MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XIX (1)(2013), 11-16

Konstrukcija jedne interesante polugrupe

Daniel A. Romano[1]

Sažetak: U ovom članku dat je opis jedne interesatne komutativne polugrupe $(\wp(U), \oplus)$ determinisane na partitivnom skupu $\wp(U)$ bilo kojega skupa U posredstvom poznatih operacija sa skupovima. Na ovoj polugrupi skupovna 'relacija inkluzije' je relacija parcijalnog uredjenja ali uvedena polugrupna operacija nije saglasna sa tom relacijom parcijalnog uredjenja.

Ključne riječi i fraze: polugrupa, unutrašnja binarna operacija, relacija parcijalnog uredjenja, kompatibilnost

Abstract: In this article we give description of a construction of one interesting commutative semigroup determined on the partitive set $\wp(U)$ of any set U by known set operations. In this semigroup the set inclusion relation is a partial order but this order is not compatible with the semigroup operation.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 03E02, 03E20, 20M14
ZDM Subject Classification (2010): E60, H20

Key words and phrases: semigroup, internal binary operation, partial order, compatibility

1 Uvod

Neka je S neprazan skup. Za totalnu funkciju $\varpi : S \times S \longrightarrow S$ kažemo da je *unutraşnja binarna operacija* (u daljem *operacija*) na skupu S. Dakle, da bi funkcija ϖ bila dobro definisana na skupu S potrebno je i dovoljno da bude:

(i) $Dom(\varpi) = S \times S$;

(ii) $(\forall a, b, u, v \in S)((a = u \wedge b = v) \Longrightarrow \varpi(a, b) = \varpi(u, v))$.

U tom slučaju, za operaciju ϖ kažemo da na nosaču S gradi *algebarsku strukturu*, a za uredjeni par (S, ϖ) kažemo da je *grupoid*. Dalje, ako vrijedi

(a) $(\forall a, b, c \in S)(\varpi(a, \varpi(b, c)) = \varpi(\varpi(a, b), c))$, tada za grupoid (S, ϖ) kažemo da je *polugrupa*;

(b) $(\forall a, b \in S)(\varpi(a, b) = \varpi(b, a))$, tada za groupid (S, ϖ) kažemo da je *komutativan* grupoid.

[1]Pedagoški fakultet Bijeljina, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara bb. Bosna i Hercegovina, e-mail: bato49@hotmail.com

Dalje, u slučaju da je formula

$$(\exists e \in S)(\forall a \in S)(\varpi(e,a) = a = \varpi(a,e))$$

valjana fromula u polugrupi (S, ϖ), bez poteškoća se pokazuje da je element e jedinstven u polugrupi (S, ϖ). Taj element zovemo *neutralni* element za operaciju ϖ. U tom slučaju, polugrupu sa neutralnim elementom nazivamo *monoid*. Neka je a element polugrupe (S, ϖ) sa neutralnim elementom e. Za element a' monoida (S, ϖ) kažemo da je *inverz* elementa a ako vrijedi

$$\varpi(a', a) = e = \varpi(a, a').$$

Lako se pokazuje da ako takav element postoji onda je on jedinstven.

Matematička disciplina koja se bavi izučavanjem ovih algebarskih struktura je *Teorija polugrupa*. O teoriji polugrupa pogledati knjige [1] i [2].

Od posebnog interesa u Teoriji polugrupa su tzv. uredjene polugrupe. Evo o čemu je riječ.

Neka su S i T dati skupovi. Podskup $\alpha \subseteq S \times T$ nazivamo *relacija* izmedju elemenata skupa S i elemenata skupa T. Skup $\{(t,s) \in T \times S : (s,t) \in \alpha\}$ je *inverz* relacije α, i označavamo je sa α^{-1}. Dalje, relaciji α pridružujemo skupove

$$Dom(\alpha) = \{s \in S : (\exists t \in T)((s,t) \in \alpha)\},$$

$$Rang(\alpha) = \{t \in T : (\exists s \in S)((s,t) \in \alpha)\}.$$

Prvi od njih je *domen* relacije α, a drugi je *rang* relacije α. U matematici su od interesa neke posebne relacije. Neke od njih su:

(o) *Identitet* $\triangle_S = \{(s,s) : s \in S\}$;

(i) Relacija α je *korespodencija* ako je $Dom(\alpha) = S$;

(ii) Relacija α je *surjekcija* ako je $Rang(\alpha) = T$;

(iii) Za relaciju α kažemo da je *funkcija* ako vrijedi

$$(\forall a, b \in S)(\forall u, v \in T)(((a,u) \in \alpha \wedge (b,v) \in \alpha \wedge a = b) \Longrightarrow u = v);$$

(iv) Za relaciju α kažemo da je *injekcija* ako vrijedi

$$(\forall a, b \in S)(\forall u, v \in T)(((a,u) \in \alpha \wedge (b,v) \in \alpha \wedge u = v) \Longrightarrow a = b).$$

