МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
52 (2000), 1–6

UDK 517.548
оригинални научни рад
wissenschaftliche Forschungsarbeit

ANWENDUNG DER METHODE VON ŠAPKAREV ZUM AUFLOSEN EINIGER RANDWERTAUFGABEN FÜR DIE LINEARE KOMPLEXE DIFFERENTIALGLEICHUNG II ORDNUNG

Lj. Protić und M. Čanak

1. Einführung

In seiner Arbeit [1] hat S. Fempl die lineare, komplexe Differentialgleichung

$$Dw + f(z,\bar z)w + g(z,\bar z) = 0 \tag{1}$$

untersucht, wobei $f(z,\bar z)$ und $g(z,\bar z)$ gegebene, stetige Funktionen in einem geschlossenen Gebiet T sind, und

$$Dw = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2w'_{\bar z} \tag{2}$$

den bekannten Differentialoperator von Kolossov darstellt. Er zeigte, dass die allgemeine Lösung dieser Gleichung die Form

$$w(z,\bar z) = \left\{Q(z) - \frac{1}{2}\int g(z,\bar z)\exp\left[\frac{1}{2}\int f(z,\bar z)\,d\bar z\right]d\bar z\right\}\exp\left[-\frac{1}{2}\int f(z,\bar z)\,d\bar z\right] \tag{3}$$

besitzt, wo $Q(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist.

Auf Grund dieses Ergebnisses kann man den folgenden Differentialoperator von Fempl

$$\mathcal{F}_{A,B}w = Dw + A(z,\bar z)w + B(z,\bar z) = \Phi(z,\bar z) \tag{4}$$

einführen, der für die gegebenen, stetigen Charakteristiken $A = A(z,\bar z)$ und $B = B(z,\bar z)$, jeder differenzierbarer Funktion $w(z,\bar z)$ eine stetige, komplexe Funktion $\Phi(z,\bar z)$ zuordnet.

Aus der Formel (4) erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^2_{A,B}w &= \mathcal{F}_{A,B}[\mathcal{F}_{A,B}w] = \mathcal{F}_{A,B}[Dw + Aw + B]\\ &= D^2w + 2ADw + w(DA + A^2) + (DB + AB + B)\end{aligned}$$

AMS Subject Classification: 34 M 99

Communicated at the 4th Symposium on Mathematical Analysis and its Applications, Aranđelovac 1997 und das heisst, dass die Gleichung $\mathcal{F}^2 w = 0$ in die Differentialgleichung

$$D^2 w + 2ADw + w(DA + A^2) = -DB - BA - B \tag{5}$$

übergeht. Wenn man auf (5) die $\mathcal{F}$-Transformation

$$\mathcal{F}w = Dw + Aw + B = \Phi(z, \bar{z}) \tag{6}$$

anwendet, so geht diese in sie selbst, also in

$$D\Phi + A\Phi + B = 0 \tag{7}$$

über. Auf Grund der Formel (3) hat die Lösung von (7) die Form

$$\Phi(z, \bar{z}) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int A\, d\bar{z}\right]\left\{Q(z) - \frac{1}{2}\int B \exp\left[\frac{1}{2}\int A\, d\bar{z}\right] d\bar{z}\right\}$$

oder

$$\Phi(z, \bar{z}) = Q(z)M(z, \bar{z}) + N(z, \bar{z}) \tag{8}$$

mit

$$\begin{aligned} M(z, \bar{z}) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\int A\, d\bar{z}\right], \\ N(z, \bar{z}) &= -\exp\left[-\frac{1}{2}\int A\, d\bar{z}\right]\frac{1}{2}\int B \exp\left[\frac{1}{2}\int A\, d\bar{z}\right] d\bar{z}. \end{aligned}$$

Wenn man den Wert (8) in (6) einsetzt, so erhält man die Gleichung

$$Dw + Aw + (B - \Phi(z, \bar{z})) = 0. \tag{9}$$

Die allgemeine Lösung von (9) ist

$$w(z, \bar{z}) = P(z)R(z, \bar{z}) + Q(z)M(z, \bar{z}) + T(z, \bar{z}) \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned} R(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2}M(z, \bar{z})\int M(z, \bar{z}) \exp\left[\frac{1}{2}\int A(z, \bar{z})\, d\bar{z}\right] d\bar{z}, \\ T(z, \bar{z}) &= N(z, \bar{z}) + \frac{1}{2}M(z, \bar{z})\int N(z, \bar{z}) \exp\left[\frac{1}{2}\int A(z, \bar{z})\, d\bar{z}\right] d\bar{z} \end{aligned}$$

wobei $P(z)$ und $Q(z)$ beliebige, analytische Funktionen sind.

