НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1993, XXXVIII, 3–4, стр. 9–17

Др Милош Чанак

ПРИМЕНА МУЗИЧКИХ КОМПЈУТЕРА У МАТЕМАТИЧКОЈ ТЕОРИЈИ МУЗИКЕ[1]

Математичка теорија музике је научна дисциплина која се развијала од времена Питагоре до данашњих дана. Посебан замах добила је у задњих 20 година развојем геометрије тона, тонске скале, локалних и глобалних композиција и др. Пракса је показала да даљи развој ове теорије није могућ без музичких компјутера а са друге стране, њихово функционисање је засновано на геометрији тона.

У математичкој теорији музике, тон са одређеном висином региструје се као ваздушно треперење у функцији времена. Код ове функције најпре се задају следећи геометријски параметри: време настанка тона e, трајање d и амплитуда A. Ову временску функцију означавамо са p и она има облик једног тзв. „таласног пакета“ (види слику 1) . Овај таласни пакет је уз помоћ три реална броја e, d и A смештен у један правоугаоник, тзв. носач од p.

Сл. 1

На основу класичне Fourier-ове тонске анализе, може се дефинисати једна нормирана крива обвојница H. То је непрекидна функција од t која задовољава

[1] Предавање одржано на VI Југословенском семинару за логику и рачунарство „Лира 92“ (Нови Сад) и на Републичком семинару о настави математике и рачунарства (Београд 1993)

следеће услове:

$$\begin{aligned} &1. \quad H(t) = 0, \text{ за } t \leqslant 0,\ t \geqslant 1, \\ &2. \quad H(t) \geqslant 0, \text{ за } 0 < t < 1, \\ &3. \quad \max H = 1. \end{aligned} \tag{H}$$

За носач $T = T(e, d, A)$ крива H се трансформише у H_T, помоћу формуле

$$H_T(t) = A \cdot H\left(\frac{t - e}{d}\right)$$

да би могла да се смести у T (види слику 2).

Сл. 2

Ако још уведемо и тонску фреквенцу f, која изражава висину тона, тада можемо говорити о четири броја e, d, A и f као о геометријским координатама од p, а тачки $G(p) = (e, f, d, A)$ у четвородимензионалном реалном бројном простору $\mathbf{R}^4$ придружити геометрију од p (види [1]).

Временска функција p често се описује кривом обвојницом H, елементом простора оних непрекидних функција које задовољавају услове (H). Код музичких компјутера, крива H се замењује полигоналном линијом. Бира се један низ временских вредности

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$$

при чему је

$$H(0) = 0, \quad H(t_1) = h_1, \quad \ldots, \quad H(t_m) = h_m, \quad H(1) = 0$$

и најмање једна од h_i узима вредност 1.

У музичкој теорији ритма треба правити разлику између физичких и музичких временских параметара. Физичко време настанка тона e и трајање d, који су реални бројеви, замењују се музичким временом настанка тона $E = w/n$ и трајањем $D = z/n$ који су разломци. При томе именилац n најчешће има облик

$$n = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t \cdot 7^u$$

где су r, s, t, u природни бројеви, док су бројиоци w и z цели бројеви. Скуп разломака овог облика означава се обично са $Z[1/2, 1/3, 1/5, 1/7]$.

Нека су даље x и y позитивни цели бројеви. Тада се свака рационална вредност за време настанка тона E може уз помоћ једнозначно изабраних вредности δ и τ представити у облику

$$E = \delta + \tau\,\frac{x}{y}.$$

При томе се претпоставља да је $0 \leqslant \delta < x/y$ ($\delta \in \mathbf{Q}$) и $\tau \in \mathbf{Z}$. Овакво приказивање броја E има следећи смисао. Ако је, на пример, $x = 3$, $y = 4$ и $E = 15{,}375$, тада можемо написати да је $E = \dfrac{3}{8} + 20 \cdot \dfrac{3}{4}$. То значи да се у трочетвртинском такту тон E налази у четвртој осмини 21. такта.

