MAT–KOL (Banja Luka)
ISSN 0354–6969 (p), ISSN 1986–5228 (o)
Vol. XX (1)(2014), 27–36

LINEARNE KONGRUENCIJE I SISTEMI LINEARNIH KONGRUENCIJA

Bernadin Ibrahimpašić[1], **Senka Ibrahimpašić**[2]

Sažetak

U ovom članku ćemo opisati metodu za rješavanje linearnih kongruencija koja koristi Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog djelioca dva prirodna (cijela) broja. Osim toga ćemo pokazati kako rješavati sisteme linearnih kongruencija s jednom nepoznatom.

Ključne riječi i fraze: Linearne kongruencije, sistemi linearnih kongruencija, Kineski teorem o ostacima, Euklidov algoritam.

Abstract

In this paper we shall use Euclidean algorithm to solve linear congruences. Also we describe some methods for solving systems of linear congruences.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 11A05, 11A07

Key words and phrases: Linear congruences, System of linear congruences, Chinese Remainder Theorem, Euclidean algorithm.

1 Uvod

Uz pojam djeljivosti, koji je jedan od osnovnih pojmova u teoriji brojeva, direktno je vezan i pojam kongruencija. Uveo ga je Gauss u svom poznatom djelu "Disquisitiones Arithmeticae" 1801. godine. Način na koji se kongruencije zapisuju podsjeća na jednakosti što i nije čudno, jer kongruencije i jednakosti imaju mnoga zajednička svojstva.

Definicija 1.1 *Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli razliku $a - b$, onda kažemo da je a* kongruentan *b modulo m i pišemo $a \equiv b \pmod{m}$. U protivnom kažemo da a* nije kongruentan *b modulo m i pišemo $a \not\equiv b \pmod{m}$.*

Kako je $a - b$ djeljivo s m ako i samo ako je djeljivo s $-m$, to se obično razmatraju samo slučajevi kada je m pozitivan cijeli broj, tj. kada je $m \in \mathbb{N}$.

Iz definicije je očigledno da ako je $a \equiv b \pmod{m}$, to znači da postoji cijeli broj k takav da je $a = km + b$.

[1]Pedagoški fakultet, Bihać, e-mail: bernadin@bih.net.ba
[2]Opća gimnazija, Bosanska Krupa, e-mail: senkai@bih.net.ba

Istaknimo da je relacija "biti kongruentan modulo m" relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z}$, tj. ona je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Osim toga, potrebno je naglasiti i neka osnovna svojstva kongruencija koja se jednostavno dokazuju koristeći definiciju.

Teorem 1.1 ([4]) *Neka su a, b, c, d cijeli brojevi, $m_1, m_2, \ldots, m_r$ prirodni brojevi i f polinom s cjelobrojnim koeficijentima.*

1. $a \equiv b \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad a - b \equiv 0 \pmod{m}$.
2. $a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a \equiv b + km \pmod{m}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
3. *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$ *i* $c \equiv d \pmod{m}$, *onda je* $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ *i* $ac \equiv bd \pmod{m}$.
4. *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$ *i* $d|m$, *onda je* $a \equiv b \pmod{d}$.
5. *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$, *onda je* $ac \equiv bc \pmod{mc}$ *za svaki* $c > 0$.
6. $a \equiv b \pmod{m_i}, i = 1, 2, \ldots, r \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{\text{nzv}(m_1, m_2, \ldots, m_r)}$.
7. *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$ *onda je* $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.
8. $ax \equiv ay \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv y \pmod{\frac{m}{\text{nzd}(a,m)}}$.

Ukoliko poznajemo navedene osobine, onda smo u mogućnosti vrlo jednostavno riješiti sljedeći zadatak.

Primjer 1.1 *Naći ostatak pri dijeljenju 2^{678} s 11.*

Rješenje: Da bismo odredili ostatak pri dijeljenju 2^{678} s 11 trebamo izračunati čemu je 2^{678} kongruentno modulo 11. Primjenom navedenih osobina dobijamo redom:

$$\begin{array}{llll} 2^1 \equiv 2 \pmod{11}, & 2^2 \equiv 4 \pmod{11}, & 2^3 \equiv 8 \pmod{11}, & 2^4 \equiv 5 \pmod{11}, \\ 2^5 \equiv 10 \pmod{11}, & 2^6 \equiv 9 \pmod{11}, & 2^7 \equiv 7 \pmod{11}, & 2^8 \equiv 3 \pmod{11}, \\ & 2^9 \equiv 6 \pmod{11}, & 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}. & \end{array}$$

Sada je

$$2^{670} = \left(2^{10}\right)^{67} \equiv 1^{67} \equiv 1 \pmod{11},$$

pa je

$$2^{678} = 2^{670} \cdot 2^8 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Dobili smo da je ostatak pri dijeljenju 2^{678} s 11 jednak 3.