Za relacije $\alpha \subseteq S \times T$ i $\beta \subseteq T \times W$ relacija

$$\{(s,w) \in S \times W : (\exists t \in T)((s,t) \in \alpha \wedge (t,w) \in \beta)\}$$

je *proizvod* (ili *kompozicija, superpozicija*) relacija α i β. Obiljeavamo je sa $\beta \circ \alpha$. Bez većih poteškoća se provjerava da za relaciju $\alpha \subseteq S \times S$, u opštem slučaju, vrijedi

$$\alpha \circ \triangle_S = \alpha, \ \triangle_S \circ \alpha = \alpha.$$

Medjutim, za relaciju $\alpha \subseteq S \times T$, u opštem slučaju, ne vrijedi [2]

[2]Interesantni zadaci su ustanoviti potrebne i dovoljne uslove kada su pomenute jednakosti pojedinačno ili zajedno valjane formule.

$$\alpha^{-1} \circ \alpha = \triangle_S,\ \alpha \circ \alpha^{-1} = \triangle_T.$$

Dalje, za relaciju $\alpha \subseteq S \times S$ kažemo da je *relacija parcijalnog uredjenja* na skupu S ako je refleksiva, antisimetrična i tranzitivna, tj. ako vrijedi

$$\triangle_S \subseteq \alpha,\ \alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \triangle_S,\ \alpha \circ \alpha \subseteq \alpha.$$

Ako je (S, ϖ) polugrupa, za relaciju parcijalnog uredjenja α kažemo da je *kompatibilna* (ili *saglasna*) sa polugrupnom operacijom ϖ ako vrijedi

$$(\forall s, t, u \in S)((s, t) \in \alpha \Longrightarrow ((\varpi(s, u), \varpi(t, u)) \in \alpha \wedge ((\varpi(u, s), \varpi(u, t)) \in \alpha).$$

U tom slučaju polugrupu (S, ϖ) nazivamo *uredjenom* polugrupom.

U ovom članku konstruisan je jedan interesantan primjer komutativne polugrupe unutar Naivne teorije skupova. Za razumijevanje teksta dovoljna su elementarna zanja iz te teorije. Tekst može poslužiti za osvježenje kursa "Osnove matematike" na studijskoj grupi za matematiku (prvog ciklusa), odnosno na studijskoj grupi za obrazovanje vaspitača drugog i/ili trećeg ciklusa, u namjeri da se pokaže da se algebarske strukture 'prirodno' pojavljuju.

Za nedefinisane oznake i korištene pojmove čitalac može pogledati knjige [1], [2], [3] i [4] ili bilo koju knjigu o Naivnoj teoriji skupova.

2 Konstrukcija

U ovom odjeljku konstruisaćemo jedan primjer komutativne polugrupe determinisane na Naivnoj teoriji skupova. O Naivnoj i Aksiomatskoj teoriji skupova pogledati, na primjer, u knjigama [3] i [4].

Neka je zadan neprazan skup U. Na partitivnom skupu $\wp(U)$ skupa U definišimo unutrašnju binarnu operaciju

$$\oplus : \wp(U) \times \wp(U) \longrightarrow \wp(U)$$

na slijedeći način: Za elemente $A, B \in \wp(U)$, tj. za podskupove A i B skupa U, stavimo

$$A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Budući da vrijedi, ako je $A = X$ i $B = Y$, tada je $A \oplus B = X \oplus Y$ jer je $A \cup B = X \cup Y$ i $A \cap B = X \cap Y$, zaključujemo da je relacija $\oplus$ ekstenzivna u odnosu na jednakost medju skupovima, tj. $\oplus$ je funkcija svuda definisana na $\wp(U) \times \wp(U)$. Prema tome, $\oplus$ je unutrašnja binarna operacija na $\wp(U)$. Dakle, $(\wp(U), \oplus)$ je grupoid. Provjerimo koje osobine ima ovako determinisana operacija. Ako sa X^C označimo komplement skupa X u univerzumu U, tj. $X^C = U \backslash X$, imamo:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \cup B) \backslash (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C \end{aligned}$$

$= (A \cup B) \cap (A^C \cup B^C)$
$= ((A \cup B) \cap A^C) \cup ((A \cup B) \cap B^C)$
$= ((A \cap A^C) \cup (B \cap A^C) \cup (A \cap B^C) \cup (B \cap B^C)$
$= (B \cap A^C) \cup (A \cap B^C)$
$= (B \backslash A) \cup (A \backslash B).$

(1) Iz prethodnih jednakosti odmah zaključujemo da je operacija $\oplus$ komutativna, tj. za proizvoljne podskupove A i B skupa U vrijedi

$$A \oplus B = B \oplus A.$$

(2) Neka su A, B i C po volji izabrani podskupovi skupa U. Izračunajmo $A \oplus (B \oplus C)$.