Веза између музичких и физичких временских параметара изражава се преко тзв. „темпо-функције“ и дефинише агогику једног музичког комада. У некој датој музичкој ситуацији најпре се посматра физичко време настанка тона e у функцији од музичког времена настанка тона E. Функција $e(E)$ назива се *функција временског тока.* Можемо претпоставити да је она монотоно растућа и непрекидно диференцијабилна. Тада је њен извод de/dE непрекидна позитивна функција од E. Темпо у E представља инверзну вредност изводне функције

$$T(E) = \left(\frac{de}{dE}\right)^{-1}.$$

Одавде је функција временског тока (види слику 3)

$$e(E) = e(E_0) + \int_{E_0}^{E} \frac{dx}{T(x)}.$$

Сл. 3

Посебно се издвајају два важна специјална случаја:

1. $T(x) = T = \text{const}$. Тада је

$$e(E) = e(E_0) + \frac{E - E_0}{T}$$

и темпо је равномеран, док је функција временског тока линеарна.

2. $T(x) = \alpha \cdot (x - E_0) + T_0$. Тада је

$$e(E) = e(E_0) + \alpha^{-1} \ln \frac{\alpha(E - E_0) + T_0}{T_0}.$$

За $\alpha > 0$ ради се о равномерном *accelerandu*, док за $\alpha < 0$ имамо rallentando.

Све ове геометријске карактеристике тона треба имати у виду приликом коришћења музичких компјутера.

Функционисање савремених музичких компјутера обично је подељено у 4 радне области. Ради вођења дијалога између човека и машине, постоји централни мени DESIGNER свих даљих дијалошких поља.

Непосредно након старта програма, појављује се дијалошко поље DEFAULT (види слику 4). Оно преко DESIGNERa омогућава приступ ка следећим областима:

– Музикотека,
– GRAPHIK-INPUT,
– KEYBOARD-INPUT,
– Тонске боје.

Сл. 4

Тиме се цела радна област приказује преко једног тетраедра а четири дијалошка поља смештена су на теменима која су сва директно проходна од једног ка другом.

Дијалошко поље МУЗИКОТЕКА служи за меморисање и поновно пуњење компјутера композицијама на дискету или на тврди диск.

Дијалошко поље KEYBOARD-INPUT подржава уношење тј. предају музичких комада преко Masterkeyboard-a. Оно садржи велики број параметара које је могуће унети и који описују да ли се и у којој форми одсвирани делови у компјутеру могу интегрисати као композиција. Могуће је пре свега понављање онога што је одсвирано на клавијатури, исписивање одсвираног, поновно насвиравање итд.

Дијалошко поље ТОНСКЕ БОЈЕ подржава оркестрацију једне композиције са геометријске тачке гледишта.

Познато је да се приликом звучања тона на неком музичком инструменту, осим основног тона појављује и низ тзв. парцијалних или аликвотних тонова. Од броја, распореда и јачине аликвотних тонова у највећој мери зависи боја тона. Слика или дијаграм односа аликвотних тонова чини тзв. звучни спектар а њихов распоред рачунајући одоздо навише обележава се редним бројевима.

Математичку основу за експериментисање са тонским бојама чини пре свега Fourier-ова теорема о разлагању непрекидне и периодичке функције $F(t)$ $(F(t+P)=F(t))$ у бесконачан конвергентан ред

$$F(t)=\alpha_0+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r\sin(2\pi rft+\delta_r),\qquad f=\frac{1}{P},$$

по синусним функцијама $\alpha_r\sin(2\pi rft+\delta_r)$ које представљају парцијалне осцилације од f. Fourier-ови коефицијенти α_r и δ_r једнозначно се одређују помоћу $F(t)$.

Међутим, велики одјек изазвао је рад J. Chowning-а из 1985. године (види [2]). Овај рад даје основу тзв. FM-синтезе (FM = фреквенцна модулација) која се показала погоднијом од Fourier-ове методе у компјутерској обради тонских спектара.

Насупрот Fourier-ове синтезе овде се синусне функције не сабирају већ слажу. Слагање две синусне функције

$$\begin{aligned}O_1&=O(A_1,f_1)=A_1\sin(2\pi f_1t),\\ O_2&=O(A_2,f_2)=A_2\sin(2\pi f_2t)\end{aligned}$$

је композиција од O_1 као оператора носача са модулатором O_2, графички представљена као стрелица $O_2\to O_1$ која се дефинише формулом

$$[O_2\to O_1]\stackrel{\mathrm{def}}{=}A_1\sin(2\pi f_1t+A_2\sin(2\pi f_2t)).$$

Овом методом се са малим бројем синусних осцилација успостављају комплексне тонске боје, а у функцији $O_2\to O_1$ оба оператора су једнозначно одређена, исто као и код Fourier-ове анализе.

У принципу, овај проблем је постављен у оквиру науке о музичким инструментима, тј. боје тонова су замишљене као звуци инструмената. При томе се обавезно обухвата звучно тело симфонијског оркестра, кроз кога се описује инструментална конфигурација.