$\diamondsuit$

2 Linearne kongruencije

Pogledajmo sada uvjete rješivosti i način rješavanja kongruencije $ax \equiv b \pmod{m}$, gdje su a i m prirodni brojevi, a b cijeli broj.

Rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, gdje je $f(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima, je svaki cijeli broj x koji je zadovoljava. Ako je x_1 neko rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, i $x_2 \equiv x_1 \pmod{m}$, onda je i x_2 također rješenje te kongruencije. Za dva rješenja x i x' kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ kažemo da su ekvivalentna ako je $x \equiv x' \pmod{m}$. Pod brojem rješenja kongruencije podrazumijevamo broj neekvivalentnih rješenja.

Teorem 2.1 ([6]) *Neka su a i m prirodni brojevi, te b cijeli broj. Kongruencija $ax \equiv b \pmod{m}$ ima rješenja ako i samo ako $d = \mathrm{nzd}(a, m)$ dijeli b. Ako je ovaj uvjet ispunjen, onda gornja kongruencija ima tačno d rješenja modulo m, i to*

$$x_0 + j \cdot \frac{m}{d}, \quad j = 0, 1, \ldots d-1,$$

gdje je x_0 jedinstveno rješenje kongruencije $ax/d \equiv b/d \pmod{m/d}$.

Postoji nekoliko metoda za rješavanje linearnih kongruencija s jednom nepoznatom, kao što su:

1. Metoda svođenja na diofantsku jednačinu,
2. Eulerova metoda,
3. Metoda transformacije koeficijenata,
4. Metoda koja koristi Euklidov algoritam.

Mi ćemo opisati metodu koja koristi Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja dva prirodna broja, a koja se rijetko može naći u literaturi.

Nakon što Euklidovim algoritmom odredimo $d = \mathrm{nzd}(m, a)$, do rješenja kongruencije $a'u \equiv b' \pmod{m'}$, gdje je $a' = a/d$, $b' = b/d$ i $m' = m/d$, se može vrlo jednostavno doći primjenom rekurzivne relacije

$$u_{-1} = 0, \quad u_0 = 1; \quad u_i = u_{i-2} - q_i u_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

gdje je k indeks posljednjeg ostatka u Euklidovom algoritmu koji je različit od 0, a q_i su količnici iz Euklidovog algoritma. U tom slučaju je $\bar{u} \equiv u_k \pmod{m'}$ rješenje kongruencije $a'\bar{u} \equiv 1 \pmod{m'}$, pa je $u \equiv b'u_k \pmod{m'}$ rješenje kongruencije $a'u \equiv b' \pmod{m'}$.

Sada su rješenja kongruencije $ax \equiv b \pmod{m}$ dana s

$$x \equiv u + jm' \pmod{m}, \ j = 0, 1, \ldots, d-1.$$

Primjer 2.1 *Riješiti kongruenciju* $195x \equiv 57 \pmod{231}$.

Rješenje: Primijenimo Euklidov algoritam da odredimo nzd$(231, 195)$.

$$\begin{aligned} 231 &= 195 \cdot 1 + 36 \\ 195 &= 36 \cdot 5 + 15 \\ 36 &= 15 \cdot 2 + 6 \\ 15 &= 6 \cdot 2 + 3 \\ 6 &= 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

Dobili smo da je $d = \text{nzd}(231, 195) = 3$. Kako $3|57$ to dana kongruencija ima rješenje (ima 3 rješenja), i imamo da je $a' = 195/3 = 65$, $b' = 57/3 = 19$ i $m' = 231/3 = 77$.

Sada primjenimo navedenu rekurzivnu relaciju.

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	5	2	2
u_i	0	1	-1	6	-13	$\mathbf{32}$

Dobili smo da je $\bar{u} \equiv 32 \pmod{77}$ rješenje kongruencije $65u \equiv 1 \pmod{77}$, pa je

$$u \equiv 19 \cdot 32 \equiv 608 \equiv 69 \pmod{77}$$

rješenje kongruencije $65u \equiv 19 \pmod{77}$. Na kraju dobijamo rješenja polazne kongruencije.

$$x \equiv 69, 69 + 77, 69 + 2 \cdot 77 \equiv 69, 146, 223 \pmod{231}.$$

♢

3 Sistemi linearnih kongruencija

Analiziraćemo rješavanje sistema linearnih kongruencija s jednom nepoznatom. Ukoliko imamo sistem od dvije linearne kongruencije, jedna od metoda za rješavanje sistema je da se riješi jedna od kongruencija sistema, a onda se odaberu ona njena rješenja koja zadovoljavaju drugu kongruenciju.

