MATEMATIČKI VESNIK
МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
71, 4 (2019), 304–315
December 2019

research paper
оригинални научни рад

ANALYSE NUMÉRIQUE DES POINTS DE TAKENS-BOGDANOV DANS UN MODÈLE PROIE-PRÉDATEUR AVEC RETARD

V. D. Mabonzo, R. Eyélangoli Okandzé and F. D. Langa

Abstract. Le but de cet article est d'analyser le point de Takens-Bogdanov dans un modèle proie-prédateur avec retard.

1. Introduction

Dans cet article, nous analysons les points de Takens-Bogdanov pour l'équation différentielle à retard

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), \lambda, \mu), \tag{1}$$

où λ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont des paramètres, $\tau > 0$ est le paramètre temps. Ces équations ont été largement étudiées car elles donnent souvent descriptions plus précises pour les phénomènes dans la nature et l'ingénierie en tenant compte non seulement de l'état actuel mais aussi leurs histoires (voir [2, 3, 6, 13] etc.).

La bifurcation de Takens-Bogdanov est l'une des bifurcations les plus importantes dans les équations différentielles. Elle explique le mécanisme de la brache de point de Hopf.

Considérons l'équation différentielle ordinaire paramètrée suivante

$$\dot{x} = f(x, \lambda, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continûment différentiable avec $f(x^0, \lambda^0, \mu^0)=0$, i.e. x^0 est un point d'équilibre de l'équation (2) pour $\lambda = \lambda^0$ et $\mu = \mu^0$.

Définition 1.1 ([13]). (x^0, λ^0, μ^0) est appelé point de Takens-Bogdanov pour l'équation (2), si

(i) $f(x^0, \lambda^0, \mu^0) = 0$; (ii) $\exists\ \varphi_0 \in \mathbb{R}^n; \ker(f_x^0) = \text{span}\{\varphi_0\}, \varphi_0 \neq 0$;
(iii) $Im(f_x^0) = \{y \in \mathbb{R}^n, \psi_0^T y = 0\}$; (iv) $\varphi_0 \in Im(f_x^0)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K18, 65P30, 65L03
Keywords and phrases: Bogdanov-Takens bifurcation; prey-predator model with delay; delay systems; Newton iteration.

Les conditions de la Définition 1.1 impliquent l'existence de $\varphi_1 \in M$ et $\psi_1 \in M_1$, tel que

$$\begin{cases} f_x^0 \varphi_1 + \varphi_0 = 0, \\ l_0^T \varphi_1 = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (f_x^0)^T \psi_1 + \psi_0 = 0, \\ \psi_1^T w_0 = 0, \end{cases}$$

où $\mathbb{R}^n = \ker(f_x^0) \oplus M$, $\mathbb{R}^n = \ker((f_x^0)^T) \oplus M_1$, $l_0^T \varphi_1 = 0$ est équivalent à $\varphi_1 \in M$, $\psi_1^T w_0 = 0$ est équivalent à $\psi_1 \in M_1$.

Définition 1.2 ([13]). (x^0, λ^0, μ^0) est un point quadratique de Takens-Bogdanov pour l'équation (2), s'il est point de Takens-Bogdanov, et vérifie les conditions suivantes ;

(i) $\psi_0^T f_\lambda^0 \neq 0$;

(ii) $\bar{d}_0 = \det \begin{pmatrix} \psi_0^T A \varphi_0 & \psi_0^T B \varphi_0 \\ \psi_0^T A \varphi_1 + \psi_1^T A \varphi_0 & \psi_0^T B \varphi_1 + \psi_1^T B \varphi_0 \end{pmatrix} \neq 0\,$;

(iii) $\psi_0^T \varphi_1 \neq 0$;

avec $A = f_{xx}^0 \varphi_0$, $B = f_{xx}^0 \nu_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} f_{x\lambda}^0 + f_{x\mu}^0$, $c_{\lambda\mu} = -\dfrac{\psi_0^T f_\mu^0}{\psi_0^T f_\lambda^0}$, $\nu_{\lambda\mu}$ vérifiant $f_x^0 \nu_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} f_\lambda^0 + f_\mu^0 = 0$, $l_0^T \nu_{\lambda\mu} = 0$.

Le système associé au point quadratique de Takens-Bogdanov pour l'équation (2) se définit alors par

$$F_1(u_1) = \begin{pmatrix} f(x, \lambda, \mu) \\ f_x(x, \lambda, \mu)\varphi \\ f_x(x, \lambda, \mu)\xi + \varphi \\ l_0^T \varphi - 1 \\ l_0^T \xi \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

où $u_1 = (x, \varphi, \xi, \lambda, \mu)^T \in Y = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u_1^0 = (x^0, \varphi_0, \varphi_1, \lambda^0, \mu^0)^T$, $F_1 : Y \to Y$.

Théorème 1.3 ([13]). *Supposons* (x^0, λ^0, μ^0) *est un point quadratique de Takens-Bogdanov de l'équation* (2). *Alors* $F_1(u_1)$ *est régulier pour* $u_1 = u_1^0$.

Le Théorème 1.3 indique que les méthodes d'itérations classiques, comme la méthode de Newton, convergent localement vers le point quadratique de Takens-Bogdanov de l'équation (2) lorsqu'elles sont appliquées au système (3).

Les théories générales des équations différentielles à retard (EDR) montrent que l'équation (1) peut-être vue comme un abstrait d'équations différentielles ordinaires (EDO) [4]. On doit définir les points quadratiques de Takens-Bogdanov pour l'équation (1) dans le même sens que le cas des EDO, mais pas en donnant une autre définition indépendante. Par conséquent, le système élargi pour les points quadratiques de Takens-Bogdanov en (1) doit être défini dans un quelconque espace de Banach et nous obtenons un système de dimension infinie (cf. Section 2 pour les détails). Si l'on désire résoudre directement un tel système, il faut faire une certaine discrétisation et l'erreur de discrétisation ne peut pas être évitée. Basé sur les descriptions de l'espace propre associé au valeur propre double zéro, nous réduisons le système élargi à une équation algébrique non linéaire de dimension finie pour éviter de le discrétiser directement. Le point quadratique de Takens-Bogdanov, avec certaines valeurs des paramètres, s'avère être la solution régulière du système élargi réduit. Par conséquent, les points quadratiques de Takens-Bogdanov des EDR peuvent être obtenus numériquement en appliquant les méthodes classiques d'itération au système élargi réduit.

