Др Весна Јевремовић

ЈЕДАН ИЗБОР ЗАДАТАКА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

Разноврсност и богатство задатака из геометрије — древне математичке дисциплине, увек привлаче решаваче. Задаци који следе представљају на одређени начин систематизацију градива из геометрије за средње школе, а могу бити корисни и као материјал за обнављање градива приликом припреме пријемног испита за Универзитет.

Задаци из планиметрије и стереометрије који се срећу на пријемном испиту су различите сложености и у зависности од тога повезују у целину мањи или већи број појмова. Из поставке задатка треба уочити све податке, њихову међусобну повезаност и одабрати неку од метода која би могла бити погодна за решавање. У току решавања треба применити једну или више „познатих“ формула: Питагорину теорему, синусну теорему, Херонов образац, ... , неку од тригонометријских формула, формуле за површину и запремину геометријских тела итд. При решавању тих задатака не налазимо само појмове из геометрије, већ се јављају и системи једначина, одређује екстремна вредност функције, рачуна збир геометријске прогресије, ...

1. У трапез $ABCD$ се може уписати круг. Дужине кракова трапеза су 3 и 5. Средња линија дели трапез на два дела чије се површине односе као $5 : 11$. Одредити основице трапеза.

Решење. Нека су основице $AB = a$ и $CD = b$. Нека је O центар круга уписаног у дати трапез и нека су X, Y, Z и U тачке у којима круг додирује странице трапеза (в. слику). Нека је MN средња линија трапеза. Имамо да је $MN = (a+b)/2$. Такође је $O \in XZ$ и $XZ \perp AB$, па је висина трапеза једнака $2r$, где је r полупречник круга. Стога $O \in MN$. Површине трапеза $ABNM$ и $MNCD$ су

$$P_{ABNM} = \frac{AB + MN}{2} \cdot r, \quad P_{MNCD} = \frac{MN + DC}{2} \cdot r.$$

Како је $P_{ABNM} = 11/5 \cdot P_{MNCD}$, добијамо да је $a = 7b$.

Пошто је дати четвороугао тангентни, збирови наспрамних страница су једнаки, па тако добијамо и $a + b = 8$. Из добијених једначина налазимо $a = 7$ и $b = 1$.

2. У оштроуглом троуглу ABC конструисане су висине AP и CQ редом на странице BC и AB. Познато је да су површине троуглова ABC и BPQ редом једнаке 18 и 2, као и да је $PQ = 2\sqrt{2}$. Одредити полупречник круга описаног око троугла ABC.

Сл. уз задатак 1

Сл. уз задатак 2

Решење. Четвороугао $AQPC$ је тетивни, па је $\angle PQB = \angle ACB$, што значи да су троуглови ABC и PBQ слични. Пошто се њихове површине односе као $1:9$, одговарајуће странице се односе као $1:3$, па је $AC = 3\cdot PQ = 6\sqrt{2}$. Према синусној теореми је

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle ABC},$$

где је R полупречник круга описаног око троугла ABC. Да бисмо одредили AC, уочимо да је (уз стандардне ознаке $a = BC$, $c = AB$, $\beta = \angle ABC$):

$$P_{PQB} = \frac{1}{2}\cdot PB\cdot QQ' = \frac{1}{2}ac\cos^2\beta\sin\beta,\quad P_{ABC} = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Одатле је $\cos^2\beta = 1/9$, $\sin\beta = \sqrt{8}/3$, па је $R = 9/2$.

3. Дуж KL је пречник круга. Тачке P и Q су на истом луку KL, а X је пресек KP и LQ. Ако је $\angle PKL = \pi/3$ и $PX = XQ = 1$, одредити KL.

Решење. Имамо да је троугао KLP правоугли и да је

$$KL^2 = PK^2 + PL^2. \tag{1}$$

Међутим, троугао KOP је једнакостранични, па је $KP = KL/2$. Остаје да се одреди PL. Како је четвороугао $KLQP$ тетивни, збир наспрамних углова му је π, па добијамо да је $\angle PQL = 2\pi/3$. Стога је $\angle PQX = \pi/3$, а како је троугао PQX једнакокраки, следи да је и једнакостранични. Тако налазимо да је $PL/PX = \operatorname{tg}\pi/3 = \sqrt{3}$, доносно $PL = \sqrt{3}$. Заменом у (1) добијамо $KL = 2$.

Напомена: докажите да X не може бити унутрашња тачка датог круга.

4. У троуглу је један угао једнак разлици друга два, а најмања страница је дужине 1. Збир површина квадрата конструисаних над друге две странице троугла је двапут већи од површине круга описаног око тог троугла. Одредити остале странице троугла.

Решење. Нека су α, β и γ углови троугла. Имамо да је $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ и да је $\beta = \gamma - \alpha$, па добијамо $\gamma = \pi/2$. Дакле, троугао је правоугли, па је центар

Сл. уз задатак 3 Сл. уз задатак 4

описаног круга средиште хипотенузе. Нека су a, b и c странице тог троугла и нека је c хипотенуза, а $b = 1$ најмања страница. Важи:

$$c^2 + a^2 = 2 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi \quad \text{и} \quad 1^2 + a^2 = c^2.$$

Одатле добијамо:

$$a = \sqrt{\frac{\pi - 2}{4 - \pi}}, \quad c = \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}.$$

5. У једнакокраком троуглу ABC са основицом AB је $\angle B = \operatorname{arctg} \dfrac{8}{15}$. Круг полупречника 1 додирује краке троугла, а основицу сече у тачкама K и E. Одредити површину троугла KMB ако је $MB = 15/8$, а тачке A, K, E, B су у наведеном редоследу на AB и $M \in BC$.