Primjer 3.1 *Riješiti sistem kongruencija*

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 3 \pmod{7}, \\ 4x &\equiv 5 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Rješenje: Riješimo li prvu kongruenciju dobijamo da je njeno rješenje $x \equiv 5 \pmod 7$, tj. $x = 5 + 7k,\ k \in \mathbb{Z}$. Uvrstimo li to rješenje u drugu kongruenciju, dobijamo

$$\begin{aligned} 4(5+7k) &\equiv 5 \pmod{11} \\ 20 + 28k &\equiv 5 \pmod{11} \\ 28k &\equiv -15 \pmod{11} \\ 6k &\equiv 7 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Riješimo li sada kongruenciju $6k \equiv 7 \pmod{11}$ dobijamo da je njeno rješenje $k \equiv 3 \pmod{11}$, tj. $k = 3 + 11l,\ l \in \mathbb{Z}$. Uvrstimo li to u formulu za x dobijamo

$$x = 5 + 7(3 + 11l) = 5 + 21 + 77l = 26 + 77l,\ l \in \mathbb{Z},$$

pa je rješenje polaznog sistema

$$x \equiv 26 \pmod{77}.$$

♢

Ako bismo trebali riješiti sistem od tri linearne kongruencije s jednom nepoznatom, onda bismo prvo na opisani način riješili sistem od dvije kongruencije, a onda iz dobijenih rješenja odredili ona koja zadovoljavaju i treću kongruenciju. Kao što se vidi, s porastom broja kongruencija, postupak postaje sve komplikovaniji. Iz tog razloga bi bilo dobro imati metodu za rješavanje sistema od proizvoljnog broja linearnih kongruencija s jednom (zajedničkom) nepoznatom.

4 Kineski teorem o ostacima

Kineski teorem o ostacima (CRT – Chinese Remainder Theorem) govori o rješenju sistema linearnih kongruencija s jednom (zajedničkom) nepoznatom. Teorem je ime dobio prema spoznaji da je jedan njegov specijalan slučaj bio poznat kineskom matematičaru Sun Tsuu (Sun Tsu – živio u periodu od 200. god. pr.n.e. do 200. god. n.e.).

Teorem 4.1 (Kineski teorem o ostacima) *Neka su $m_1, m_2, \ldots, m_r$ u parovima relativno prosti prirodni brojevi i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ cijeli brojevi. Tada sistem od r kongruencija*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{m_r} \end{aligned}$$

ima rješenje. Ako je x_0 jedno rješenje, onda su sva rješenja tog sistema dana s

$$x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2 \cdots m_r}.$$

Sada ćemo dati dokaz Kineskog teorema o ostacima jer nam daje algoritam za rješavanje sistema linearnih kongruencija s jednom nepoznatom.

Dokaz: Neka je $M = m_1 m_2 \cdots m_r$, te neka je $n_j = \frac{M}{m_j}$ za $j = 1, 2, \ldots, r$. Tada je $\text{nzd}(m_j, n_j) = 1$, pa postoji cijeli broj x_j takav da je $n_j x_j \equiv a_j \pmod{m_j}$. Sada za broj

$$x_0 = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_r x_r$$

vrijedi

$$x_0 \equiv 0 + 0 + \cdots + 0 + n_j x_j + 0 + \cdots 0 \equiv a_j \pmod{m_j},$$

pa slijedi da je x_0 rješenje danog sistema kongruencija.

Ako su x i y dva rješenja danog sistema kongruencija, onda je $x \equiv y \pmod{m_j}$ za $j = 1, 2, \ldots, r$, pa kako su m_j u parovima prosti, dobijamo da je $x \equiv y \pmod{M}$.

