Др Александар Липковски

О НАСТАВИ ЛИНЕАРНЕ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ[1]

У свом недавном чланку [10] посвећеном настави математике, један од брилљантних математичара данашњице, добитник Филдсове медаље, тополог и геометар Вилијем Терстон тврди да је настава математике у неприхватљиво лошем стању. И мада се његова констатација односи на Америку, разлози које наводи су универзални и поменута тврдња се може односити и на нас. Овде ћу покушати да дам једно виђење предмета, циљева и принципа наставе на првим годинама студија математике.

Почнимо од предмета и циљева наставе математике. Без упуштања у филозофске расправе о њеном предмету, можемо се сложити да математика проучава математичке структуре. Она је „интуитивна, реална, широка и висока" [10]. Терстон је упоређује са скелама, чија структура је повезана не само вертикално и хоризонтално, већ и унакрсно. Математика је јединствена и не трпи поделу на неповезане дисциплине. Свака подела је само условна а везе су многоструке и дубоке. Цитирам Кострикина и Мањина ([5] стр.5):

> „Традиција у предавању доводи до секцирања живог тела математике на изоловане органе који се онда морају вештачки одржавати у животу. ... Ми смо у књизи желели да изразимо и нове тенденције синтезе математике као средства за истраживање спољног света."

Поред основних знања, тај осећај јединства математике је оно најважније што студент мора стећи током својих студија. Инсистирање на мноштву класичних метода и техника које, пре свега у алгебри и анализи, још увек постоји у нашим математичким студијама, представља архаични остатак прошлости када се математика учила кроз λ-матрице, критеријуме конвергенције и рецепте за решавање диференцијалних једначина. Такав, „фармацеутски" приступ мора бити замењен приступом предавању математике као науке о математичким структурама, са потенцирањем многобројних веза између структура и јединства разних математичких дисциплина, пре свега геометрије, топологије, анализе и алгебре, у чему, наравно, морају имати великог удела и примене. Остављајући по страни примене у нумеричкој математици и у рачунарству, управо на пољу примена у теоретској физици последњих је година дошло до праве револуције. Данас смо у ситуацији да дипломирани физичари боље осећају јединство математике (геометрије, топологије, алгебре и анализе) него дипломирани математичари. Задњи

[1] Текст представља проширену верзију предавања које је аутор одржао на Републичком семинар о настави математике и рачунарства 15. 01. 1993.

је час да се то промени. Основни циљ наставе математике не сме бити квантитет, већ квалитет добијене информације, довољно добро схваћени основни појмови, непренатрпаност другостепеним детаљима. Исто тако, важан циљ је развој општег мишљења, логичког закључивања и аргументације, математичке интуиције. Како каже Терстон, „настава која поставља пред себе уске циљеве у ствари заглупљује“. Много је боље ако студенти користе свој пуни интелект. Наставник треба студенту да приближи интелектуално задовољство бављења математиком: „летети тамо где смо до тада ходали!“ [10].

Размотримо наставу на првој години студија. Опште је познато да развој научне математике своје почетке има у хеленској Грчкој. Круна тог развоја је несумњиво Еуклидово дело „Елементи“ у коме је систематски и дедуктивно изложена геометрија простора у коме живимо на бази појмова тачке, праве и равни. То дело је оставило јединствени траг у људској цивилизацији, утичући не само на начин излагања геометрије, већ и науке уопште па и на сам начин мишљења људи у ова двадесеттри века колико нас дели од Еуклида. И дан данашњи, геометрија која се предаје ђацима у школама широм света је у својој суштини, а и у начину излагања, управо та, Еуклидова геометрија. Координатну методу у геометрији увели су Декарт и Ферма. Главна идеја аналитичке геометрије Декарта је да се геометријски облици квантитативно опишу једначином која изражава функционалну зависност координата заједничку за све тачке тог „локуса“. Дуги низ деценија је Декартов координатни метод заједно са описом елементарне геометрије еуклидског простора и кривих и површи другог реда у њему представљао основу универзитетског курса тзв. „Аналитичке геометрије“. Такав курс се и даље држи на многим техничким факултетима, где је главни циљ научити студента да аналитички решава неке геометријске проблеме[2]. Наравно, и за данашњег студента математике важно је да уме да користи ту методу: без тога нема никаквог даљег рада. Али није само координатна метода оно што треба да научи.