Jetzt stellen wir die umgekehrte Frage: Unter welchen Bedingungen geht die allgemeine komplexe Differentialgleichung

$$D^2 w + \alpha(z, \bar{z})Dw + \beta(z, \bar{z})w = \gamma(z, \bar{z}) \tag{11}$$

durch Anwendung der $\mathcal{F}$-Transformation in sie selbst. Diese Frage für reellen Differentialgleichungen II Ordnung hat I. Šapkarev in seiner Arbeit [2] gestellt.

Durch Vergleichen der entsprechenden Koeffizienten von Gleichungen (5) und (11) erhält man

$$\alpha = 2A, \quad \beta = DA + A^2, \quad -\gamma = DB + AB + B$$

und daraus auch die Bedingung

$$2D\alpha + \alpha^2 - 4\beta = 0. \tag{12}$$

Wenn wir die Komposition von zwei Differentialoperatoren

$$\mathcal{F}_{A,B}w = Dw + Aw + B, \qquad \mathcal{F}_{C,E}w = Dw + Cw + E$$

anweden wollen, so haben wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{C,E}(\mathcal{F}_{A,B}w) &= \mathcal{F}_{C,E}[Dw + Aw + B]\\ &= D^2w + (A+C)Dw + (DA + CA)w + (DB + CB + E).\end{aligned} \tag{13}$$

Die Gleichung $\mathcal{F}_{C,E}(\mathcal{F}_{A,B}w) = 0$ geht also in die komplexe Differentialgleichung

$$D^2w + (A+C)Dw + (DA + CA)w = -DB - CB - E \tag{14}$$

über.

Durch Vergleichen der entsprechenden Koeffizienten erhält man $\alpha = A + C$, $\beta = DA + CA$ und daraus auch die Bedingung

$$DA = A^2 - \alpha A + \beta \tag{15}$$

die man als Ricatti-sche Differentialgleichung im Bezug auf die Funktion A interpretieren kann. So sehen wir, dass sich die komplexe Differentialgleichung (11) mit Hilfe der Opertoren $\mathcal{F}_{A,B}$ und $\mathcal{F}_{C,E}$ lösen kann, wenn die entsprechende Ricatti-sche Gleichung (15) integrierbar ist.

2. Randwertaufgabe von Dirichlet-Neumann für die lineare komplexe Differentialgleichung II Ordnung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (11) enthält zwei beliebige, analytische Funktionen. Zu ihrer Bestimmung kann man zwei unabhängige Randbedingungen zuordnen. Eine grosse theoretische und praktische Bedeutung hat die folgende Randwertaufgabe von Schwarz-Neumann-Dirichlet: Es seien L_1: $\bar{z} = g(z)$ und L_2: $\bar{z} = h(z)$ gegebene, geschlossene Konture, wobei $g(z)$ und $h(z)$ gegebene, analytische Funktionen sind. Man soll diejenige Lösung der Differentialgleichung (11) bestimmen, die auf L_1 und L_2 den folgenden Randbedingungen

$$\begin{aligned}C_1(z)\alpha_{g(z)}w + C_2(z)\alpha_{g(z)}Dw = C_3(z)\\ D_1(z)\alpha_{h(z)}w + D_2(z)\alpha_{h(z)}Dw = D_3(z)\end{aligned} \tag{16}$$

genügt, wobei $C_1(z)$, $C_2(z)$, $C_3(z)$, $D_1(z)$, $D_2(z)$, $D_3(z)$ gegebene, analytische Funktionen sind. Dabei muss auch die Bedingung (12) gelten.