□

Primjer 4.1 *Riješiti sistem linearnih kongruencija*

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 7, \\ x &\equiv 3 \pmod 4, \\ x &\equiv 9 \pmod{15}. \end{aligned}$$

Rješenje: Kako je $m_1 = 7$, $m_2 = 4 = 2 \cdot 2$ i $m_3 = 15 = 3 \cdot 5$, to su moduli u parovima relativno prosti pa možemo primijeniti Kineski teorem o ostacima za rješavanje dobijenog sistema.

$$M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 7 \cdot 4 \cdot 15 = 420$$

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{M}{m_1} = \frac{420}{7} = 60 \\ n_2 &= \frac{M}{m_2} = \frac{420}{4} = 105 \\ n_3 &= \frac{M}{m_3} = \frac{420}{15} = 28 \end{aligned}$$

Da bismo došli do rješenja sistema potrebno je da riješimo sljedeće tri linearne kongruencije:

$$\begin{aligned} 60x_1 &\equiv 1 \pmod 7, \\ 105x_2 &\equiv 3 \pmod 4, \\ 28x_3 &\equiv 9 \pmod{15}. \end{aligned}$$

Skratimo li kongruencije po odgovarajućim modulima ($60 \equiv 4 \pmod 7$, $105 \equiv 1 \pmod 4$, $28 \equiv 13 \pmod{15}$) dobijamo sljedeće kongruencije:

$$\begin{aligned} 4x_1 &\equiv 1 \pmod 7, \\ x_2 &\equiv 3 \pmod 4, \\ 13x_3 &\equiv 9 \pmod{15}. \end{aligned}$$

Riješimo li svaku kongruenciju posebno dobijamo sljedeće rezultate:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 2 \pmod 7, \\ x_2 &\equiv 3 \pmod 4, \\ x_3 &\equiv 3 \pmod{15}. \end{aligned}$$

Sada je rješenje polaznog sistema.

$$\begin{aligned} x &\equiv n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 \pmod M \\ &\equiv 60 \cdot 2 + 105 \cdot 3 + 28 \cdot 3 \pmod{420} \\ &\equiv 519 \pmod{420} \\ &\equiv 99 \pmod{420} \end{aligned}$$

♢

Napomenimo da je uvjet da su moduli m_i u parovima relativno prosti vrlo važan, jer na primjer, sistem

$$x \equiv 0 \pmod 2, \qquad x \equiv 1 \pmod 2$$

nema rješenja.

Međutim, sistem linearnih kongruencija s jednom nepoznatom, u kojem moduli nisu u parovima relativno prosti, može ali ne mora, imati rješenje. Postavlja se pitanje da li se i u tom slučaju može primijeniti Kineski teorem o ostacima. To predstavlja predmet naše analize.

Primjer 4.2 *Riješiti sistem linearnih kongruencija*

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{264}, \\ x &\equiv 25 \pmod{90}, \\ x &\equiv 15 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Rješenje: Rastavimo li module na proste faktore imamo da je $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ i $100 = 2^2 \cdot 5^2$, pa zaključujemo da moduli nisu u parovima relativno prosti (npr. $\text{nzd}(264, 90) = 2 \cdot 3 = 6$). To znači, ne samo da ne možemo primijeniti Kineski teorem o ostacima, nego i da sistem možda nema rješenja.

Iskoristimo li rastave modula na proste faktore, dobijamo sistem od 8 jednačina koji je ekvivalentan polaznom sistemu.

$$x \equiv 7 \pmod{2^3}, \quad x \equiv 7 \pmod{3}, \quad x \equiv 7 \pmod{11},$$
$$x \equiv 25 \pmod{2}, \quad x \equiv 25 \pmod{3^2}, \quad x \equiv 25 \pmod{5},$$
$$x \equiv 15 \pmod{2^2}, \quad x \equiv 15 \pmod{5^2}.$$

Skratimo li kongruencije po odgovarajućim modulima dobijamo sljedeći sistem:

$$x \equiv 7 \pmod{2^3}, \quad x \equiv 1 \pmod{3}, \quad x \equiv 7 \pmod{11},$$
$$x \equiv 1 \pmod{2}, \quad x \equiv 7 \pmod{3^2}, \quad x \equiv 0 \pmod{5},$$
$$x \equiv 3 \pmod{2^2}, \quad x \equiv 15 \pmod{5^2}.$$

Sada usporedimo kongruencije koje odgovaraju istom prostom broju.

$$(x \equiv 1 \pmod{2},\ x \equiv 3 \pmod{2^2},\ x \equiv 7 \pmod{2^3}) \Leftrightarrow x \equiv 7 \pmod{2^3}$$
$$(x \equiv 1 \pmod{3},\ x \equiv 7 \pmod{3^2}) \Leftrightarrow x \equiv 7 \pmod{3^2}$$
$$(x \equiv 0 \pmod{5}, \quad x \equiv 15 \pmod{5^2}) \Leftrightarrow x \equiv 15 \pmod{25}$$
$$x \equiv 7 \pmod{11}$$