Cet article est structuré comme suit. En représentant les EDR comme un abstrait des EDO dans la Section 2, nous définissons les points quadratiques de Takens-Bogdanov et présentons un système élargi pour les points quadratiques de Takens-Bogdanov aux EDR basées sur les méthodes décrites ci-dessus. Dans Section 3, en utilisant les descriptions de l'espace propre associé à la valeur propre double zéro, nous simplifions les conditions pour déterminer les points quadratiques de Takens-Bogdanov des EDR, le système élargi obtenu à la Section 2 est réduit à la dimension finie 1, ce qui est prouvé pour être un système régulier aux points quadratiques de Takens-Bogdanov de sorte que le système soit résolu par la méthode classique d'itérations de Newton. Pour montrer l'efficacité de notre méthode, une expérience numérique est réalisée pour un système proie-prédateur avec un retard de temps dans la dernière section.

2. Système régulier des points de Takens-Bogdanov dans les espaces de Banach

Dans la suite, nous considérons l'équation différentielle à retard suivante en posant $\tau = 1$ dans (1) :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-1), \lambda, \mu), \tag{4}$$

où λ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont des paramètres, $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, y, \lambda, \mu)$ est une fonction de classe $C^r (r \geq 2)$ définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit x^0 le point d'équilibre de $f(x(t), x(t-1), \lambda, \mu)$ dont les paramètres ont pour valeur $(\lambda, \mu) = (\lambda^0, \mu^0)$. L'équation (4) peut-être linéarisée au point (x^0, λ^0, μ^0) sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f_1^0(x(t) - x^0) + f_2^0(x(t-1) - x^0), \tag{5}$$

avec $f_1^0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0, x^0, \lambda^0, \mu^0)$ et $f_2^0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0, x^0, \lambda^0, \mu^0)$.

Soient $C = C([-1; 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[-1; 0]$ vers $\mathbb{R}^n$ muni de la norme définie telle que pour $\phi \in C$,

$$\|\phi\| = \max_{\theta \in [-1,0]} |\phi(\theta)| \qquad (|\cdot| \text{ la norme dans } \mathbb{R}^n),$$

et

$$\eta_{\lambda\mu}(\theta) = \begin{cases} f_1(x^0, x^0, \lambda, \mu) + f_2(x^0, x^0, \lambda, \mu), & \theta = 0 \\ f_2(x^0, x^0, \lambda, \mu), & \theta \in (-1, 0) \\ 0, & \theta = -1 \end{cases}$$

où η est une fonction matricielle de variable θ. Sachant que

$$\int_{-1}^{0} d\eta_{\lambda,\mu}(\theta)(x_t(\theta)-x^0) = f_1(x^0,x^0,\lambda,\mu)(x(t)-x^0) + f_2(x^0,x^0,\lambda,\mu)(x(t-1)-x^0)$$

avec $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, alors l'opérateur linéaire L de C dans $\mathbb{R}^n$ défini par $L_{\lambda,\mu}x_t = \int\limits_{-1}^{0} d\eta_{\lambda,\mu}(\theta)x_t(\theta)$ est borné.

Avec les notations ci-dessus, l'équation (4) peut-être assimilée á une équation différentielle des fonctions retardées du type $\dot{x}(t) = L_{\lambda,\mu}(x_t - x^0) + F(x_t - x^0, \lambda, \mu)$ où F est une fonction non linéaire de classe $C^r(r \geq 2)$ définie de C vers $\mathbb{R}^n$ par $F(x_t - x^0, \lambda, \mu) = f(x(t), x(t-1), \lambda, \mu) - L_{\lambda,\mu}(x_t - x^0)$. L'équation (5) engendre un C_0-semi-groupe $\{T(t), t \geqslant 0\}$ sur C avec le générateur infinitésimal $\mathcal{A}_0 : C \to C$ défini par $\mathcal{A}_0\phi = \dot{\phi}$, $D(\mathcal{A}_0) = \left\{\phi \in C^1([-1,0],\mathbb{R}^n); \dot{\phi}(0) = \int_{-1}^{0} d\eta_{\lambda^0,\mu^0}(\theta)\phi(\theta)\right\}$. L'équation caractéristique de l'équation (5) est donnée par $\det(zI - f_1^0 - f_2^0 e^{-z}) = 0$. Considérons $C^* = C([0,1],\mathbb{R}^{n*})$ l'espace adjoint de C. Le produit scalaire dans la dualité $C^* \times C$ est défini par [4]

$$(\psi,\phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)d\eta_{\lambda^0,\mu^0}(\theta)\phi(\xi)d\xi. \tag{6}$$

L'équation (4) peut-être considérée comme l'abstrait des EDO dans C [4] :

$$\frac{d}{dt}u = G(u,\lambda,\mu), \tag{7}$$

où
$$G(u,\lambda,\mu)(\theta) = \begin{cases} L_{\lambda,\mu}u + F(u,\lambda,\mu), & \theta = 0 \\ \dot{u}(\theta), & \theta \in [-1,0] \end{cases}$$

et le domaine de G est $\{u \in C^1 : \dot{u}(\theta) = L_{\lambda,\mu}u + F(u,\lambda,\mu)\}$.

En appliquant les Définitions 1.1 et 1.2 à l'équation (7) nous obtenons les descriptions des points quadratiques de Takens-Bogdanov, où la fonction f est remplacée par G, l'espace $\mathbb{R}^n$ est remplacé par C et le produit scalaire est remplacé par la forme bilinéaire adjoint (6), etc. Précisement, nous avons des propositions suivantes

Proposition 2.1. (u^0,λ^0,μ^0) *est appelé point de Takens-Bogdanov pour l'équation* (7), *si*

(i) $G(u^0,\lambda^0,\mu^0) = 0$; *(ii)* $\ker(G_u^0) = \mathrm{span}\{\phi_1\}, \phi_1 \neq 0$;
(iii) $Im(G_u^0) = \{\nu \in C, (\psi_2,\nu) = 0\}$; *(iv)* $\phi_1 \in Im(G_u^0)$.

