МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
52 (2000), 79–82

UDK 517.911
оригинални научни рад
научная работа

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Юлка Кнежевич-Милянович

Абстракт. С помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке найдены достаточные условия существования периодических решений уравнений третьего порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' + f(x, y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, z, u)$ непрерывная по совокупности переменных при всех $-\infty < x, y, z, u < +\infty$ и ω-периодическая по x, т.е. $f(x, y, z, u) = f(x + \omega, y, z, u)$ при всех x, y, z, u. Нас будет интересовать вопрос о существовании ω-периодических решений уравнения (1). Для исследования этого вопроса мы применяем теорему Шаудера о неподвижной точке.

Обозначим через $C^n_{[0,\omega]}$ множество функций $y(x)$ определенных на $[0, \omega]$, непрерывных на этом сегменте и имеющих на нем непрерывные производные до n-того порядка включительно. В этом множестве введем норму, полагая

$$\|y\| = \sum_{i=0}^{n} \max_{0\leqslant x\leqslant\omega} |y^{(i)}(x)|, \qquad (y^{(0)}(x) = y(x)). \tag{2}$$

Пространство $C^n_{[0,\omega]}$ является банаховым. Так как сходимость в $C^n_{[0,\omega]}$ означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательности k-тих производных $(k = 1, 2, \dots, n)$, то нетрудно убедится в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. *Для того чтобы множество $B \subset C^n_{[0,\omega]}$ было компатным, необходимо и достаточно, чтобы на сегменте $[0, \omega]$ функции $y(x) \in B$ и их производные до n-того порядка включительно были равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.*

AMS Subject Classification: 34 C 25

Лемма 2. *ω-периодическое продолжение всякого решения уравнения*

$$y(x) = \int_0^\omega G(x,s)[8k^3 y(s) - f(s, y(s), y'(s), y''(s))]\, ds \tag{3}$$

где $G(x,s)$ – функция Грина задачи

$$y''' + 8k^3 y = 0, \tag{4}$$

$$y^{(i)}(0) = y^{(i)}(\omega), \quad i = 0, 1, 2, \tag{5}$$

является периодическим решением уравнения (1).

Доказательство. Пусть $\overline{y}(x)$ – решение уравнения (3). Введем обозначение

$$\varphi(x) \equiv 8k^3 \overline{y}(x) - f(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x), \overline{y}''(x)).$$

Тогда $\overline{y}(x)$ является решением уравнения (см. [2], стр. 40–42) $y''' + 8k^3 y = \varphi(x)$ с краевыми условиями (5) и следовательно, ω-периодическое продолжение $\overline{y}(x)$ является периодическим решением уравнения (1). Лемма доказана. ■

Теорема. *Пусть существуют постоянные $C > 0$, $k \neq 0$ (обозначим $k_1 = |k|$) такие, что*

$$\left| \frac{M\omega e^{k_1\omega}(3e^{2k_1\omega} + 3e^{k_1\omega} + 2)}{12k^2(e^{k_1\omega} - 1)(e^{2k_1\omega} - 1)} \right| \leqslant C, \tag{6}$$

где $M = \max\{\, |8k^3 y - f(x, y, y', y'')| \ : \ x \in [0, \omega], |y| \leqslant C, |y'| \leqslant 2k_1 C, |y''| \leqslant 4k^2 C \,\}$. Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение.

Доказательство. Исходя из определения найдем, что функцией Грина задачи (4)–(5) является функция, определенная выражением

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{k(t+\omega-s)}\{e^{k\omega}\sin[\sqrt{3}\,k(s-t) + \frac{\pi}{6}] + \sin[\sqrt{3}\,k(t+\omega-s) - \frac{\pi}{6}]\}}{6k^2(1 + e^{2k\omega} - 2e^{k\omega}\cos\sqrt{3}\,k\omega)} \\ \qquad + \dfrac{e^{2k(s-\omega-t)}}{12k^2(1 - e^{-2k\omega})}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \omega, \\ \dfrac{e^{k(t-s)}\{e^{k\omega}\sin[\sqrt{3}\,k(s+\omega-t) + \frac{\pi}{6}] + \sin[\sqrt{3}\,k(t-s) - \frac{\pi}{6}]\}}{6k^2(1 + e^{2k\omega} - 2e^{k\omega}\cos\sqrt{3}\,k\omega)} \\ \qquad + \dfrac{e^{2k(s-t)}}{12k^2(1 - e^{-2k\omega})}, & 0 \leqslant s < t \leqslant \omega. \end{cases}$$

В силу леммы 2 для доказательства теоремы достаточно показать существование решения уравнения (3).

