Љубиша Динић

РАСТАВЉАЊЕ КВАДРАТНОГ ТРИНОМА СА ЦЕЛОБРОЈНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА НА ПРОИЗВОД ДВА БИНОМА СА ЦЕЛОБРОЈНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

Час обраде у VII разреду ОШ „Ћеле-кула“ у Нишу

Уводне напомене. Са проблемом растављања полинома на чиниоце први пут се срећемо у VII разреду. Том приликом обрађујемо: „извлачење“ заједничких чинилаца, уочавање квадрата збира, квадрата разлике и разлике квадрата, а ређе обрађујемо груписање чланова и растављање квадратног тринома са целобројним коефицијентима на производ два бинома са целобројним коефицијентима. Наш је циљ да прикажемо како се, у случајевима када је такво растављање могућно извршити, оно може обрадити, а да се не изађе из оквира наставних садржаја предвиђених програмима првих седам разреда.

Ток часа. У уводном делу часа решавамо прво задатке:

Задатак 1. Раставити на производ два бинома са целобројним коефицијентима квадратни трином $x^2 - 2x - 15$.

Иако ће неки од ученика можда доћи до таквог растављања погађањем или на неки други начин, наводимо их на следећи поступак:

$$x^2 - 2x - 15 = x^2 - 5x + 3x - 15 = x(x-5) + 3(x-5) = (x-5)(x+3).$$

Указујемо на чињеницу да је главну улогу одиграло представљање $-2x = -5x + 3x$ и постављамо питање: Шта нас је навело да $-2x$ представимо управо овако, а не, на пример, $-2x = 7x - 9x$ или слично?

Задатак 2. Раставити на производ два бинома са целобројним коефицијентима квадратни трином $2x^2 - 9x - 35$.

Очекујемо да ученици, користећи се искуством са претходним задатком, уз евентуалну нашу сугестију, поступе овако:

$$2x^2 - 9x - 35 = 2x^2 - 14x + 5x - 35 = 2x(x-7) + 5(x-7) = (x-7)(2x+5).$$

Питање у вези са представљањем $-9x = -14x + 5x$ не смемо пропустити.

Да ученици не би стекли утисак да се сваки квадратни трином са целобројним коефицијентима може представити као производ два бинома са целобројним коефицијентима, овде им скрећемо пажњу на случајеве када то није могућно. При томе је, по нашем мишљењу, довољно илустровати одговарајућим примерима такве ситуације.

Задатак 3. Раставити, ако је то могућно, на производ два бинома са целобројним коефицијентима квадратни трином: а) $x^2 - 2x - 1$; б) $x^2 + 2x + 2$.

Ученици ће, вероватно, покушавати да примене већ увежбани поступак, али безуспешно. Не треба их пустити да дуго лутају, него их навести да поступе, на пример, овако:

а) $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$;

б) $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$.

На овом месту, уз напомену да у првом случају коефицијенти нису цели бројеви а да у другом случају није могућно дати трином раставити на производ два бинома (за сада!), треба ипак нагласити да приликом формулисања задатака ми водимо рачуна о томе да се захтеване операције могу извршити. Дајемо ученицима да, уз нашу помоћ, на месту решавају задатак:

Задатак 4. Раставити на производ два бинома са целобројним коефицијентима квадратни трином: а) $x^2 + 2x - 8$; б) $x^2 - 11x + 24$.

Уверени да су ученици стекли довољно искуства и да је индукована њихова заинтересованост за општи случај, прелазимо на малу „теорију“ (за најједноставнији случај).

Знамо да је

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

Претпоставимо да је растављање којим се бавимо могућно, што значи да су у горњој формули a, b, $a+b$ и ab цели бројеви. Наш је проблем да на основу познатих целих бројева $a+b$ и ab нађемо целе бројеве a и b. Ако означимо $a+b=B$, $ab=C$, видимо да наш проблем гласи:

Дати квадратни трином $x^2 + Bx + C$, где су B и C цели бројеви, може се раставити на производ $(x+a)(x+b)$, где су a и b цели бројеви. Нађи a и b.