Bemerkung 1. Die Bedeutung des Operators $\alpha_{g(z)}$ ist folgender: Es sei $W = \{w(z,\bar{z})\}$ die Menge der komplexen Funktionen die differenzierbar nach $\bar{z}$ in einem geschlossenen Gebiet T sind, und es sei $\Omega = \{\omega(z)\}$ die Menge der analytischen Funktionen in T. Die Funktion $\omega = \alpha_{g(z)}w$ kann aus der Funktion $w = w(z,\bar{z})$ entstehen, wenn man den Wert $\bar{z}$ mit $g(z)$ vertauscht und den Wert z unveränderlich lässt. Leicht kann man sehen, dass $\alpha_{g(z)}$ die Menge W auf die menge Ω abbildet, und dass jedem Original w ein und nur ein Bild ω entspricht. Der geometrische Sinn dieses Operators ist folgender: Wenn $\bar{z} = g(z)$ die Gleichung einer glatten, einfachen, geschlossenen Kontur ist, so besitzen die Funktionen $w(z,\bar{z})$ und $\alpha_{g(z)}w$ den gleichen Randwert auf dieser Kontur.

Die Lösung der Randwertaufgabe (16) suchen wir in der Form (10), wobei $P(z)$ und $Q(z)$ unbekannte, analytische Funktionen sind. Es gilt auch

$$Dw = P(z)DR + Q(z)DM + DT. \tag{17}$$

Durch Substitution der Werte (10) und (17) in (16) erhält man

$$\begin{aligned}
&C_1(z)[P(z)\alpha_{g(z)}R + Q(z)\alpha_{g(z)}M + \alpha_{g(z)}T] \\
&\qquad + C_2(z)[P(z)\alpha_{g(z)}DR + Q(z)\alpha_{g(z)}DM + \alpha_{g(z)}DT] = C_3(z) \\
&D_1(z)[P(z)\alpha_{h(z)}R + Q(z)\alpha_{h(z)}M + \alpha_{h(z)}T] \\
&\qquad + D_2(z)[P(z)\alpha_{h(z)}DR + Q(z)\alpha_{h(z)}DM + \alpha_{h(z)}DT] = D_3(z)
\end{aligned}$$

oder, nach einer kürzeren Rechnung

$$\begin{aligned}
P(z)[C_1(z)\alpha_{g(z)}R + C_2(z)\alpha_{g(z)}DR] &+ Q(z)[C_1(z)\alpha_{g(z)}M + C_2(z)\alpha_{g(z)}DM] \\
&= C_3(z) - C_1(z)\alpha_{g(z)}T - C_2(z)\alpha_{g(z)}DT \\
P(z)[D_1(z)\alpha_{h(z)}R + D_2(z)\alpha_{h(z)}DR] &+ Q(z)[D_1(z)\alpha_{h(z)}M + D_2(z)\alpha_{h(z)}DM] \\
&= D_3(z) - D_1(z)\alpha_{h(z)}T - D_2(z)\alpha_{h(z)}DT.
\end{aligned} \tag{18}$$

Die Relationen (18) stellen ein lineares Gleichungssystem mit 2 unbekannten Funktionen $P(z)$ und $Q(z)$ dar. Die Determinante dieses Systems ist verschiedene von 0 für $g(z) \neq h(z)$ und $R(z,\bar{z}) \neq M(z,\bar{z})$ und das System besitzt dann die einzigen Lösungen $P(z)$ und $Q(z)$. Durch Substitution dieser Werte in (10) erhält man die Lösung der Randwertaufgabe (16) für die komplexe Differentialgleichung (11).

Bemerkung 2. In allgemeinen Falle $2D\alpha + \alpha^2 - 4\beta \neq 0$ kann man die Randwertaufgabe (10)–(16) durch eine näherungsweise Methode der komplexen Differenzen, die in der Arbeit [3] von Lj. Protić und M. Čanak gearbeitet wurde, lösen.

3. Randwertaufgabe vom Carlemantypus für die komplexe Differentialgleichung (11)

In der Monographie [4] von G. Litvinčuk gibt es die folgende Formulierung der Randwertaufgabe von Carleman für die analytischen Funktionen:

Randwertaufgabe C. Es sei L eine einfache, glatte, geschlossene Kontur, die das Gebiet D^+ begrenzt. Man soll die Funktion $\Phi(z)$ bestimmen, die in D^+

analytisch ist und die auf L der Bedingung

$$\Phi[\alpha(t)] = G(t)\Phi(t) + g(t) \tag{19}$$

genügt, wobei auch die Bedingung von Carleman

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \qquad t \in L$$

gilt. Die Funktionen $G(t)$, $g(t)$ und $\alpha'(t)$ genügen dabei der Bedingung von Hölder und $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Dieses Problem wurde zum ersten mal von Kveselava [5] durch die Methode der Integralgleichungen vollständig gelöst. In dieser Arbeit löst man als Beispiel eine Randwertaufgabe vom Carlemantypus für die komplexe Differentialgleichung der Form (11).

