МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
56 (2004), 57–61

UDK 517.977
оригинални научни рад
research paper

ESTIMATION A PRIORI POUR UN PROBLÈME INVERSE DE LA THÉORIE DE TRANSPORT

S. Lahrech

Résumé. On établit une estimation a priori pour un problème linéaire inverse de la théorie de transport. Comme référence, on se base sur l'article [1] où l'on montre des résultats d'existence et d'unicité pour certains problèmes linéaires inverses de la théorie de transport.

1. Position du problème

On examine le problème suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(v,\nabla_x)u+\Sigma(x,v,t)u(x,v,t)=\int_V J(x,v',t,v)u(x,v',t)\,dv'+F(x,v,t), \tag{1.1}$$

$(x,v,t)\in D=G\times V\times(0,T)$ où $u(x,v,t)$ caractérise la densité de répartition des particules dans l'espace de phase $G\times V$ au moment $t\in]0,T[$. Le coefficient d'absorption $\Sigma(x,v,t)$, l'indicatrice de dissipation $J(x,v',t,v)$ et la fonction de source intérieure représentent le milieu où ce processus se produit.

Supposons par la suite que le domaine G est strictement convexe, borné et la frontière de G est de classe $\mathcal{C}^1$. Posons

$$V=\{\,v:0<v_0\le|v|\le v_1\,\}$$

où v_0,v_1 sont deux nombres positifs tel que $v_0<v_1$. Soient $\Omega=G\times V$, $F(x,v,t)=f(x,v)g(x,v,t)+h(x,v,t)$. D'aprés [1], si l'on donne toutes les caractérestiques du milieu Σ,J,F ainsi que le flux sortant i.e.

$$u(x,v,t)=\mu(x,v,t),\qquad (x,v,t)\in\Gamma_+=\Upsilon_+\times[0,T] \tag{1.2}$$

où $\Upsilon_+=\{\,(x,v)\in\partial G\times V:(v,n_x)>0\,\}$, n_x est la normale extérieure à la frontière ∂G du domaine G au point x.

En outre, si l'état initial du processus

$$u(x,v,0)=\varphi(x,v),\qquad (x,v)\in\overline{G}\times V \tag{1.3}$$

AMS Subject Classification: 49 N 50
Keywords and phrases: A priori estimates, inverse problem, transport theory.

et l'état final du processus

$$u(x,v,T)=0, \qquad (x,v)\in \overline{G}\times V \tag{1.4}$$

sont donnés, alors $\exists!(u,f)\in \mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et vérifiant (1.1)–(1.4). Cela signifie qu'elle existe une commande $f\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ qui permet de transformer le système aux paramètres distribués (1.1)–(1.4) de l'état initial $\varphi(x,v)$ à l'état final $\Psi(x,v)=0$ en un temps $t=T$.

Rappelons certains espaces fonctionnels qu'on va utiliser par la suite :

$$\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})=\{\,u\in\mathcal{C}(\overline{D}):\frac{\partial u}{\partial t}\in\mathcal{C}(\overline{D}),(v,\nabla_x)u\in\mathcal{C}(\overline{D})\,\}$$

muni de la norme suivante:

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})}=\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{D})}+\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{\mathcal{C}(\overline{D})}+\|(v,\nabla_x)u\|_{\mathcal{C}(\overline{D})},$$

$$\mathcal{C}^1_t(\overline{D})=\{\,h\in\mathcal{C}(\overline{D}):\frac{\partial h}{\partial t}\in\mathcal{C}(\overline{D})\,\}$$

muni de la norme suivante:

$$\|h\|_{\mathcal{C}^1_t(\overline{D})}=\|h\|_{\mathcal{C}(\overline{D})}+\|\frac{\partial h}{\partial t}\|_{\mathcal{C}(\overline{D})},$$

$$\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})=\{\,\varphi\in\mathcal{C}(\overline{\Omega}):(v,\nabla)\varphi\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})\,\}$$

muni de la norme suivante:

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}=\|\varphi\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}+\|(v,\nabla)\varphi\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})},$$

$$\mathcal{C}^1_t(\Gamma_+)=\{\,\mu\in\mathcal{C}(\Gamma_+):\frac{\partial\mu}{\partial t}\in\mathcal{C}(\Gamma_+)\,\}$$

muni de la norme suivante:

$$\|\mu\|_{\mathcal{C}^1_t(\Gamma_+)}=\|\mu\|_{\mathcal{C}(\Gamma_+)}+\|\ \frac{\partial\mu}{\partial t}\|_{\mathcal{C}(\Gamma_+)}.$$

Soit

$$\alpha(x,v)=\max\{\,t\in[0,T]:x+vt\in\partial G\,\},\quad (x,v)\in\overline{G}\times V.$$

Posons

$$d=\sup_{(x,v)\in\overline{G}\times V}\alpha(x,v)$$

et supposons que $d<T$. Alors d'aprés [1] $\alpha\in\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})$ et $(v,\nabla)\alpha=-1$.