La condition (iv) de la Proposition 2.1 est équivalente à $(\psi_2,\phi_1) = 0$, et il existe $\psi_1 \in C^*$ et $\phi_2 \in C$ tel que $(G_u^0)^*\psi_1 + \psi_2 = 0$, $(\psi_1,\tilde{w}_0) = 0$, $G_u^0\phi_1 + \phi_1 = 0$, $(\tilde{l}_0,\phi_2) = 0$, avec $\tilde{w}_0 \in C$ et $\tilde{l}_0 \in C^*$ vérifiant les relations $(\phi_2,\tilde{w}_0) - 1 = 0$, $(\tilde{l}_0,\phi_1) - 1 = 0$.

Proposition 2.2. (u^0,λ^0,μ^0) *est un point quadratique de Takens-Bogdanov pour l'équation* (7), *si*

(i) $(\psi_2, G_\lambda^0) \neq 0$;

(ii) $d_0 = \det\begin{pmatrix} (\psi_2,A\phi_1) & (\psi_2,B\phi_1) \\ (\psi_2,A\phi_2)+(\psi_1,A\phi_1) & (\psi_2,B\phi_2)+(\psi_1,B\phi_1)\end{pmatrix} \neq 0$;

(iii) $(\psi_2, \phi_2) \neq 0$ *;*
où $A = G^0_{uu}\phi_1, B = G^0_{uu}\nu_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu}G^0_{u\lambda} + G^0_{u\mu}$ *avec* $c_{\lambda\mu} = \frac{(\psi_2, G^0_\mu)}{(\psi_2, G^0_\lambda)}$ *et* $\nu_{\lambda\mu}$ *satisfait la relation* $G^0_u\nu_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu}G^0_\lambda + G^0_\mu = 0$, $(\tilde{l}_0, \nu_{\lambda\mu}) = 0$.

Basé sur les propositions ci-dessus, le système élargi aux points quadratique de Takens-Bogdanov pour l'équation (7) est

$$F_2(u_2) = \begin{pmatrix} G(u,\lambda,\mu) \\ G_u(u,\lambda,\mu)e_1 \\ G_u(u,\lambda,\mu)e_2 + e_1 \\ (\tilde{l}_0, e_1) - 1 \\ (\tilde{l}_0, e_2) \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

où $u_2 = (u, e_1, e_2, \lambda, \mu)^T \in Y = C \times C \times C \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F_2 : Y \to Y$.

THÉORÈME 2.3. *Soit* (u^0, λ^0, μ^0) *un point quadratique de Takens-Bogdanov de l'équation* (7)*. Alors* $F_2(u_2)$ *est régulier au point* $u^0_2 = (u^0, \phi_1, \phi_2, \lambda^0, \mu^0)^T$*.*

Preuve. La preuve est presque similaire à celle du Théorème 1.3.

En effet, notons que $x^0 \in \mathbb{R}^n$ peut être vu comme élément spécial dans l'espace C, on a $G(x^0, \lambda^0, \mu^0) = 0$ si $f(x^0, x^0, \lambda^0, \mu^0) = 0$, et vice versa. Donc, les points quadratiques de Takens-Bogdanov pour l'équation (4) peuvent être obtenus en résolvant numériquement l'équation non linéaire (8). □

3. Simplification du système élargi

Le système élargi (8) est défini dans un espace de Banach, si nous nous permetons de le résoudre directement, nous allons rencontrer d'énormes difficultés. L'espace C doit d'abord être discrétisé chaque fois que des méthodes numériques sont appliquées. Cela doit stocker une grande quantité des données et provoque l'erreur de discrétisation sans doute, ce qui n'est pas attendu sûrement. Une autre grande difficulté réside dans la forme de la fonction $G(u, \lambda, \mu)$ qui doit être traitée par morceaux.

Dans cette section, nous allons réduire (8) à une forme équivalente, qui a une dimension finie et qui peut être résolue facilement.

D'abord, notons que $G^0_u\phi = \mathcal{A}_0\phi$ pour $\phi \in C$ et le fait que $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ remplit $f(x^0, x^0, \lambda^0, \mu^0) = 0$ et $G^0_u(x^0, \lambda^0, \mu^0) = 0$ simultanément, nous obtenons le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. (x^0, λ^0, μ^0) *est dit point de Takens-Bogdanov pour l'équation* (4)*, si et seulement si*
(i) $f(x^0, x^0, \lambda^0, \mu^0) = 0$ *;* *(ii)* $\ker(\mathcal{A}_0) = \mathrm{span}\{\phi_1\}, \phi_1 \neq 0$ *;*
(iii) $Im(\mathcal{A}_0) = \{\gamma \in C, (\psi_2, \gamma) = 0\}$ *;* *(iv)* $\phi_1 \in Im(\mathcal{A}_0)$*.*

La condition (iv) du Théorème 3.1 est équivalente á $(\psi_2, \phi_1) = 0$, et il existe $\phi_2 \in \overline{M}$ et $\psi_1 \in \overline{M_1}$ tel que $\mathcal{A}_0\phi_2 + \phi_1 = 0$, $(l, \phi_2) = 0$, $\mathcal{A}^*_0\psi_1 + \psi_2 = 0$, $(\psi_1, \varpi) = 0$, où $C = \ker(\mathcal{A}_0) \oplus \overline{M}, C = \ker(\mathcal{A}_0^*) \oplus \overline{M}_1, (l, \phi_2) = 0$ est équivalent á $\phi_2 \in \overline{M}$ pour $l = l_1 - sl_2, s \in [0,1]$; $(\psi_1, \varpi) = 0$ est équivalent á $\psi_1 \in \overline{M}_1$.

En effet, le Théorème 3.1 revient á dire que $\mathcal{A}_0$ a pour valeur propre double zéro. Si l'on note P l'espace invariant de $\mathcal{A}_0$ associé á la valeur propre zéro et P^* l'espace dual de P, ils peuvent être descrits comme suit.