Randwertaufgabe C_0. Man soll die Lösung der komplexen Differentialgleichung

$$D^2 w + \frac{2}{\bar{z}}\, Dw - \frac{1}{\bar{z}^2}\, w = 0 \tag{20}$$

bestimmen, die auf dem Einheitskreis K: $\bar{z} = 1/z$ den Randbedingungen vom Carlemantypus

$$\begin{aligned} w(1/t) &= tw(t) + 1 - t \\ Dw(1/t) &= \frac{1}{t} Dw(t) + \frac{1}{t} - 1 \end{aligned} \tag{21}$$

genügt.

Durch Anwendung der Differentialtransformation

$$Dw + \frac{w}{\bar{z}} = \Phi, \qquad D^2 w + \frac{\bar{z} Dw - 2w}{\bar{z}^2} = D\Phi$$

geht die Gleichung (20) in

$$D\Phi + \frac{\Phi}{\bar{z}} = 0$$

über. Nach einer längeren Rechnung bestimmt man die allgemeine Lösung von (20) in der Form

$$w(z, \bar{z}) = P(z)\bar{z}^{1/2} + Q(z)\bar{z}^{-1/2}, \tag{22}$$

wobei $P(z)$ und $Q(z)$ beliebige analytische Funktionen sind. Wenn wir den wert (22) und seine areoläre Ableitung Dw in (21) einsetzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{1}{t}\Big)t^{1/2} + Q\Big(\frac{1}{t}\Big)t^{-1/2} &= P(t)t^{1/2} + Q(t)t^{3/2} + 1 - t \\ P\Big(\frac{1}{t}\Big)t^{-1/2} - Q\Big(\frac{1}{t}\Big)t^{-3/2} &= P(t)t^{-1/2} - Q(t)t^{1/2} + \frac{1}{t} - 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Durch Elimination der Funktion P aus (23) erhält man

$$Q(1/t) = t^2 Q(t) \tag{24}$$

was die homogene Randwertaufgabe von Carleman für die analytischen Funktionen darstellt. Die Lösung dieser Randwertaufgabe ist $Q(z) = c_1/z$ (siehe [4]). Durch Substitution dieses Wertes in (23) erhält man

$$P\Big(\frac{1}{t}\Big) - P(t) = \frac{1-t}{t^{1/2}} \tag{25}$$

was die sgn. Sprungrandwertaufgabe darstellt. Die Lösung dieser Randwertaufgabe ist $P(z) = z^{1/2} + c_2$ (siehe [4]). Endlich bestimmt man die Lösung der Randwertaufgabe (20)–(21) in der Form

$$w(z, \bar{z}) = (z^{1/2} + c_2)\bar{z}^{1/2} + \frac{c_1}{z \cdot \bar{z}^{1/2}}. \tag{26}$$

LITERATUR

[**1**] Fempl, S., *Reguläre Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen*, Publ. de l'Inst. Math., Beograd, **4(18)** (1964), 115–120.

[**2**] Šapkarev, I., *Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mémes par un changement de fonctions*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Skopje **19** (1964), 211–215.

[**3**] Protić, Lj., Čanak, M., *Näherungsweises Auflösen einer Randwertaufgabe für die lineare, komplexe Differentialgleichung II Ordnung*, Makedonski Seminar iz diferencijalnih jednačina, Ohrid 1995.

[**4**] Litvinčuk, G., *Kraevie zadachi i singulyarnie integarl'nie uravneniya so sdvigom*, "Nauka", Moskva 1977.

[**5**] Kveselava, D., *Reshenie odnoi granichnoji zadachi T. Karlemana*, DAN SSSR **55**, 8 (1947), 683–686.

(received 01.08.1997.)

Matematički fakultet, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Yugoslavia

Poljoprivredni fakultet, Nemanjina 6, 11080 Zemun, Yugoslavia