2. Estimations a priori

Rappelons tout d'abord le théorème suivant qu'on va appliquer par la suite:

THEOREM 2.1. *Soient X un espace de Banach, Y un espace normé. Soient encore $A\colon X\to X$ et $B\colon Y\to X$ des opérateurs linéaires et continus. Supposons que $\|A\|\le q<1$. Alors*

$$\forall y\in Y\quad \exists!\,x\in X\quad x=Ax+By\quad \textit{et}\quad \|x\|\le\frac{1}{1-q}\|B\|\|y\|.$$

Examinons maintenant le problème (1.1)–(1.4) où

$$J \in \mathcal{C}_t^1(\overline{D} \times V), \quad \mu \in \mathcal{C}_t^1(\Gamma_+), \quad \varphi \in \mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega}), \quad \Sigma \in \mathcal{C}_t^1(\overline{D}),$$
$$h \in \mathcal{C}_t^1(\overline{D}), \quad g \in \mathcal{C}_t^1(\overline{D}), \quad 0 < g_0 \le g(x,v,0),\ \forall (x,v) \in \overline{\Omega}.$$

Alors on a le résultat suivant de continuité de la solution du problème (1.1)–(1.4) comme fonction de commande:

Theorem 2.2. $\exists a > 0$*: si* $d < a$ *et si les conditions suivantes:*

$$\varphi(x,v) = \mu(x,v,0), \quad (x,v) \in \Upsilon_+,$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,v,T) = h(x,v,T), \quad (x,v) \in \Upsilon_+,$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,v,0) + (v,\nabla)\varphi + \Sigma(x,v,0)\varphi(x,v) - \int_V J(x,v',0,v)\varphi(x,v')\,dv' - \\ - h(x,v,0) = 0, \quad (x,v) \in \Upsilon_+,$$
$$\mu(x,v,T) = 0, \quad (x,v) \in \Upsilon_+$$

sont réalisées, alors le problème (1.1)–(1.4) admet une solution unique $(u,f) \in \mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$*. De plus* $f/\Upsilon_+ = 0$ *et*

$$\|(u,f)\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \le c(\|\mu\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})} + \|h\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})})$$

où $c > 0$*.*

Preuve. Posons

$$V = \{\, (u,f) \in \mathcal{C}_t^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : u(x,v,T) = 0, \ (x,v) \in \overline{G} \times V, \ f/\Upsilon_+ = 0 \,\}.$$

Il est clair que V est un éspace de Banach relativement à la norme:

$$\|(u,f)\|_V = \|u\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|f\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}.$$

D'aprés [1], le problème (1.1)–(1.4) est équivalent à un problème de point fixe $A(u,f) = (u,f)$ où A est un opérateur de V vers V défini par $A(u,f) = (A_1(u,f), A_2(u,f))$, avec A_1 et A_2 sont deux opérateurs définis de la manière suivante:

$$[A_1(u,f)](x,v,t) = \begin{cases} \mu(x+\alpha v, v, t+\alpha) - \\ \quad - \int_0^\alpha (Pu + fg + h)(x + v(\alpha-\tau), v,\, t+\alpha-\tau)\,d\tau, \\ \hfill \text{si } t+\alpha < T, \\ - \int_{\alpha+t-T}^{\alpha} (Pu + fg + h)(x + v(\alpha-\tau), v,\, t+\alpha-\tau)\,d\tau, \\ \hfill \text{si } t+\alpha \ge T, \end{cases}$$

et

$$[A_2(u,f)](x,v) = \frac{1}{g(x,v,0)}\Big[-\int_0^\alpha f(x+(\alpha-\tau)v,v)\frac{\partial g}{\partial t}(x+(\alpha-\tau)v,v,\alpha-\tau)\,d\tau \\ -\int_0^\alpha \frac{\partial(Pu+h)}{\partial t}(x+(\alpha-\tau)v,v,\alpha-\tau)d\tau+\theta(x,v)\Big]$$

où

$$\theta(x,v) = (v,\nabla)\varphi + \frac{\partial\mu}{\partial t}(x+\alpha v,v,\alpha) - h(x,v,0) + \Sigma(x,v,0)\varphi(x,v) \\ -\int_V J(x,v',0,v)\varphi(x,v')\,dv',$$

$$(Pu)(x,v,t) = -\Sigma(x,v,t)u(x,v,t) + \int_V J(x,v',t,v)u(x,v',t)\,dv'.$$

D'aprés [1], $\exists a>0$ tel que si $d<a$, l'opérateur A^2 est contractant sur V. D'où $\exists!\,(u,f)\in V$ tel que $A^2(u,f)=(u,f)$ et donc $A(u,f)=(u,f)$.