Lemme 3.2. *Les bases de P et P^* vérifient les représentations suivantes :*

$$\begin{aligned} P =& \text{span}\{\Phi\}, & \Phi(\theta) =& (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)), & -1 \leqslant& \theta \leqslant 0 \\ P^* =& \text{span}\{\Psi\}, & \Psi(s) =& col(\psi_1(s), \psi_2(s)), & 0 \leqslant& s \leqslant 1 \end{aligned}$$

avec $\phi_1(\theta) = \phi_1^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \phi_2(\theta) = \phi_2^0 + \phi_1^0\theta, \phi_2^0 \in \mathbb{R}^n$ *et* $\psi_2(s) = \psi_2^0 \in \mathbb{R}^{n*} \setminus \{0\}$, $\psi_1(s) = \psi_1^0 - s\psi_2^0, \psi_1^0 \in \mathbb{R}^{n*}$, *ce qui satisfait à :*

$$\begin{gathered} (a)\ (f_1^0 + f_2^0)\phi_1^0 = 0, \quad (b)\ (f_1^0 + f_2^0)\phi_2^0 = (f_2^0 + I)\phi_1^0, \quad (c)\ \psi_2^0(f_1^0 + f_2^0) = 0, \\ (d)\ \psi_1^0(f_1^0 + f_2^0) = \psi_2^0(f_2^0 + I), \quad (e)\ \psi_1^0\phi_1^0 - \frac{1}{2}\psi_2^0 f_2^0 \phi_1^0 + \psi_1^0 f_2^0 \phi_1^0 = 1, \\ (f)\ \psi_1^0\phi_2^0 - \frac{1}{2}\psi_1^0 f_2^0 \phi_1^0 + \psi_1^0 f_2^0 \phi_2^0 + \frac{1}{6}\psi_2^0 f_2^0 \phi_1^0 - \frac{1}{2}\psi_2^0 f_2^0 \phi_2^0 = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Ici, nous pourrons déterminer le vecteur ϕ_1^0, ψ_2^0 par (a) et (c),respectivement, jusqu'á quelque facteurs constants ; puis nous pourrons déterminer ϕ_2^0, ψ_1^0 par (b) et (d), respectivement. Cependant (e) et (f) sont utilisées pour déterminer les cœfficients des vecteurs ϕ_1^0 et ψ_2^0.

Comme dans la Définition 1.2, nous pourrons démontrer la régularité du systeme en passant par la définition du point quadratique de Takens-Bogdanov pour les équations différentielles à retard.

Théorème 3.3. (x^0, λ^0, μ^0) *est dit point quadratique de Takens-Bogdanov pour les équations différentielles à retard (4), si (x^0, λ^0, μ^0) est un point de Takens-Bogdanov, et*
(i) $\psi_2^0 f_\lambda^0 \neq 0$;
(ii) $d_0 = \det \begin{pmatrix} \psi_2^0(A_1+A_2)\phi_1^0 & \psi_2^0(B_1+B_2)\phi_1^0 \\ \psi_1^0(A_1+A_2)\phi_1^0 + \psi_2^0(A_1+A_2)\phi_2^0 - \psi_2^0 A_2 \phi_1^0 & \psi_1^0(B_1+B_2)\phi_1^0 + \psi_2^0(B_1+B_2)\phi_2^0 - \psi_2^0 B_2 \phi_1^0 \end{pmatrix} \neq 0$;
(iii) $\psi_2^0\phi_2^0 - \frac{1}{2}\psi_2^0 f_2^0 \phi_1^0 + \psi_2^0 f_2^0 \phi_2^0 \neq 0$;
avec $A_1 = (f_{11}^0 + f_{12}^0)\phi_1^0$, $A_2 = (f_{21}^0 + f_{22}^0)\phi_1^0$, $B_1 = (f_{11}^0 + f_{12}^0)\nu_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} f_{1\lambda}^0 + f_{1\mu}^0$, $B_2 = (f_{21}^0 + f_{22}^0)\nu_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} f_{2\lambda}^0 + f_{2\mu}^0$, $c_{\lambda\mu} = -\dfrac{\psi_2^0 f_\mu^0}{\psi_2^0 f_\lambda^0}$, $\nu_{\lambda\mu}$ *satisfait à* $(f_1^0 + f_2^0)\nu_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} f_\lambda^0 + f_\mu^0 = 0$, $\psi_2^0 \nu_{\lambda,\mu} = 0$.

Preuve. Nous avons juste besoin de montrer que les conditions correspondantes dans la Proposition 2.1 et le Théorème 3.3 sont équivalentes. D'abord, nous montrons que les conditions (i) dans la Proposition 2.1 et le Théorème 3.3 sont équivalentes, i.e. $(\psi_2, G_\lambda^0) \neq 0 \iff \psi_2^0 f_\lambda^0 \neq 0$. Notons que

$$G_\lambda^0 = \begin{cases} f_\lambda^0, & \theta = 0, \\ 0, & \theta \in [-1, 0] \end{cases}$$

et $\frac{d}{d\lambda}\dot{u}(\theta) = 0$ pour $\theta \in [-1, 0]$, on obtient

$$(\psi_2, G^0_\lambda) = \psi_2(0) f^0_\lambda - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi_2(\xi - \theta)[d\eta_{\lambda^0,\mu^0}(\theta)] G_\lambda(u^0, \lambda^0, \mu^0)(\xi) d\xi = \psi^0_2 f^0_\lambda.$$

En outre, $(\psi_2, \phi_2) = \psi^0_2\phi^0_2 - \frac{1}{2}\psi^0_2 f^0_2 \phi^0_1 + \psi^0_2 f^0_2 \phi^0_2$, ceci confirme que les conditions (iii) de la Proposition 2.1 et Théorème 3.3 sont équivalentes. Ensuite, nous montrons que les conditions (ii) dans la Proposition 2.1 et Théorème 3.3 sont équivalentes, et ça sera un calcul fastidieux. D'abord, on a

$$\begin{aligned}(\psi_2, A\phi_1) =& (\psi_2, G^0_{uu}\phi_1\phi_1)\\ =& \psi^0_2(f^0_{11}\phi_1(0)\phi_1(0) + f^0_{12}\phi_1(0)\phi_1(-1) + f^0_{21}\phi_1(-1)\phi_1(0) + f^0_{22}\phi_1(-1)\phi_1(-1))\\ =& \psi^0_2(f^0_{11}\phi^0_1\phi^0_1 + f^0_{12}\phi^0_1\phi^0_1 + f^0_{21}\phi^0_1\phi^0_1 + f^0_{22}\phi^0_1\phi^0_1)\\ =& \psi^0_2(f^0_{11} + f^0_{12} + f^0_{21} + f^0_{22})\phi^0_1\phi^0_1 = \psi^0_2(A_1 + A_2)\phi^0_1. \end{aligned} \tag{10}$$