Пусть

$$U = \{\, y(x) \in C^2_{[0,\omega]} \ : \ |y(x)| \leqslant C, |y'(x)| \leqslant 2k_1 C, |y''(x)| \leqslant 4k^2 C \,\}.$$

Рассмотрим на ограниченном замкнутом выпуклом множестве U пространства $C^2_{[0,\omega]}$ оператор A, определенный выражением

$$(Ay)(x) = \int_0^\omega G(x,s)[8k^3y(s) - f(s,y(s),y'(s),y''(x))]\,ds. \tag{7}$$

В случае $k>0$ имеем

$$\begin{aligned}|(Ay)(x)| &\leqslant \left[\frac{e^{k\omega}(e^{k\omega}+1)}{6k^2(1-e^{k\omega})^2} + \frac{1}{12k^2(1-e^{-2k\omega})}\right]\omega M \\ &= \frac{M\omega e^{k\omega}(3e^{2k\omega}+3e^{k\omega}+2)}{12k^2(e^{k\omega}-1)(e^{2k\omega}-1)} \leqslant C.\end{aligned} \tag{8}$$

Если же $k<0$ то

$$\begin{aligned}|(Ay)(x)| &\leqslant \left[\frac{e^{k\omega}+1}{6k^2(1-e^{k\omega})^2} + \frac{e^{-2k\omega}}{12k^2(e^{-2k\omega}-1)}\right]\omega M \\ &= \frac{M\omega e^{k_1\omega}(3e^{2k_1\omega}+3e^{k_1\omega}+2)}{12k^2(e^{k_1\omega}-1)(e^{2k_1\omega}-1)} \leqslant C.\end{aligned} \tag{8$'$}$$

Аналогично

$$|(Ay)'(x)| \leqslant 2k_1C. \tag{9}$$

Хотя производные $\dfrac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 G(x,s)}{\partial x^3}$, имеют разрыв при $t=s$, аналогично можно показать, что производные $(Ay)''(x)$, $(Ay)'''(x)$ существуют и выражаются соответственно формулами

$$(Ay)''(x) = \int_0^\omega \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}[8k^3y(s) - f(s,y(s),y'(s),y''(s))]\,ds, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&(Ay)'''(x) = \\ &\int_0^\omega \frac{\partial^3 G(x,s)}{\partial x^3}[8k^3y(s) - f(s,y(s),y'(s),y''(s))]\,ds + 8k^3y(x) - f(x,y,y',y'').\end{aligned} \tag{11}$$

Из (10) и из выражения для $\dfrac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$ получим

$$|(Ay)''(x)| \leqslant 4k^2C. \tag{12}$$

Из (8), (8'), (9) и (12) вытекает, что оператор A отображает множество U в себя.

Покажем, что оператор A компактен. В силу (8), (8'), (9) и (12) множество $\{\,(Ay)(x)\,:\,y(x)\in U\,\}$ ограничено в пространстве $C^2_{[0,\omega]}$, т.е. функции $(Ay)^{(i)}(x)$, $i=0,1,2$ равномерно ограничены. Поэтому, из леммы 1 вытекает, что оператор A компактен.

Далее, пусть последовательность $\{y_n(x)\}$ функций принадлежащих множеству U, сходится (в смысле нормы (2)) к функции $y(x)$ (очевидно, $y(x)$ также принадлежит множеству U). Тогда последовательность $f(x,y_n,y'_n,y''_n)$ сходится к функции $f(x,y,y',y'')$ равномерно на $[0,\omega]$. Отсюда вытекает, что возможен предельный переход под знаком интеграла в (7), т.е. $Ay_n \to Ay$ и оператор A непрерывен на множестве U.

Таким образом, оператор A удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера. Следовательно, существует неподвижная точка оператора A, т.е. уравнение (3) имеет по крайней мере одно решение. Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Москва, 1970.

[**2**] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Москва, 1969.

(поступило 20.04.2000.)

Математический факультет, Студентская площадь 16, Белград