Montrons maintenant que (u,f) dépend continûment de μ,φ et h. Pour cela, posons

$$Y = \{\,(h,\mu,\varphi)\in\mathcal{C}_t^1(\overline{D})\times\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)\times\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega}) : \frac{\partial\mu}{\partial t}(x,v,T) = h(x,v,T), \\ \mu(x,v,0)=\varphi(x,v),\ \mu(x,v,T)=0,\ \frac{\partial\mu}{\partial t}(x,v,0) + (v,\nabla)\varphi + \Sigma(x,v,0)\varphi(x,v) \\ -\int_V J(x,v',0,v)\varphi(x,v')\,dv' - h(x,v,0) = 0,\ \forall (x,v)\in\Upsilon_+\,\}.$$

On fait munir Y de la norme suivante:

$$\|(h,\mu,\varphi)\|_Y = \|\mu\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|h\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}.$$

Remarquons que $A(u,f)$ peut être écrite sous la forme

$$A(u,f) = \varrho(u,f) + \beta(h,\mu,\varphi),$$

où $(h,\mu,\varphi)\in Y$, $(u,f)\in V$ et ϱ, β sont tels que:

$$\varrho(u,f) = (\varrho_1(u,f),\varrho_2(u,f)), \\ \beta(h,\mu,\varphi) = (\beta_1(h,\mu,\varphi),\beta_2(h,\mu,\varphi)),$$

avec ϱ_1, ϱ_2, β_1, β_2 sont définis comme suit:

$$[\varrho_1(u,f)](x,v,t) = \begin{cases} -\int\limits_0^\alpha (Pu+fg)(x+v(\alpha-\tau),v,t+\alpha-\tau)\,d\tau, & \\ & \text{si } t+\alpha<T, \\ -\int\limits_{\alpha+t-T}^{\alpha}(Pu+fg)(x+v(\alpha-\tau),v,\,t+\alpha-\tau)\,d\tau, & \\ & \text{si } t+\alpha\ge T, \end{cases}$$

$$[\varrho_2(u,f)](x,v) = -\frac{1}{g(x,v,0)}\left[\int_0^\alpha f(x+(\alpha-\tau)v,v)\frac{\partial g}{\partial t}(x+(\alpha-\tau)v,v,\alpha-\tau)\,d\tau + \int_0^\alpha \frac{\partial Pu}{\partial t}(x+(\alpha-\tau)v,v,\alpha-\tau)\,d\tau\right],$$

$$[\beta_1(h,\mu,\varrho)](x,v,t) = \begin{cases} \mu(x+\alpha v,v,t+\alpha)- \\ \quad -\int_0^\alpha h(x+v(\alpha-\tau),v,t+\alpha-\tau)\,d\tau, & \text{si } t+\alpha<T, \\ -\int_{\alpha+t-T}^\alpha h(x+v(\alpha-\tau),v,t+\alpha-\tau)\,d\tau, & \text{si } t+\alpha\geq T, \end{cases}$$

$$[\beta_2(h,\mu,\varrho)](x,v) = -\frac{1}{g(x,v,0)}\left[\int_0^\alpha \frac{\partial h}{\partial t}(x+(\alpha-\tau)v,v,\alpha-\tau)\,d\tau - \theta(x,v)\right].$$

Il est clair que $\varrho(u,f)\in V$ et $\beta(h,\mu,\varphi)\in V$. A noter que ϱ est un opérateur continu, linéaire de V vers V et β est un opérateur linéaire continu de Y vers V.

D'autre part, en raisonnant comme dans [1] on conclut qu'a $d<a\ \|\varrho^2\|<1$ et donc

$$\exists!\,(u_0,f_0)\in V:(u_0,f_0)=\varrho^2(u_0,f_0)+(\varrho\beta+\beta)(h,\mu,\varphi)$$

et

$$\|(u_0,f_0)\|_V\leq\frac{1}{1-\|\varrho^2\|}\|\varrho\beta+\beta\|[\|\mu\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)}+\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}+\|h\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})}].$$

Comme la solution (u,f) du problème (1.1)–(1.4) vérifie la condition

$$(u,f)=\varrho^2(u,f)+(\varrho\beta+\beta)(h,\mu,\varphi)\quad\text{et}\quad(u,f)\in V,$$

alors il suit que $(u,f)=(u_0,f_0)$. D'où le résultat. ■

REFERENCES

[**1**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., Differents. uravn. **21** (1985), 109–119.

[**2**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., Differents. uravn. **21** (1985), 870–885.

[**3**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., *Obratnaya zadacha dlya odnogo uravneniya perenosa*, Izv. AN SSSR **276** (1984), 555–559.

[**4**] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer, 1978.

(received 04.02.2003)

Université Mohamed I, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, Oujda, Maroc

E-mail: lahrech@sciences.univ-oujda.ac.ma