De façon analogique, on a

$$\begin{aligned}(\psi_2, B\phi_1) =& (\psi_2, G^0_{uu}\nu_{\lambda\mu}\phi_1 + c_{\lambda\mu}G^0_{u\lambda}\phi_1 + G^0_{u\mu}\phi_1)\\ =& \psi^0_2(f^0_{11} + f^0_{12} + f^0_{21} + f^0_{22})\nu_{\lambda\mu}\phi^0_1 + \psi^0_2(f^0_{1\lambda} + f^0_{2\lambda})c_{\lambda\mu}\phi^0_1 + \psi^0_2(f^0_{1\mu} + f^0_{2\mu})\phi^0_1\\ =& \psi^0_2[((f^0_{11} + f^0_{12} + f^0_{21} + f^0_{22})\nu_{\lambda\mu}) + (f^0_{1\lambda} + f^0_{2\lambda})c_{\lambda\mu} + (f^0_{1\mu} + f^0_{2\mu})]\phi^0_1\\ =& \psi^0_2(B_1 + B_2)\phi^0_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Etant donné que $f^0_{12} = f^0_{21}$, on obtient

$$\begin{aligned}(\psi_2, A\phi_2) =& (\psi_2, G^0_{uu}\phi_1\phi_2) = (\psi^0_2, (G^0_{uu}\phi^0_1)(\phi^0_2 + \phi^0_1\theta))\\ =& \psi^0_2[f^0_{11}\phi^0_1(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot 0)\\ &+ f^0_{12}\phi^0_1(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot (-1)) + f^0_{21}\phi^0_1(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot 0) + f^0_{12}\phi^0_1(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot (-1))]\\ =& \psi^0_2[f^0_{11}\phi^0_1\phi^0_2 + f^0_{12}\phi^0_1(\phi^0_2 - \phi^0_1) + f^0_{21}\phi^0_1\phi^0_2 + f^0_{12}\phi^0_1(\phi^0_2 - \phi^0_1)]\\ =& \psi^0_2(f^0_{11} + f^0_{12} + f^0_{21} + f^0_{22})\phi^0_1\phi^0_2 - \psi^0_2(f^0_{12} + f^0_{22})\phi^0_1\phi^0_1\\ =& \psi^0_2(A_1 + A_2)\phi^0_2 - \psi^0_2 A_2\phi^0_1. \end{aligned}$$

En additionnant la relation ci-dessus avec

$$(\psi_1, A\phi_1) = (\psi_1, G^0_{uu}\phi_1\phi_1) = (\psi^0_1 - s\psi^0_2, G^0_{uu}\phi^0_1\phi^0_1) = \psi^0_1(A_1 + A_2)\phi^0_1,$$

on obtient

$$(\psi_2, A\phi_2) + (\psi_1, A\phi_1) = \psi^0_2(A_1 + A_2)\phi^0_2 - \psi^0_2 A_2\phi^0_1 + \psi^0_1(A_1 + A_2)\phi^0_1. \tag{12}$$

Enfin, en notant que

$$\begin{aligned}(\psi_2, B\phi_2) =& (\psi^0_2, G^0_{uu}\nu_{\lambda\mu}(\phi^0_2 + \phi^0_1\theta) + c_{\lambda\mu}G^0_{u\lambda}(\phi^0_2 + \phi^0_1\theta) + G^0_{u\mu}(\phi^0_2 + \phi^0_1\theta))\\ =& \psi^0_2[f^0_{11}\nu_{\lambda\mu}(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot 0) + f^0_{12}\nu_{\lambda\mu}(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot (-1)) + f^0_{21}\nu_{\lambda\mu}(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot 0)\\ &+ f^0_{22}\nu_{\lambda\mu}(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot (-1)) + c_{\lambda\mu}f^0_{1\lambda}(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot 0)\\ &+ c_{\lambda\mu}f^0_{2\lambda}(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot (-1)) + f^0_{1\mu}(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot 0) + f^0_{2\mu}(\phi^0_2 + \phi^0_1 \cdot (-1))]\\ =& \psi^0_2[f^0_{11}\nu_{\lambda\mu}\phi^0_2 + f^0_{12}\nu_{\lambda\mu}(\phi^0_2 - \phi^0_1) + f^0_{21}\nu_{\lambda\mu}\phi^0_2 + f^0_{22}(\phi^0_2 - \phi^0_1)\\ &+ c_{\lambda\mu}f^0_{1\lambda}\phi^0_2 + c_{\lambda\mu}f^0_{2\lambda}(\phi^0_2 - \phi^0_1) + f_{1\mu}\phi^0_2 + f^0_{2\mu}(\phi^0_2 - \phi^0_1)] \end{aligned}$$

$$=\psi_2^0(B_1+B_2)\phi_2^0-\psi_2^0B_2\phi_1^0$$

$$\text{et}\quad (\psi_1,B\phi_1)=(\psi_1,(G_{uu}^0\nu_{\lambda\mu}+c_{\lambda\mu}G_{u\lambda}+G_{u\mu}^0)\phi_1)$$
$$=\psi_1^0[(f_{11}^0+f_{12}^0+f_{21}^0+f_{22}^0)\nu_{\lambda\mu}\phi_1^0+c_{\lambda\mu}(f_{1\lambda}^0+f_{2\lambda}^0)\phi_1^0+(f_{1\mu}^0+f_{2\mu}^0)\phi_1^0]$$
$$=\psi_1^0(B_1+B_2)\phi_1^0,$$

$$\text{on a}\quad (\psi_2,B\phi_2)+(\psi_1,B\phi_1)=\psi_2^0(B_1+B_2)\phi_2^0-\psi_2^0B_2\phi_1^0+\psi_1^0(B_1+B_2)\phi_1^0. \tag{13}$$