Циљ данашње наставе геометрије за математичаре је да успостави чврсту везу између појмова елементарне геометрије које студент доноси са собом из претходног школовања по обрасцу Еуклидових „Елемената“ с једне стране, и појмова трансформација простора које са собом носе структуру групе с друге стране, у духу Ерлангенског програма Феликса Клајна. Аналитичка геометрија, као прва фаза ове наставе, треба да оствари синтезу интуитивних геометријских појмова тачака и вектора у појму афиног простора, да да координатну интерпретацију афиних простора и трансформација на бази претходно усвојених појмова координата у векторском простору и да разјасни структуру групе афиних трансформација. Даље, треба да уведе метричке појмове — растојања, дужине, углове — у афину геометрију на бази еуклидских простора. Осим тога, треба да да основу појмова криве и површи и њихових једначина као и да класификује хиперповрши другог реда у афиној и еуклидској геометрији.

Ради правилног распореда материјала и акцента на нераскидивој вези из-

[2]„Аналитички“ није добра реч, већ је то пре „алгебарски“, али је термин „алгебарска геометрија“ резервисан за теорију која представља далекосежну надградњу наше „аналитичке геометрије“.

међу геометрије као суштине појмова и алгебре као средства за лаку и тачну анализу геометријских представа, као и ради лакшег усвајања од стране студената, неопходно је да пре или још боље упоредо са курсем аналитичке геометрије тече курс линеарне алгебре. Како кажу Јефимов и Розендорн ([2] стр.11),

> „Геометријски карактер терминологије и основних појмова линеарне алгебре одражава њену везу са геометријом. И више од тога, линеарна алгебра и аналитичка геометрија су толико тесно повезане да је тешко повући оштру границу између њих. Томе ми и не тежимо."

Предмети „Линеарна алгебра" и „Аналитичка геометрија" за студенте математике на Математичком факултету у Београду се предају на првој години студија, и то линеарна алгебра са 3 часа у првом и 2 у другом семестру, а аналитичка геометрија са 3 часа само у другом семестру[3]. Неколико речи о наставним плановима ових курсева. У линеарној алгебри после првог дела о групама, полиномима и бројевима[4], затим матрица и детерминанти, па теорије векторских простора укључујући базу, димензију и координате, следи излагање структуре ендоморфизама, Жорданова нормална форма и квадратне функције. Најзад, курс се завршава еуклидским односно унитарним векторским просторима и структуром одговарајућих оператора. За то време у аналитичкој геометрији се излаже афина, а затим еуклидска геометрија да би се завршило класификацијом квадрика и анализом кривих и површи другог реда. Овакав распоред има своје мане. Због недовољног фонда часова у курсу линеарне алгебре се обично не може прећи цео наставни план, а у курсу аналитичке геометрије за класично излагање координатне методе фонд је превелик. Уколико се то, међутим, третира као јединствени курс унутар кога се врши прерасподела градива, долазимо до добрих резултата. При томе се постиже више педагошких циљева: сопствене вредности оператора добијају свој геометријски садржај, еуклидска теорија се предаје тамо где јој је и место и из ње се изводе класични појмови аналитичке геометрије, излагање о квадрикама долази на крају, после општег истраживања билинеарних и квадратних функција, а Жорданова нормална форма се може завршити (што обично није случај). За курс је потребно елементарно предзнање о скуповима, функцијама и релацијама, елементарне функције (полиноми, тригонометрија) и познавање и рад са комплексним бројевима. Све ово спада у наставне планове просечних средњих школа. Па ипак, с обзиром да је упућен студентима математике, курс треба да постави пред слушаоца релативно високе захтеве и тражи одређени математички потенцијал. Ради се у ствари о деловима јединственог курса који је природно звати „Линеарна алгебра и геометрија". Овакав курс који на првој години студија реализује везу између геометрије и алгебре, успут упознајући студенте са неопходним алгебарским техникама, требало би да се у другој години природно настави у курс који остварује даљу везу између геометрије и анализе и који би се могао звати „Диференцијална геометрија".

