Миодраг Пешић

О ЈЕДНОМ ИТЕРАТИВНОМ ПОСТУПКУ

Релација једнакости, чини се, доста је фаворизована у односу на релације неједнакости. На нивоу средње школе за то, мора се рећи, постоје крајње оправдани разлози, али исто тако стоји да је и на том нивоу потребно посветити више пажње неједнакостима. Отуда радује сазнање да су новим програмима математике (за разлику од неких претходних) за гимназију и све стручне школе предвиђене наставне јединице које треба посветити важнијим неједнакостима. Овде ћемо размотрити један итеративни поступак који се надовезује на познате чињенице о неједнакостима између познатих средина.

Нека су a, b позитивни реални бројеви. Формирајмо низове (a_n) (аритметичко-хармонијски) и (b_n) (хармонијско-аритметички) на следећи начин:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \frac{2ab}{a+b}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad \text{за } n \geqslant 1.$$

1. За низове (a_n) и (b_n) важи $a_n \geqslant b_n$ за свако n.

Доказ. Ово је директна последица односа аритметичке и хармонијске средине два броја $\left(\dfrac{x+y}{2} \geqslant \dfrac{2xy}{x+y}\right.$, за $x,\ y > 0)$.

2. Низ (a_n) је монотоно опадајући, а низ (b_n) монотоно растући.

Доказ. На основу **1**. имамо да је:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} = a_n, \quad \text{те је } (a_n) \text{ опадајући,}$$
$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \geqslant \frac{2a_n b_n}{a_n + a_n}, \quad \text{те је } (b_n) \text{ растући.}$$

На основу **1**. и **2**. низови (a_n) и (b_n) су ограничени и монотони, те су као такви конвергентни. Покажимо да имају исту граничну вредност и да је то $\sqrt{ab}$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}.$$

Заиста, с једне стране је

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \leqslant \frac{1}{2}(a_n - b_n), \end{aligned}$$

јер је $0 \leqslant \dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n} < 1$, одакле индуктивно следи $a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} |a - b|$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} |a-b| = 0$, то је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

С друге стране је

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\,\frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n = \cdots = a_1b_1 = ab,$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = ab$. На основу претходног закључујемо да је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}.$$

Као прву примену наведимо рачунање квадратног корена до унапред дате тачности. Пошто низ (a_n) са горње, а низ (b_n) са доње стране апроксимира $\sqrt{ab}$, то је за налажење вредности $\sqrt{ab}$ са k тачних децимала довољно да се a_n и b_n поклопе до те децимале.

Пример. Израчунати $\sqrt{15}$ са тачношћу до пет децимала.

$$\begin{aligned}
&15 = 5 \cdot 3, \qquad a = 5, \quad b = 3; \\
&a_1 = \frac{5+3}{2} = 4, && b_1 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{5+3} = 3{,}75; \\
&a_2 = \frac{4 + 3{,}75}{2} = 3{,}875, && b_2 = \frac{30}{4 + 3{,}75} = 3{,}87097; \\
&a_3 = \frac{3{,}875 + 3{,}87097}{2} = 3{,}87298, && b_3 = \frac{30{,}00002}{3{,}875 + 3{,}87097} = 3{,}87298.
\end{aligned}$$

Зато је $\sqrt{15} = 3{,}87298 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-5}$.

Као друго, поменимо да је у оквиру програма Рачунарства и информатике планиран и појам итеративног програмског циклуса. Као једини пример дата је Њутнова итеративна формула за рачунање $\sqrt{x}$. Отуда се дати поступак може искористити као сасвим нов пример за вежбу, а у исто време и за упоређивање, јер се њиме решава исти проблем. Дајемо и алгоритам којим се са задатом тачношћу ε рачуна $\sqrt{x}$, где смо у улазу одредили a и b и где смо у случају да поступак споро конвергира предвидели максимални број итерација $n_{\max}$.

ПОЧЕТАК

x

$x \leqslant 0$

a, b

$a \leqslant 0$

$b \leqslant 0$

$ab \neq x$

$\varepsilon, n_{\max}$

$\varepsilon \leqslant 0$

$n_{\max} \leqslant 0$

$n_{\max} \neq [n_{\max}]$

$\boxed{i = 1}$

$$\boxed{k_1 = \frac{a+b}{2}}$$

$$\boxed{k_2 = \frac{2ab}{a+b}}$$

$|k_1 - k_2| \leqslant \varepsilon$

$i = n_{\max}$

$\boxed{i = i + 1}$

$\boxed{a = k_1}$

$\boxed{b = k_2}$

$x, n_{\max}$, КОМ.

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

x, k, ε, i

КРАЈ