Na kraju dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{8}, \\ x &\equiv 7 \pmod{9}), \\ x &\equiv 15 \pmod{25}, \\ x &\equiv 7 \pmod{11}, \end{aligned}$$

u kojem su moduli u parovima relativno prosti pa možemo primijeniti Kineski teorem o ostacima. Rješavajući sistem na opisani način dobijamo: $a_1 = 7$, $a_2 = 7$, $a_3 = 15$, $a_4 = 7$, $m_1 = 8$, $m_2 = 9$, $m_3 = 25$, $m_4 = 11$, $M = 19800$, $n_1 = 2475$, $n_2 = 2200$, $n_3 = 792$, $n_4 = 1800$, $2475x \equiv 7 \pmod{8}$, $2200x \equiv 7 \pmod{9}$, $792x \equiv 15 \pmod{25}$, $1800x \equiv 7 \pmod{11}$, pa nakon skraćivanja dobijamo sljedeći sistem:

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 7 \pmod{8}, \\ 4x &\equiv 7 \pmod{9}), \\ 17x &\equiv 15 \pmod{25}, \\ 7x &\equiv 7 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Ovdje je očigledno da je $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ i $x_4 = 1$. Nakon rješavanja treće kongruencije dobijamo da je $x_3 = 20$. Sada je

$$\begin{aligned} x &\equiv 2475 \cdot 5 + 2200 \cdot 4 + 792 \cdot 20 + 1800 \cdot 1 \pmod{19800} \\ &\equiv 38815 \pmod{19800} \\ &\equiv 19015 \pmod{19800}. \end{aligned}$$

♢

Primjer 4.3 *Riješiti sistem linearnih kongruencija*

$$\begin{aligned} x &\equiv 10 \pmod{12}, \\ x &\equiv 8 \pmod{15}, \\ x &\equiv 6 \pmod{56}. \end{aligned}$$

Rješenje: Nakon postupka opisanog u prethodnom primjeru dobijamo:

$$\begin{aligned} x \equiv 2 \pmod{2^2}, \quad x \equiv 6 \pmod{2^3}, \\ x \equiv 1 \pmod{3}, \quad x \equiv 2 \pmod{3}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 6 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Kako neki broj pri dijeljenju s 3 ne može istovremeno dati ostatak 1 i 2, to zaključujemo da dani sistem nema rješenja.

♢

Možemo sada analizirati još jedan oblik sistema linearnih kongruencija s jednom nepoznatom. Interesuje nas način njegovog rješavanja.

Primjer 4.4 *Riješiti sistem linearnih kongruencija*

$$\begin{aligned} 7x &\equiv 12 \pmod{39}, \\ 2x &\equiv 7 \pmod{35}, \\ 21x &\equiv 15 \pmod{22}. \end{aligned}$$

Rješenje: Iako su moduli u parovima relativno prosti, za primjenu Kineskog teorema o ostacima nam problem prave lijeve strane kongruencija. Ipak, možemo iskoristiti 5. osobinu iz Teorema 1.1. Kako je $\text{nzd}(7, 2, 21) = 42$, to prvu kongruenciju množimo s $6 = 42/7$, drugu množimo s $21 = 42/2$, a treću množimo s $2 = 42/21$, i dobijamo sljedeći sistem:

$$\begin{aligned} 42x &\equiv 72 \pmod{234}, \\ 42x &\equiv 147 \pmod{735}, \\ 42x &\equiv 30 \pmod{44}. \end{aligned}$$

Uvodeći suspstituciju $t = 42x$, dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} t &\equiv 72 \pmod{234}, \\ t &\equiv 147 \pmod{735}, \\ t &\equiv 30 \pmod{44}. \end{aligned}$$

Riješimo li ga na već opisani način, dobijamo da je

$$t \equiv 71442 \pmod{1261260}.$$

Vratimo li supstituciju nazad, dobijamo da je rješenje polaznog sistema

$$x \equiv 1701 \pmod{30030}.$$

♢

Literatura

[1] B. Ibrahimpašić: *Kriptografija kroz primjere*, Pedagoški fakultet, Bihać, 2011.

[2] B. Ibrahimpašić, S. Ibrahimpašić, D. Kovačević, A. Šehanović: *Divisibility Rules*, OML, 11/2(2011) 107–112.

[3] V. Mićić, Z. Kadelburg, D. Đukić: *Uvod u teoriju brojeva*, DMS, Beograd, 2004.

[4] I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery: *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.

[5] B. Pavković, B. Dakić, P. Mladinić: *Elementarna teorija brojeva*, HMD, Zagreb, 1994.

[6] S. Y. Yan: *Number Theory for Computing*, Springer–Verlag, Berlin, 2002.

Primljeno 22.02.2013. Dostupno online 29.04.2013.