Ако је $B = 0$, онда је $a = -b$, $C = -a^2$,

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a).$$

Ако је $C = 0$, онда је $a = 0$, $b = B$,

$$x^2 + Bx = x(x+B).$$

Ако је $B = 0$ и $C = 0$, онда је $a = 0$, $b = 0$,

$$x^2 = (x-0)(x-0).$$

Ако је $B \neq 0$ и $C \neq 0$, можемо разликовати следећа четири случаја:

I. $B > 0, C > 0$; II. $B > 0, C < 0$; III. $B < 0, C > 0$; IV. $B < 0, C < 0$.

I. $a + b > 0$, $ab > 0$. Цели бројеви a и b су позитивни и тражимо их међу позитивним делиоцима броја C.

Задатак 5. Раставити на производ два бинома са целобројним коефицијентима квадратни трином $x^2 + 8x + 15$.

$a + b = 8$, $ab = 15$. Другу једнакост (уз услов $a > 0$, $b > 0$) задовољавају парови $(1,15)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(15,1)$. Од ових парова прву једнакост задовољавају парови $(3,5)$ и $(5,3)$. Они дају исто растављање посматраног тринома

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5).$$

II. $a+b>0$, $ab<0$. Цели бројеви a и b су супротног знака и при томе је апсолутна вредност негативног од њих мања од позитивног. Због равноправности учешћа бројева a и b у овим релацијама можемо, без губљења општости, претпоставити да је $a>0$.

Задатак 6. Раставити на производ два бинома са целобројним коефицијентима квадратни трином x^2+x-12.

$a+b=1$, $ab=-12$. Другу једнакост, од парова (a,b) $(a>0,\ b<0,\ |b|<a)$, задовољавају $(4,-3)$, $(6,-2)$, $(12,-1)$. Од њих само први пар задовољава прву једнакост. Он нам даје растављање

$$x^2+x-12=(x+4)(x-3).$$

III. $a+b<0$, $ab>0$. Цели бројеви a и b су негативни и тражимо их међу негативним делиоцима броја C.

Задатак 7. Раставити на производ два бинома са целобројним коефицијентима квадратни трином $x^2-11x+24$.

$a+b=-11$, $ab=24$. Другу једнакост (уз $a<0$, $b<0$) задовољавају парови $(-1,-24)$, $(-2,-12)$, $(-3,-8)$, $(-4,-6)$, $(-6,-4)$, $(-8,-3)$, $(-12,-2)$, $(-24,-1)$. Од њих прву једнакост задовољавају парови $(-3,-8)$, $(-8,-3)$, који дају исто растављање

$$x^2-11x+24=(x-3)(x-8).$$

IV. $a+b<0$, $ab<0$. Цели бројеви a и b су супротног знака; при томе је апсолутна вредност негативног од њих већа од позитивног. Узмимо, не нарушавајући општост расуђивања, да је $a>0$.

Задатак 8. Раставити на производ два бинома са целобројним коефицијентима квадратни трином x^2-7x-8.

$a+b=-7$, $ab=-8$. Од парова (a,b) $(a>0,\ b<0,\ |b|>a)$ другу једнакост задовољавају парови $(1,-8)$, $(2,-4)$. Од њих само пар $(1,-8)$ испуњава прву једнакост. Дакле

$$x^2-7x-8=(x+1)(x-8).$$

За домаћи дајемо ученицима следећа четири задатка:

Раставити на производ два бинома са целобројним коефицијентима:

1. $x^2+10x+24$; 2. $x^2+3x-28$; 3. $x^2-10x+21$; 4. $x^2-2x-63$.

Имајући у виду идентичности

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd,$$

$$(ax+by)(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2,$$

можемо на сличан начин покушати са растављањем тринома облика

$$Ax^2+Bx+C,\quad Ax^2+Bxy+Cy^2$$

са целобројним коефицијентима на производ два бинома са целобројним коефицијентима, под условом да такво растављање постоји.

Предлажемо да, они од ученика који су заинтересовани, размисле о растављању тринома облика Ax^2+Bx+C, са целобројним коефицијентима, на производ два бинома са целобројним коефицијентима.