[3] Полако се успоставља пракса да се аналитичка геометрија предаје са 1 часом у првом и 2 часа у другом семестру, што је много боље и допуњује се на тај начин са линеарном алгебром.

[4] Неки колеге оспоравају нужност таквог уводног дела, али мислим да ниједан озбиљан аргумент против тога не стоји. Напротив, без тог уводног дела сваки разговор о математичкој заснованости, кохерентности и концептуалном разумевању курса је беспредметан.

Уџбеник [7] је скромни прилог аутора процесу формирања кохерентније концепције наставе линеарне алгебре и аналитичке геометрије у нашој средини. Да би мој кредо био сасвим јасан, навешћу два дужа цитата који га добро изражавају.

> „Еуклидска геометрија у аналитичкој интерпретацији и линеарна алгебра еуклидских векторских простора су идентичне по свом суштинском математичком садржају. ... Алгебра и геометрија у математици представљају прави пример јединства супротности. Аналитичка геометрија омогућује обједињавање делова алгебре и геометрије, а да се при томе ни алгебра не губи у геометрији, ни геометрија у алгебри. ... Предмет ових предавања је Линеарна алгебра и аналитичка геометрија. Акценат је стављен на аксиоматско-дедуктивну изградњу линеарне алгебре. Због идентичности суштине математичких садржаја линеарне алгебре и аналитичке геометрије није неопходно паралелно градити дедуктивну теорију аналитичке геометрије. Сваки резултат линеарне алгебре већ има и геометријско значење. Задатак предавача је да да одговарајућу интерпретацију, помоћу геометријских представа и вежби.“ ([1] стр.145)

> „Од самог почетка излагање је аксиоматско, а геометријска интуиција се користи пропедеутички. Из јасних разлога, међу многобројним могућим системима аксиома изабрана је „векторско-тачкаста“ аксиоматика пореклом од Вајла. Тиме се објашњава досад неуобичајено рано увођење општег појма векторског простора. Искуство показује да студенти по правилу немају тешкоћа са усвајањем овог материјала. ... Аналитичка геометрија, о којој говори ова књига, не представља некакву одређену област математике, већ предмет (курс) са променљивим садржајем, који се концентрише око појма координата. ... Пре него што пређемо на аналитичку геометрију тј. координате, уводимо у геометрију поуздану аксиоматску основу. Обично се аксиоматско заснивање елементарне геометрије спроводи у духу Еуклида на појмовима тачке, праве и равни. Како показује искуство, то доводи до прилично сложене аксиоматике са двадесетак аксиома која се, што је и најгоре, не користи нигде више у математици, ни потпуно ни делимично. Много практичнија и једноставнија аксиоматика се добија ако се за основни појам узме појам вектора. Поједностављење настаје за рачун тога што векторска аксиоматика користи теорију реалних бројева, чији се велики део у теоријама еуклидског типа мора поново изводити. Сем тога, делови ове векторске аксиоматике играју у савременој математици изузетно важну улогу и њих студент мора научити пре или после. На тај начин, заснивање геометрије на појму вектора омогућује нам да једним ударцем убијемо две муве.“ ([8] стр.7)