De (10) á (13) : le théorème est démontré. □

En se basant sur le Théorème 3.3 et Lemme 3.2, la relation existant entre G_u^0 et $\mathcal{A}_0$, le système (8) peut-être définit comme suit

$$F(s)=\begin{pmatrix} f(x,x,\lambda,\mu),\\ (f_1(x,x,\lambda,\mu)+f_2(x,x,\lambda,\mu))\varphi_1\\ (f_1(x,x,\lambda,\mu)+f_2(x,x,\lambda,\mu))\varphi_2-(f_2(x,x,\lambda,\mu)+I)\varphi_1\\ \psi_1\varphi_1-\frac{1}{2}\psi_2f_2(x,x,\lambda,\mu)\varphi_1+\psi_1f_2(x,x,\lambda,\mu)\varphi_1-1\\ \psi_1\varphi_2-\frac{1}{2}\psi_1f_2(x,x,\lambda,\mu)\varphi_1+\psi_1f_2(x,x,\lambda,\mu)\varphi_2\\ \quad+\frac{1}{6}\psi_2f_2(x,x,\lambda,\mu)\varphi_1-\frac{1}{2}\psi_2f_2(x,x,\lambda,\mu)\varphi_2 \end{pmatrix}=0, \tag{14}$$

où $s=(x,\varphi_1,\varphi_2,\lambda,\mu)^T\in V=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $s^0=(x^0,\phi_1^0,\phi_2^0,\lambda^0,\mu^0)^T$, $F:V\to V$.

Théorème 3.4. *Supposons que (x^0,λ^0,μ^0) est un point quadratique de Takens-Bogdanov de l'équation (4). Alors le système (14) est régulier pour $s=s^0$.*

Preuve. Prouvons d'abord que F_s^0 est injective. En developpant $F_s^0\theta=0$, avec $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,c_1,c_2)^T\in V$, on a

$$(f_1^0+f_2^0)\theta_1+c_1f_\lambda^0+c_2f_\mu^0=0, \tag{15}$$

$$(f_{11}^0+f_{12}^0+f_{21}^0+f_{22}^0)\phi_1^0\theta_1+(f_1^0+f_2^0)\theta_2+(f_{1\lambda}^0+f_{2\lambda}^0)\phi_1^0c_1+(f_{1\mu}^0+f_{2\mu}^0)\phi_1^0c_2=0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\Big((f_{11}^0+f_{12}^0+f_{21}^0+f_{22}^0)\phi_2^0-(f_{21}^0+f_{22}^0)\phi_1^0\Big)\theta_1-(f_2^0+I)\theta_2+(f_1^0+f_2^0)\theta_3\\ &\quad+\Big((f_{1\lambda}^0+f_{2\lambda}^0)\phi_2^0-f_{2\lambda}^0\phi_1^0\Big)c_1+\Big((f_{1\mu}^0+f_{2\mu}^0)\phi_2^0-f_{2\mu}^0\phi_1^0\Big)c_2=0,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\Big(-\frac{1}{2}\psi_2^0(f_{12}^0+f_{22}^0)\phi_1^0+\psi_1^0(f_{12}^0+f_{22}^0)\phi_1^0\Big)\theta_1+(\psi_1^0-\frac{1}{2}\psi_2^0f_2^0+\psi_1^0f_2^0)\theta_2\\ &\quad+(-\frac{1}{2}\psi_2^0f_{1\lambda}^0\phi_1^0+\psi_1^0f_{2\lambda}^0\phi_1^0)c_1+(-\frac{1}{2}\psi_2^0f_{2\mu}^0\phi_1^0+\psi_1^0f_{2\mu}^0\phi_1^0)c_2=0,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\Big(-\frac{1}{2}\psi_1^0(f_{12}^0+f_{22}^0)\phi_1^0+\psi_1^0(f_{12}^0+f_{22}^0)\phi_2^0+\frac{1}{6}\psi_2^0(f_{12}^0+f_{22}^0)\phi_1^0-\frac{1}{2}\psi_2^0(f_{12}^0+f_{22}^0)\phi_2^0\Big)\theta_1\\ &\quad+(-\frac{1}{2}\psi_1^0f_2^0+\frac{1}{6}\psi_2^0f_2^0)\theta_2+(\psi_1^0+\psi_1^0f_2^0-\frac{1}{2}\psi_2^0f_2^0)\theta_3\\ &\quad+(-\frac{1}{2}\psi_1^0f_{2\lambda}^0\phi_1^0+\psi_1^0f_{2\lambda}^0\phi_2^0+\frac{1}{6}\psi_2^0f_{2\lambda}^0-\frac{1}{2}\psi_2^0f_{2\lambda}^0\phi_2^0)c_1\\ &\quad+(-\frac{1}{2}\psi_1^0f_{2\mu}^0\phi_1^0+\psi_1^0f_{2\mu}^0\phi_2^0+\frac{1}{6}\psi_2^0f_{2\mu}^0-\frac{1}{2}\psi_2^0f_{2\mu}^0\phi_2^0)c_2=0.\end{aligned} \tag{19}$$

En multipliant la relation (15) par ψ_2^0 et sachant que $\psi_2^0(f_1^0+f_2^0)=0$, d'après le Lemme 3.2, on a $\psi_2^0 f_\lambda^0 c_1+\psi_2^0 f_\mu^0 c_2=0$, dont $c_1=-(\psi_2^0 f_\mu^0)/(\psi_2^0 f_\lambda^0)c_2$, et $c_{\lambda\mu}=-(\psi_2^0 f_\mu^0)/(\psi_2^0 f_\lambda^0)$, on a $c_1=c_{\lambda\mu}c_2$, donc, $\theta_1=c\phi_1^0+c_2\nu_{\lambda\mu}$, où c est une constante à déterminer. En les substituant par la relation (16) et (17), on obtient

$$c(A_1+A_2)\phi_1^0+c_2(B_1+B_2)\phi_1^0+(f_1^0+f_2^0)\theta_2=0, \tag{20}$$

$$c(A_1+A_2)\phi_2^0+c_2(B_1+B_2)\phi_2^0-cA_2\phi_1^0-c_2B_2\phi_1^0-(f_2^0+I)\theta_2+(f_1^0+f_2^0)\theta_3=0. \tag{21}$$