На музичким компјутерима експериментисање са тонским бојама се врши преко извесног броја синусних генератора, тј. оператора $O_1=O(A_1,f_1)=$

$A_1 \sin(2\pi f_1 t)$ до $O_n = O(A_n, f_n) = A_n \sin(2\pi f_n t)$ који у смислу FM-синтезе делују један на другог.

Дијалошко поље GRAPHIK-INPUT може да се схвати као језгро рачунара, јер су му на располагању најважније радне могућности (види слику 5). Овде се могу посматрати локалне композиције (музички мотиви, реченице, фрагменти, фигуре и др.) у $\mathbf{Z}^5$ при чему прве 4 координате представљају геометрију тона: време настанка тона E, трајање D, висину тона H у 12-темперованом систему и јачину тона L. Пета координата одговара једној произвољној нумерацији тонских боја коришћеног синтисајзера.

Сл. 5

Ово дијалошко поље у горњем реду садржи скалу (Timescale) расположивог распона времена настанка тона. Испод ње у правоугаонику 568×71 је раван $E \times H$ где се за координате тонова узимају времена њиховог настанка и висине. Темпо-функција се дефинише графички интерактивно као полигонална линија у оквиру TIME-MAP (види [3]). Најзад регистри који нам стоје на располагању омогућавају разне скуповне операције са тачкама из SCORE као што су уклањање, унирање, пресецање, разлику и др.

Једна локална композиција $(\mathcal{K}, M)$ састоји се заправо из тачака тј. тонова чија су обележја означена са M. Често се M може писати као директна сума $M = M_1 + M_2$ при чему M_1 обично указује на геометријска обележја као што су висина или трајање тона док је у M_2 садржан параметар боје.

Сада се на $\mathcal{K}$ може применити пројекција $p_1 \colon M \to M_1$ и то на први сабирак модула носача. Тада се добија једна сирјекција $p_1 \colon (\mathcal{K}, M) \to (p_1(\mathcal{K}), M_1)$ на локалну композицију $\mathcal{K}_1 = p_1(\mathcal{K})$ која музички тако произлази из $\mathcal{K}$ да се занемаре обележја из M_2 (види слику 6).

Сл. 6

Посматрајмо неке вредности x_1, x_2, ..., x_s из M_2 (нека су то на пр. ознаке за тонске боје појединих музичких инструмената) и нека су $\mathcal{K}|x_1$, ..., $\mathcal{K}|x_s$ подскупови оних тачака у $\mathcal{K}$ које одговарају вредностима x_1, x_2, ..., x_s (ово на пр. могу бити мелодијске линије сваког појединог инструмента). Пројекције $p_1(\mathcal{K}|x_1)$, ..., $p_1(\mathcal{K}|x_s)$ образују једно прекривање I за $\mathcal{K}_1$ које се зове интерпретација и означава са $\mathcal{K}_1^I$. Она нам додуше не обезбеђује повратак на $\mathcal{K}$ али је бар познато који тонови из $\mathcal{K}_1$ имају исте вредности обележја из M_2.

Слично расуђивање примењујемо ако у равни $\mathbf{Z}^2$ бирамо било која два (X, Y) од четири геометријска параметра E, D, H и L. Аспект три преостала параметра $\{E, D, H, L, F\} \setminus \{X, Y\}$ је $\mathbf{Z}^3$, па имамо разлагање $\mathbf{Z}^5 = \mathbf{Z}^2 \oplus \mathbf{Z}^3$ у односу на X и Y.

За низ изабраних вредности x_1, ..., x_s из $\mathbf{Z}^3$ посматра се $\mathcal{K}|x_1$, ..., $\mathcal{K}|x_s$ а затим и низ пројекција $\mathcal{K}_1 = p_{XY}(\mathcal{K}|x_1)$, ..., $\mathcal{K}_s = p_{XY}(\mathcal{K}|x_s)$ у $p_{XY}(\mathcal{K})$. Овај низ локалних композиција у $\mathbf{Z}^2$ дефинише један, вредностима x_1, ..., x_s индициран атлас A_{XY} једне интерпретације $p_{XY}(\mathcal{K})^I$, где је I прекривање са скуповима $\mathcal{K}_1$, ... $\mathcal{K}_s$.