Овде долазимо до следећег проблема у настави математике — заснивања геометрије. Свакако је неопходно да математичари у току својих студија чују начин излагања геометрије заснован на савременој аксиоматској обради класичног Еуклидовог приступа — на пример на Хилбертовој аксиоматици. Међутим, дискутабилан је моменат у коме се то код нас ради — друга година студија, као и значај који се том излагању придаје. По мом убеђењу, то не треба да буде први степен стицања строго заснованих геометријских знања, већ последњи, степен који треба да покаже историјски аспект развоја геометрије, као и да изгради једну аксиоматску теорију духа сасвим другачијег од алгебарских теорија са којима су се студенти упознали у претходном току студија. Поменута Постниковљева аргументација је врло јасна по том питању. Гледано хронолошки, аксиоматски заснована синтетичка геометрија је прва строго заснована математичка дисциплина, може се рећи прототип аксиоматске методе у математици. Међутим, инсистирање на оваквом увођењу геометрије у току студија насилно откида виталну грану геометрије из стабла математике, вештачки је изолује од осталих математичких дисциплина, а има и ефекат одбијања студената од геометрије као нечег архаичног и окошталог. Свакако да то није тако и да је геометрија у ствари најживља, може се рећи главна грана математичког стабла. Циљ наставе геометрије мора бити управо да се то покаже студентима — многостраност и важност геометрије као математичке дисциплине, а не као примера строге аксиоматизације. Наравно, и синтетичка геометрија је једна од значајних дисциплина те живе, многостране геометрије, али није и најзгоднија за презентацију примарних геометријских сазнања студентима на другој години студија. У њој не долази до изражаја структурни, унифицирајући аспект математике као науке о математичким структурама које међусобно имају много заједничког, тај структурни аспект који је постао централан у савременој математици. Свакако, потребно је имати у виду и опасност од друге крајности у настави геометрије: њено утапање у алгебри, што би било крајње лоше. Како каже Фројдентал [11]:

> „Геометрију угрожавају догматске идеје о математичкој строгости. Оне се манифестују на два начина: гутање геометрије у математичком систему као што је линеарна алгебра, или дављење геометрије крутом аксиоматиком. Стога геометрији не прети једно, већ два зла. Излаз који преостаје је дубоко море. То је безбедан излаз ако знате да пливате. У ствари, геометрију и треба учити управо као пливање.“

Желео бих да поменем основне циљеве који се постављају пред курсеве на првој години студија математике. Поред курса „Линеарна алгебра и геометрија“, са главном идејом линеарности и координатизације, ту је и курс „Анализа“ чија је главна идеја гранични процес и непрекидност. Најзад, мора бити присутан и курс „Рачунарство“, чија главна идеја у овој етапи студија треба да буде алгоритамски приступ проблемима, као и ефективан рад на рачунару. Проблем наставе рачунарства захтева посебну, дубљу анализу. Овде бих само поменуо грешку која прети код расправе о математичким знањима неопходним студентима рачунарства (и других математици блиских дисциплина). Како каже Кудрјавцев [6], та знања се не могу одредити са чисто прагматичне тачке гледишта, не водећи рачуна о унутрашњој логици саме математике. На тај начин би из Терстонове скеле били извучени важни елементи, што доводи до рушења целе зграде.

Долазимо до принципа на којима се мора базирати реализација постављених циљева наставе. Најважнији принцип мора бити: почети од најједноставнијег. Излагање мора бити просто, јасно и разумно строго. Умесно је сетити се Хилбертових савета Херману Вајлу када је овај почињао своју каријеру наставника: почни од најједноставнијег, не дозволи да рачуница на табли пређе ниво таблице множења. Своја предавања о обичним диференцијалним једначинама Хилберт би почињао исписивањем једначина

$$y'' = 0, \qquad y'' + y = 0$$

и говорио: Господо, на овим једначинама можете научити сву теорију и чак увидети разлику између задатака са почетним и граничним условима [9]. Постоји прилично распрострањен стил излагања математике на студијама, стил од општег ка посебном. Стил који из најопштије структуре која се излаже на самом почетку постепеним додавањем услова и аксиома долази до нових, специјалнијих структура које у ствари представљају главни интерес предавача и студената. Такав је рецимо приступ алгебри од групоида преко семигрупа, група итд, такав је и приступ геометрији од прве групе аксиома, апсолутне геометрије, па поступно до Плејферове аксиоме и еуклидске (и нееуклидских) геометрије. Овакав стил има неке предности, пре свега због јасноће коју постиже у каузалној организацији ткива математике: шта из чега произилази. Међутим, он има и многе недостатке, посебно ако се неумерено примењује на првим годинама студија математике. Како то врло тачно запажа Кводлинг [3]:

> „Апстракција није хормон који се може унети споља, већ га студент мора развити сам као одговор на одговарајућу стимулацију.“

