag{6}$$

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}=\frac{s_1s_2-3s_3}{s_3}. \tag{7}$$

Доказаћемо да су странице троугла, величине $s-a$, $s-b$, $s-c$, висине троугла, косинуси, котангенси и тангенси углова решења одговарајућих алгебарских једначина трећег степена.

[1] Саопштено на Републичком семинару о настави математике и рачунарства 16. 01. 1993.

Теорема 1. *Странице a, b, c троугла ABC су решења једначине*
$$x^3 - 2sx^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)x - 4sRr = 0.$$

Доказ. Множењем и дељењем релација
$$a = 2R\sin\alpha = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$
$$s - a = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$
редом, добијамо $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{ar}{4R(s-a)}$, $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a(s-a)}{4Rr}$. Надаље следи
$$\frac{ar}{4R(s-a)} + \frac{a(s-a)}{4Rr} = 1,$$
тј.
$$a^3 - 2sa^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)a - 4sRr = 0. \tag{8}$$
Слично вредни и за странице b и c. ∎

На основу Вијетових формула непосредно следе следећи идентитети:
$$a + b + c = 2s, \tag{9}$$
$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr, \tag{10}$$
$$abc = 4sRr. \tag{11}$$

Из (1)–(7), редом, добијамо следеће идентитете:
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr), \tag{12}$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr), \tag{13}$$
$$(a+b)(b+c)(c+a) = 2s(s^2 + r^2 + 2Rr), \tag{14}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4R}\left(\frac{s}{r} + \frac{r}{s}\right) + \frac{1}{s}, \tag{15}$$
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr}, \tag{16}$$
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{s^2 + 4Rr + r^2}{4sRr}\right)^2 - \frac{1}{Rr}, \tag{17}$$
$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{s^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}. \tag{18}$$

Сменом $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$ из (9)–(18) добијамо следеће идентитете:
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{s}{R},$$
$$\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha = \frac{1}{4R^2}(s^2 + r^2 + 4Rr),$$
$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{sr}{2R^2},$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1}{2R^2}(s^2-r^2-4Rr),$$
$$\sin^3\alpha+\sin^3\beta+\sin^3\gamma=\frac{s}{4R^3}(s^2-3r^2-6Rr),$$
$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\gamma+\sin\alpha)=\frac{s}{4R^3}(s^2+r^2+2Rr),$$
$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}=\frac{s^2+r^2+4Rr}{2sr},$$
$$\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{1}{\sin\gamma\sin\alpha}=\frac{2R}{r},$$
$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}=\frac{(s^2+r^2+4Rr)^2-16s^2Rr}{4s^2r^2},$$
$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma+\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{s^2+r^2-2Rr}{2Rr}.$$

Теорема 2. *Бројеви $s-a$, $s-b$, $s-c$ су решења једначине*
$$x^3-sx^2+r(4R+r)x-sr^2=0.$$

Доказ. Како је $a=s-(s-a)$, из (8), након сређивања, добијамо
$$(s-a)^3-s(s-a)^2+r(4R+r)(s-a)-sr^2=0. \quad \blacksquare$$

На основу Вијетових формула непосредно следе следећи идентитети:

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=s,$$
$$(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=r(4R+r),$$
$$(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2. \tag{19}$$

Напомена: како је $P=rs$, из (19) добијамо Херонову формулу за површину троугла.

Из (1)–(7), редом, добијамо следеће идентитете:

$$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=s^2-2r(4R+r),$$
$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=s(s^2-12Rr),$$
$$abc=4sRr,$$
$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{4R+r}{sr},$$
$$\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{(s-b)(s-c)}+\frac{1}{(s-c)(s-a)}=\frac{1}{r^2},$$
$$\frac{1}{(s-a)^2}+\frac{1}{(s-b)^2}+\frac{1}{(s-c)^2}=\frac{(4R+r)^2-2s^2}{s^2r^2},$$
$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}=\frac{4R-2r}{r}.$$

Теорема 3. *Висине троугла h_a, h_b, h_c су решења једначина*
$$2Rx^3-(s^2+r^2+4Rr)x^2+4s^2rx-4s^2r^2=0.$$

Доказ. Из $ah_a = 2P = 2rs$ следи $a = \dfrac{2sr}{h_a}$. Из (8), након сређивања, добијамо

$$2Rh_a^3 - (s^2 + r^2 + 4Rr)h_a^2 + 4s^2rh_a - 4s^2r^2 = 0. \quad \blacksquare$$

Применом Вијетових формула и из (1)–(7), редом, добијамо следеће идентитете:

$$h_a + h_b + h_c = \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{2R},$$
$$h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a = \frac{2s^2r}{R},$$
$$h_ah_bh_c = \frac{2s^2r^2}{R},$$
$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{(s^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16s^2Rr}{4R^2},$$
$$h_a^3 + h_b^3 + h_c^3 = \frac{(s^2 + r^2 + 4Rr)^3 - 24s^2Rr(s^2 + r^2 + 4Rr) + 48s^2R^2r^2}{8R^3},$$
$$(h_a + h_b)(h_b + h_c)(h_c + h_a) = \frac{s^2r(s^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2},$$
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$
$$\frac{1}{h_ah_b} + \frac{1}{h_bh_c} + \frac{1}{h_ch_a} = \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{4s^2r^2},$$
$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{s^2 - r^2 - 4Rr}{2s^2r^2},$$
$$\frac{h_a + h_b}{h_c} + \frac{h_b + h_c}{h_a} + \frac{h_c + h_a}{h_b} = \frac{s^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$