Корисник на рачунару дакле бира параметре X и Y и у тако изабраној XY-равни изводи графички интерактивно разне симетрике или скуповне операције (унију, пресек, разлику, комплемент). Претходно се одреди онај део локалне композиције $\mathcal{K}$, без обзира да ли се ради о скали, акорду, ритму или мотиву, на који делују споменуте операције, графички интерактивно, преко једне полигоналне линије у XY-равни. Операције се изводе на свим картама атласа A_{XY} симултано и дају једну нову композицију.

Надаље се карте атласа A_{XY} могу мењати преко споменутих избора подскупова у XY-равни. При томе се једном одређеном подскупу придружује нова параметарска вредност, за један од преостала три параметра. Тиме приказан, новодефинисани атлас остаје толико дуго у радној меморији, док не буде замењен следећим атласом. После сваког радног прелаза, раван XY може да се замени новом равни итд.

На тај начин видимо да разумевање једног стања резултира из варијације перспективе под којом се оно посматра. Један високодимензионални објекат тј. локална композиција $\mathcal{K}$ у $\mathbf{Z}^5$ се вишеструко интерпретира кроз 6 дводимензионалних перспектива и при том манипулише без посебних ограничења. Корисник црта или боји тачке у равни са новим вредностима параметара, док преостали параметри остају неупотребљени тј. у позадини. Реч „боје“ долази одатле, што се звучне боје F могу кодифицирати бојењем тачака.

У дијалошком пољу OPERATING-SCORE могу се произвољно бирати пројекционе равни. Овде се ради у једној коцки од $71 \times 71 \times 71 \times 71$ геометријских параметара, укључујући и 16 по оркестрацији изабраних звучних боја F (види слику 7). Поједине локалне композиције се специфицирају преко њиховог геометријског еквивалента у равни а OPERATING-SCORE допушта при том измену између равни по паровима параметара четвородимензионалне геометрије тона.

Сл. 7

Интересантно је посматрати операције у дијалошком пољу ORNAMENT. Овде се најпре графички интерактивно дефинише један пар транслација e^a, e^b у EH-равни, а затим се група транслација e^{Za+Zb} примењује на једну локалну композицију $\mathcal{M}$, тзв. мотив, дефинисану у OPERATING-SCORE, тако да настаје један орнамент $\mathcal{O} = e^{Za+Zb}(\mathcal{M})$ у $\mathbf{Z}^5$. У њему се бира једна коначна локална подкомпозиција $\mathcal{OE}$ која може бити преузета као периодичка структура у смислу једне ритмичке мустре или примењена као тзв. „регулативна структура“ за неку композицију у настајању (види слику 8).

Идеја да се $\mathcal{OE}$ користи као регулатив произлази из могућности да се око било ког тона x из $\mathcal{K}$ (пројектованог у EH-равни) конструише (извуче) једна спирала $\mathrm{Sp}(x)$. На свом путу она ће проћи сукцесивно кроз све тачке локалне композиције и повезати их у орнамент.

Сл. 8

На овом месту није ни издалека могуће обухватити све аспекте савремених музичких компјутера. Они су пре свега намењени композиторима, теоретичарима музике, акустичарима, истраживачима из математичке теорије музике и свима другима који у проучавању полазе од локалних композиција као што су скале, акорди, ритмови, мотиви и др. као и питањима оркестрације и аранжирања. При томе истраживања могу са једне стране бити усмерена у смислу хармонске и контрапунктске анализе, анализе музичких облика, теорије ритма, експериментисања са разним тонским бојама ради постизања оптималне оркестрације и других чисто музиколошких дисциплина. Са друге стране музички компјутери су велика помоћ математичкој теорији музике, где се велики број тонова најпре преводи у конфигурацију тачака а затим проучавају разне геометријске особине, скуповне операције, групе симетрија, примене разних алгебарских структура и пресликавања итд. Сва ова математичка истраживања нису сама себи циљ, нити се постављају супериорно у односу на музику као предмет истраживања, већ нам омогућавају много боље познавање, увид и уживање у чаробном свету тонова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mazzola, G., *Geometrie der Töne, Elemente der mathematischen Musiktheorie*, Birkhäuser Verlag, Basel 1990.

[2] Chowning, J., *The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation,* J. of the audio engineering soc. 21 (7) 1985.

[3] Mazzola, G., Muzzulini, D., *Stimmungs- und Tempofelder-Perspektiven künftiger Musikcomputer*, Mikrotöne III, Helbling, Innsbruck 1990.

[4] Kostka, S., *A bibliography of computer application in music*, Hackensack (N.J.) 1974.