Један од великих недостатака овог приступа је што се најважније структуре остављају за касније и посвећује им се релативно мање пажње. Са тим у вези је и редослед излагања појединих тема. Психолошки најбољи редослед је често сасвим другачији од логички најефикаснијег. Сви ћемо се сложити да у математичком стаблу постоји централни, најважнији део, а постоје и бочне, мање важне грančице. На пример, знање исказног рачуна и логичких таутологија неће помоћи студенту да логички мисли. Свакако да су полугрупе значајан математички објект, вредан проучавања, али у процесу учења математике групе су много важније. Исто тако, важно је знати које се геометријске чињенице могу дедуковати само из аксиома инциденције, али је много важније да студент научи еуклидску геометрију. Тај централни део математичког стабла се може детектовати на основу више критеријума. Један од основних је интердисциплинарност: најважнији су они објекти, који се користе и јављају у највећем броју главних математичких грана. Други критеријум могу бити главни трендови у савременој математици, који се очитују по раду најзначајнијих математичара нашег доба, по додељеним Филдсовим медаљама, по прегледним предавањима на међународним конгресима математичара итд. Циљ наставе математике на редовним студијама треба да буде да студента научи да ради са најважнијим структурама и, колико је могуће, приближи тим главним трендовима математике. Почети од важних структура, од централних тема, уместо од општег ка посебном: групе а не полугрупе, еуклидска геометрија а не апсолутни простори, многострукости а не детаљи опште топологије. Наравно, стил од општег ка посебном је добар код каснијих, систематских синтетичких излагања, којима је место на последипломским студијама.

На крају бих желео да поменем једну негативну појаву која постоји у организацији наставе математике. Присутно је везивање математичких курсева за поједине наставнике на основу њихових научних опредељења, затварање унутар катедарских оквира, па чак и одрицање другима компетенције за предавање курсева из појединих дисциплина. Често се према занимању за питања наставе показује сумњичавост. Опет Терстон: „није паметно мерити допринос математичара само његовим научним достигнућима“. Да ли уопште треба помињати да би сваки наставник математике морао бити у стању, уз мање или веће напоре, да предаје било који курс на редовним студијама? Друго је питање организационе и педагошке оправданости таквог поступка. Али сигурно је потребно и веома корисно да се у току своје наставне делатности сваки наставник опроба у предавању већег броја редовних курсева. Посебно је оправдан и пожељан интерес наставника за курсеве који држе његове колеге. То може само побољшати опште стање наставе на факултету. Треба обезбедити бољу комуникацију између свих носилаца и свих делова образовног система. Како каже Терстон: „Уђимо један другом у учионице!“.

Виђење наставе на првим годинама студија математике изнето у овом прилогу ће вероватно бити од многих оспоравано. Тиме ће постићи свој циљ: да подстакне размишљање о овим темама у тренутку када је пред нама реорганизација наставних планова на Математичком факултету.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Brieskorn: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Viehweg, Bonn, 1983.
[2] Н. В. Ефимов, Е. Р. Розендорн: *Линейная алгебра и многомерная геометрия*, Наука, Москва, 1974.
[3] D. A. Quadling: *Algebra, analysis, geometry*, pp 79–96 in: Robert Morris (ed.), *Studies in mathematics education*, Vol.4, UNESCO, Paris, 1984.
[4] N. Koblitz: *Mathematics under hardship conditions in the third world*, Notices AMS, 38:9, 1991, 1123–1128.
[5] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин: *Линейная алгебра и геометрия*, МГУ, Москва, 1980.
[6] Л. Д. Кудрявцев: *Современная математика и ее преподавание*, Наука, Москва, 1980.
[7] A. Lipkovski: *Linearna algebra i analitička geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1992.
[8] М. М. Постников: *Аналитическа геометрия. I семестр*, Наука, Москва, 1979.
[9] C. Reid: *Hilbert*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
[10] W. P. Thurston: *Mathematical education*, Notices AMS, 37:7, 1990, 844–850.
[11] H. Freudenthal: *Geometry between the devil and the deep blue sea*, Educational studies in mathematics. Dordrecht, Boston, 3:3/4, 413–435.