Решење. Из правоуглог троугла OMB закључујемо да је $\angle OBM = \angle ABM$ и да је тачка O на дужи AB. При томе је O средиште дужи AB. Тражена површина је једнака збиру површина троуглова OMB и KOM . Имамо да је

$$P_{OMB} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot MB = \frac{15}{16}.$$

Површина троугла KOM је $\frac{1}{2}\cos\beta$. Пошто знамо $\operatorname{tg}\beta$, можемо израчунати $\cos\beta = 15/17$. Површина троугла KMB је $375/272$.

На техничким факултетима (а од ове године и на Математичком факултету у Београду) задаци за пријемни испит су у облику теста, са понуђеним одговорима. Ако је у питању неки рачунски задатак, понуђени одговори на први поглед нису нетачини, па се израчунавање мора спровести. Ако је у питању неко тврђење чију тачност треба доказати или оповргнути, анализа понуђених одговора може да помогне при решавању задатка. Следећи задатак илуструје наведену ситуацију (тачан одговор треба заокружити).

6. Пречник AB круга са центром O једнак је 10. На пречнику AB су изабране тачке C и D, тако да је $AC = BD = 4$. Нека је P произвољна тачка на кругу. Збир $CP + PD$

Сл. уз задатак 5

Сл. уз задатак 6

(а) има исту дужину за сваки положај тачке P,
(б) има дужину већу од 10 за сваки положај тачке P,
(в) није већи од 10,
(г) најкраћи је ако је троугао CDP правоугли,
(д) најдужи је ако је $CP = PD$.

Решење. Ако је $P = B$, збир је 10, а ако је $PO \perp AB$, тада је $CP = PD > 5$, па је збир већи од 10. Стога одбацујемо одговоре (а), (б) и (в). Да бисмо утврдили који је од преосталих одговора тачан, изразићемо тражени збир у функцији од α (в. слику). Добијамо, применом косинусне теореме:

$$CP + PD = \sqrt{26 + 10\cos\alpha} + \sqrt{26 - 10\cos\alpha}.$$

Први извод ове функције је једнак 0 за $\cos\alpha = 0$, и пошто је први извод позитиван ако је $\cos\alpha < 0$, а негативан за $\cos\alpha > 0$, закључујемо да је максимум посматране функције за $\cos\alpha = 0$, што значи да је збир највећи ако је $PO \perp AB$, односно ако је $CP = PD$. Дакле, тачан је одговор (д).

7. Дата је тространа пирамида $ABCD$ чија бочна ивица $AD = \sqrt{12}$ гради угао $\pi/3$ са равни основе. Странице троугла ABC ду једнаке 3, 4, и 5. Пирамида је пресечена једном равни која је паралелна равни основе, тако да је најмања страница добијеног пресека једнака 1. Одредити запремину добијене зарубљене пирамиде.

Решење. Нека је DD' висина пирамиде. Из правоуглог троугла DAD' налазимо $DD' = 3$. Тако добијамо да је запремина дате пирамиде 6. Пошто су троугао ABC и пресечни троугао $A_1B_1C_1$ слични, а однос њихових одговарајућих страница 3, значи да се запремина дате пирамиде према запремини пирамиде $DA_1B_1C_1$ односи као $27 : 1$, па добијамо да је тражена запремина $52/9$.

Исти задатак можемо формулисати као задатак за тест, са понуђеним одговорима. Такође можемо мењати $\angle DAD'$, тако да се $\sin\angle DAD'$ може израчунати. Задатак може бити сложенији или једноставнији и у зависности од тога којим елементима је задат троугао ABC. Једна од варијанти задатка била би да су задати углови $\angle DAB = \angle DAC$ и угао CAB. У том случају се применом теореме о три нормале може одредити висина пирамиде $ABCD$. Уместо зарубљене пирамиде можемо захтевати да се одреди запремина призме која се добија кад се $A_1B_1C_1$ пројектује (ортогонално или косо, нпр. A_1 се пројектује у тачку A).

Постављање и решавање разноврсних задатака на основу једног, подстаћи ће и ученике на размишљање и упућивати их на самосталан и креативан рад какав је и потребан будућем студенту. Наводимо још један пример који може бити основа за већи број задатака.

8. Дата је тространа пирамида $ABCD$ и тачке $A_1, A_2, \ldots$ на AD. При том је $DA_k = DA/2^k$. Кроз тачке $A_1, A_2, \ldots$ постављене су равни паралелне равни основе и тако су добијени пресеци $A_kB_kC_k$, $k \in \mathbf{N}$. Одредити збир запремина пирамида $DA_kB_kC_k$, $k \in \mathbf{N}$.

Решење. Нека је V_k запремина пирамиде $A_kB_kC_kD$, а V запремина дате пирамиде. На основу сличности имамо

$$V_k = \left(\frac{1}{2^k}\right)^3 V = \left(\frac{1}{2^3}\right)^k V,$$

па је збир свих запремина једнак

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^k V = \frac{V}{7}.$$

Уместо збира запремина свих пирамида може се захтевати одређивање збира запремина лопти описаних око тих пирамида, можемо одредити збир површина свих пирамида, можемо на разне начине задавати поделу дужи AD.