En mulpliant (20) par ψ_2^0, on a

$$c\psi_2^0(A_1+A_2)\phi_1^0+c_2\psi_2^0(B_1+B_2)\phi_1^0=0. \tag{22}$$

Multiplions la relation (20) par ψ_1^0, on obtient

$$c\psi_1^0(A_1+A_2)\phi_1^0+c_2\psi_1^0(B_1+B_2)\phi_1^0+\psi_1^0(f_1^0+f_2^0)\theta_2=0. \tag{23}$$

Multiplions la relation (21) par ψ_2^0, on a

$$\begin{aligned}&c\psi_2^0(A_1+A_2)\phi_2^0+c_2\psi_2^0(B_1+B_2)\phi_2^0-c\psi_2^0A_2\phi_1^0\\&-c_2\psi_2^0B_2\phi_1^0-\psi_2^0(f_2^0+I)\theta_2+\psi_2^0(f_1^0+f_2^0)\theta_3=0.\end{aligned} \tag{24}$$

En additionnant membre à membre les relations (23) et (24), on obtient

$$\begin{aligned}&c(\psi_1^0(A_1+A_2)\phi_1^0+\psi_2^0(A_1+A_2)\phi_2^0-\psi_2^0A_2\phi_1^0)\\&+c_2(\psi_1^0(B_1+B_2)\phi_1^0+\psi_2^0(B_1+B_2)\phi_2^0-\psi_2^0B_2\phi_1^0)=0.\end{aligned} \tag{25}$$

De (22) et (25), sachant que $d_0\neq0$, nous pouvons trouver $c=c_2=0$, soit $c_1=0$, $\theta_1=0$. De (20) on a $(f_1^0+f_2^0)\theta_2=0$, donc, $\theta_2\in\ker(f_1^0+f_2^0)$. Si $\theta_2\neq0$, d'après la relation (9), on a $\psi_1^0\theta_2-\frac{1}{2}\psi_2^0f_2^0\theta_2+\psi_1^0f_2^0\theta_2=\text{constant}\neq0$, ce qui contredit (18), d'où $\theta_2=0$. Par (17) on a $(f_1^0+f_2^0)\theta_3=0$, alors $\theta_3\in\ker(f_1^0+f_2^0)$. Si $\theta_3\neq0$, alors d'après la premiere formule de (25) dans [12], on a $\psi_1^0\theta_3-\frac{1}{2}\psi_2^0f_2^0\theta_3+\psi_1^0f_2^0\theta_3=\text{constant}\neq0$, ce qui est contradictoire avec (19), alors $\theta_3=0$. Et donc, $\theta=0$.

De façon analogue nous pouvons affirmer que F_s^0 est surjective. D'où le théorème démontré. $\square$

Sachant que le système (14) est de dimension finie, d'après le théorème 3.4, la procédure itérative classique converge localement vers zéro lorsqu'on l'applique á (14). Le système (14) peut particulièrement être résolu par la méthode classique d'itération de Newton ainsi définie

$$s_{p+1}=s_p-[J_F(s_p)]^{-1}F(s_p),\ \text{pour } p\geqslant 1 \tag{26}$$

où $J_F(\cdot)$ désigne la matrice Jacobienne de F.

4. Exemple numérique

Considérons le modèle proie-prédateur avec retard [8] :

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) &= rx_1(t)(1-\dfrac{x_1(t)}{K})-\dfrac{x_1(t-\tau)x_2(t)}{a+x_1^2(t-\tau)}\\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)(\dfrac{\mu x_1(t-\tau)}{a+x_1^2(t-\tau)}-D)\end{cases} \tag{27}$$

défini sur $C' := C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^2)$, où r, K, a, μ, D et τ sont des constantes positives.

Le système (27) admet un point de Takens-Bogdanov si les paramètres μ, a, D et K vérifient $\mu^2 - 4aD^2 = 0$ et $\mu = KD$, cf. [8]. Pour déterminer le point de Takens-Bogdanov de (27), nous fixons $a = \mu = \tau = r = 1$, choisissons K et D, comme paramètres et nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t)(1 - \dfrac{x_1(t)}{K}) - \dfrac{x_1(t-1)x_2(t)}{1 + x_1^2(t-1)} \\ x_2(t)(\dfrac{x_1(t-1)}{1 + x_1^2(t-1)} - D) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Ce système (28) peut s'écrire de la manière suivante $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-1), D, K)$ avec $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ et

$$f(x(t), x(t-1), D, K) = \begin{pmatrix} x_1(t)(1 - \dfrac{x_1(t)}{K}) - \dfrac{x_1(t-1)x_2(t)}{1 + x_1^2(t-1)} \\ x_2(t)(\dfrac{x_1(t-1)}{1 + x_1^2(t-1)} - D) \end{pmatrix}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles de f par rapport à la première et deuxième variable au point x sont respectivement données par

$$f_1(x, x, D, K) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2x_1}{K} & -\dfrac{x_1}{1 + x_1^2} \\ 0 & \dfrac{x_1}{1 + x_1^2} - D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_2(x, x, D, K) = \begin{pmatrix} -x_2\dfrac{(1 - x_1^2)}{[1 + x_1^2]^2} & 0 \\ x_2\dfrac{(1 - x_1^2)}{[1 + x_1^2]^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le système élargi pour le point quadratique de Takens-Bogdanov dans (27) est :

$$F(s) \begin{pmatrix} f(x, x, D, K) \\ (f_1(x, x, D, K) + f_2(x, x, D, K))\varphi_1 \\ (f_1(x, x, D, K) + f_2(x, x, D, K))\varphi_2 - (f_2(x, x, D, K) + I)\varphi_1 \\ \psi_1\varphi_1 - \dfrac{1}{2}\psi_2 f_2(x, x, D, K)\varphi_1 + \psi_1 f_2(x, x, D, K)\varphi_1 - 1 \\ \psi_1\varphi_2 - \dfrac{1}{2}\psi_1 f_2(x, x, D, K)\varphi_1 + \psi_1 f_2(x, x, D, K)\varphi_2 \\ \quad + \dfrac{1}{6}\psi_2 f_2(x, x, D, K)\varphi_1 - \dfrac{1}{2}\psi_2 f_2(x, x, D, K)\varphi_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{29}$$

où $s = (x, \varphi_1, \varphi_2, D, K)^T \in V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad F : V \to V$.
En appliquant la méthode de Newton (26) pour la résolution du système (29), en choisissant $\psi_1 = (1, 0)^T$ et $\psi_2 = (1, 0)^T$ puis en programmant le système ci-dessus sous Matlab, nous obtenons le nombre d'itérations requis par la méthode de Newton pour le système (29) par rapport aux différentes valeurs initiales de s.