Теорема 4. *Бројеви* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *су решења једначине*

$$4R^2x^3 - 4R(R + r)x^2 + (s^2 + r^2 - 4R^2)x + (2R + r)^2 - s^2 = 0.$$

Доказ. Сменом $a = 2R\sin\alpha$ и $s - a = r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ у $a + (s - a) = s$ добијамо

(20) $$2R\sin\alpha + r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = s.$$

Представљањем $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ преко $\cos\alpha$ добијамо

$$2R\sqrt{(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)} + r\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = s.$$

Квадрирањем последње релације, након сређивања, добијамо

$$4R^2\cos^3\alpha - 4R(R + r)\cos^2\alpha + (s^2 + r^2 - 4R^2)\cos\alpha + (2R + r)^2 - s^2 = 0. \quad \blacksquare$$

Применом Вијетових формула и из (1)–(7), редом, добијамо следеће идентитете:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R},$$
$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha=\frac{s^2+r^2-4R^2}{4R^2},$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{s^2-(2R+r)^2}{4R^2},$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{4Rr+6R^2+r^2-s^2}{2R^2},$$
$$\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma=\frac{(2R+r)^3-3s^2r}{4R^3}-1,$$
$$(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta+\cos\gamma)(\cos\gamma+\cos\alpha)=\frac{2Rr^2+r^3+s^2r}{4R^3},$$
$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}=\frac{s^2+r^2-4R^2}{s^2-(2R+r)^2},$$
$$\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{1}{\cos\gamma\cos\alpha}=\frac{4R(R+r)}{s^2-(2R+r)^2},$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}=\frac{(s^2+r^2-4R^2)^2-8R(R+r)(s^2-(2R+r)^2)}{(s^2-(2R+r)^2)^2},$$
$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\gamma}+\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\alpha}+\frac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{(R+r)(s^2+r^2-4R^2)}{R(s^2-(2R+r)^2)}-3.$$

Теорема 5. *Бројеви* $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ *су решења једначине*

$$2srx^3-(s^2-r^2-4Rr)x^2+2srx+(2R+r)^2-s^2=0. \tag{21}$$

Доказ. Представљајући $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ преко $\operatorname{ctg}\alpha$ из (20) добијамо

$$\frac{2R}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}+r\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=s-r\operatorname{ctg}\alpha.$$

Квадрирањем последње релације, након сређивања, добијамо

$$2sr\operatorname{ctg}^3\alpha-(s^2-r^2-4Rr)\operatorname{ctg}^2\alpha+2sr\operatorname{ctg}\alpha+(2R+r)^2-s^2=0. \quad \blacksquare$$

Применом Вијетових формула и из (1)–(7), редом, добијамо следеће идентитете:

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\frac{s^2-r^2-4Rr}{2sr},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma=\frac{s^2-(2R+r)^2}{2sr},$$
$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma=\frac{(s^2-r^2-4Rr)^2}{4s^2r^2}-2,$$
$$\operatorname{ctg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\beta+\operatorname{ctg}^3\gamma=\frac{(s^2-r^2-4Rr)^3-48s^2R^2r^2}{8s^3r^3},$$

$$(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{2R^2}{sr},$$
$$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}=\frac{2sr}{s^2-(2R+r)^2},$$
$$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{s^2-r^2-4Rr}{s^2-(2R+r)^2},$$
$$\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\beta}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\gamma}=\frac{4s^2r^2-2(s^2-r^2-4Rr)(s^2-(2R+r)^2)}{(s^2-(2R+r)^2)^2},$$
$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma}+\frac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha}+\frac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{s^2-r^2-4Rr}{s^2-(2R+r)^2}-3.$$

Теорема 6. *Бројеви* $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ *су решења једначине*

$$(s^2-(2R+r)^2)x^3-2srx^2+(s^2-4Rr-r^2)x-2sr=0.$$

Доказ. Сменом $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ у једначини (21), с обзиром да је $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, долазимо до наведене једначине. ■

Применом Вијетових формула и из (1)–(7), редом, добијамо следеће идентитете:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{2sr}{s^2-(2R+r)^2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=\frac{s^2-r^2-4Rr}{s^2-(2R+r)^2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\frac{2sr}{s^2-(2R+r)^2},$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{4s^2r^2-2(s^2-r^2-4Rr)(s^2-(2R+r)^2)}{(s^2-(2R+r)^2)^2},$$
$$\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^3\beta+\operatorname{tg}^3\gamma=\frac{8sr(s^2r^2-3R^2(s^2-(2R+r)^2))}{(s^2-(2R+r)^2)^3},$$
$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha)=\frac{8sR^2r}{(s^2-(2R+r)^2)^2},$$
$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}=\frac{s^2-r^2-4Rr}{4sr},$$
$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}=1,$$
$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\gamma}=\frac{(s^2-r^2-4Rr)^2}{4s^2r^2}-2,$$
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{s^2-r^2-4Rr}{(s^2-(2R+r)^2)^2}-3.$$