Pour chaque itération, par rapport aux différentes valeurs initiales, la solution converge vers $(1, 1, 1, 0, 0, -2, 0.5, 2)$ avec un reste de moins de 10^{-21}. En effet, selon Liu [8] on peut obtenir le point exact de Takens-Bogdanov de l'équation (27). Pour $a = \mu = \tau = r = 1$, le point de Takens-Bogdanov est $(x_1, x_2) = (1, 1)$ avec les paramètres $D = \frac{1}{2}$ et $K = 2$. De plus, on peut vérifier que ce point $(1, 1)$ est un point quadratique de Takens-Bogdanov ; alors le Théorème 3.4 garantit la convergence locale de la méthode de Newton (26) appliquée á (29).

s	Test 1			Test 2		
	Valeur initiale de s	Solution numérique	Nombre d'itérations	Valeur initiale de s	Solution numérique	Nombre d'itérations
x_1	1.1	1.0000		1.2	1.0000	
x_2	1.1	1.0000		1.2	1.0000	
φ_1^1	1	1.0000		1.2	1.0000	
φ_1^2	0	0.0000	5	1	0.0000	7
φ_2^1	3	0.0000		1	0.0000	
φ_2^2	0	-2.0000		0	-2.0000	
D	0.4	0.5000		0.5	0.5000	
K	1	2.0000		0.5	2.0000	

Tableau 1 – Nombre d'itérations requis par la méthode de Newton pour (29)

s	Test 3			Test 4		
	Valeur initiale de s	Solution numérique	Nombre d'itérations	Valeur initiale de s	Solution numérique	Nombre d'itérations
x_1	1.5	1.0000		3	1.0000	
x_2	1.5	1.0000		1.5	1.0000	
φ_1^1	1.5	1.0000		1.2	1.0000	
φ_1^2	1.5	0.0000	7	0.5	0.0000	6
φ_2^1	1.5	0.0000		1.8	0.0000	
φ_2^2	1.5	-2.0000		-1.8	-2.0000	
D	0.6	0.5000		0.45	0.5000	
K	1.6	2.0000		1.9	2.0000	

Tableau 2 – Nombre d'itérations requis par la méthode de Newton pour (29)

Remarque 4.1. A partir du résultat numérique, on constate que la méthode de Newton converge très rapidement lorsque la valeur initiale est proche de la solution exacte. Cependant, il faut noter que le choix de la valeur initiale appropriée reste un problème á résoudre pour obtenir la convergence de la méthode de Newton dans le calcul numérique du point de Takens-Bogdanov pour les équations différentielles á retard.

Dans le cas des EDO, on peut utiliser la courbe de bifurcation de Hopf pour déterminer de façon efficiente les valeurs initiales.

Bibliographie

[**1**] K. Engelborghs, T. Luzyanina, D. Roose, *Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL*, Physica D, **159** (2001), 215–232.

[**2**] F. Giannakopoulos, A. Zapp, *Bifurcations in a planar system of differential delay equations modeling neural activity*, ACM T. Math. Software, **28(1)** (2002), 1–21.

[3] R. Gustavo, M. A. Diego, L. M. Jorge, *Bifurcation theory applied to the analysis of power system*, Rev. Union Mat. Argent., **49(1)** (2008), 1–14.

[4] J. K. Hale, S. M. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, New York : Springer-Verlag, 1993.

[5] G. J. Han, *Takens-Bogdanov analysis for an epidemiological model*, Comm. Korean Maths. Soc. **3** (1998), 643–653.

[6] W. H. Jiang, Y. Yuan, *Bogdanov-Takens singularity in Van der Pol's oscillator with delayed feedback*, Physica D, **227** 2007, 149–161.

[7] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd edition, New York : Springer, 2004.

[8] Z. H. Liu, R. Yuan, *Bifurcations in predator-prey systems with nonmonotonic functional response*, Nonlinear Anal-Real, **6** (2005), 187–205.

[9] T. Luzyanina, D. Roose, *Numerical stabilty analysis and computation of Hopf bifurcation points for delay differential equations*, J. Comput. Appl. Math., **72** (1996), 379–392.

[10] S. G. Ruan, D. M. Xiao, *Global analysis in predator-prey system with nonmonotonic functional response*, SIAM J Applied Mathematics, **61(4)** (2001), 1445–1472.

[11] F. Salas, R. Reginatto, F. Gordillo, et al., *Bogdanov-Takens bifurcation in indirect field oriented control of induction motor drives*, 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Bahamas, **4** (2004), 4357–4362.

[12] Y. X. Xu, M. Y. Huang, *Homoclinic orbits and Hopf bifurcations in delay differential systems with T-B singularity*, J. Differ. Equations, **244** (2008), 582–598.

[13] Z. H. Yang, *Nonlinear bifurcation : Theory and Computation (in Chinese)*, Peking : Science Press, 2007.

(received 03.05.2018; in revised form 14.10.2018; available online 18.12.2018)

Ecole Normale Supérieure, Université Marien Ngouabi, Brazzaville, Congo

E-mail: vital.mabonzo@umng.cg

Ecole Normale Supérieure, Université Marien Ngouabi, Brazzaville, Congo

E-mail: eyelangoli1979@gmail.com

Faculté des Sciences, Université Marien Ngouabi, Brazzaville, Congo

E-mail: davhysreval@yahoo.fr

TAKENS-BOGDANOV NUMERICAL ANALYSIS IN PREDATOR-PREY MODEL WITH DELAY

V. D. Mabonzo, R. Eyélangoli Okandzé and F. D. Langa

Abstract. The aim of this paper is to study the Bogdanov-Takens point in the case of a Predator-Prey model with delay.