$A \oplus (B \oplus C) = ((B \oplus C) \cap A^C) \cup (A \cap (B \oplus C)^C)$
$= (((C \cap B^C) \cup (B \cap C^C)) \cap A^C) \cup (A \cap ((C \cap B^C) \cup (B \cap C^C))^C)$
$= (A^C \cap C \cap B^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A \cap ((C \cap B^C)^C \cap (B \cap C^C)^C))$
$= (A^C \cap C \cap B^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A \cap ((C^C \cup B) \cap (B_C \cup C)))$
$= (A^C \cap C \cap B^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A \cap (((C^C \cup B) \cap B^C) \cup ((C^C \cup B) \cap C)))$
$= (A^C \cap C \cap B^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A \cap ((C^C \cap B^C) \cup (B \cap B^C) \cup (C^C \cap C) \cup (B \cap C)))$
$= (A^C \cap C \cap B^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A \cap C^C \cap B^C) \cup (A \cap B \cap C)$

S druge strane, izračunajmo $(A \oplus B) \oplus C$.

$(A \oplus B) \oplus C = (C \cap (A \oplus B)^C) \cup ((A \oplus B) \cap C^C)$
$= (C \cap ((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B))^C) \cup (((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)) \cap C^C)$
$= (C \cap ((A \cap B^C)^C \cap (A^C \cap B)^C)) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C)$
$= (C \cap ((A^C \cup B) \cap (A \cup B^C)) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C)$
$= (C \cap (((A^C \cap A) \cup (A^C \cap B^C)) \cup ((B \cap A) \cup (B \cap B^C))) \cup$
$(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C)$
$= (C \cap A^C \cap B^C) \cup (C \cap B \cap A) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C).$

Budući da su desne strane ove dvije jednakosti jednake, zaključujemo da vrijedi

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$$

Kako su skupovi A, B i C bili izabrani po volji, zaključujemo da je operacija $\oplus$ asocijativna, tj. grupoid $(\wp(U), \oplus)$ je polugrupa.[3]

(3) Iz $A \oplus \emptyset = (\emptyset^C \cap A) \cup (\emptyset \cap A^C) = (U \cap A) \cup \emptyset = A$ zaključujemo da je $\emptyset$ neutralni element u polugrupi $(\wp(U), \oplus)$.

[3] Da je relacija $\oplus$ asocijativna mogli smo zaključiti iz njenog oblika. Zaista, u formuli, kojom je predstavljen komponat $A \oplus (B \oplus C)$, skupovi i njihovi komplementi pojavljuju se pravilno i njihovo pojavljivanje u formuli ne zavisi od načina njene konstrukcije.

(4) Lako se provjerava da u ovoj polugrupi svaki element je sam sebi inverz, tj. da vrijedi

$$A \oplus A = \emptyset.$$

Zaista, imamo: $A \oplus A = (A^C \cap A) \cup (A \cap A^C) = \emptyset$.

Vijedi i obrnuto, tj. $A \oplus B = \emptyset \Longrightarrow A = B$. Naime, ako pretpostavimo da za skupova A i B vrijedi $A \oplus B = \emptyset$, tj. ako vrijedi $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \emptyset$, tada mora biti $A \cup B \subseteq A \cap B$. Poslednja inkluzija je moguća ako je $A = B$.

Napomena. Polugrupa $(\wp(U), \otimes)$ je grupa i to Abelova. Operacija $\otimes$ je simetrična razlika skupova. U tekstu je dokazano da je ona asocijativna, ima neutralni element i svaki element je sebi inverzan. Prema tome, ova struktura je polugrupa, ali i Abelova grupa. Ona je svakako interesantna po tome to je njen svaki element sam sebi inverz. Sem toga, jednostavno se vidi da je presjek distributivan prema simetričnoj razlici, tj. vrijedi

$$(A \otimes B) \cap C = (A \cap C) \otimes (B \cap C).$$

Iz toga slijedi da se struktura $(\wp(U), \otimes, \cap)$ prsten. $\square$

(5) $A \oplus U = (U^C \cap A) \cup (U \cap A^C) = (\emptyset \cap A) \cup A^C = A^C$.

(6) $A \oplus A^C = ((A^C)^C \cap A) \cup (A^C \cap A^C) = (A \cap A) \cup (A^C \cap A^C) = A \cup A^C = U$.

Tvrdnje iznesene u tačkama (5) i (6) omogućavaju nam da dokažemo slijedeće dvije tvrdnje:

$$A^C \oplus B^C = A \oplus B$$
$$(A \oplus B)^C = A \oplus B^C = A^C \oplus B.$$

Zaista, imamo:

(i) $A^C \oplus B^C = (A \oplus U) \oplus (B \oplus U) = A \oplus (U \oplus U) \oplus B = A \oplus B$.

(ii) $(A \oplus B)^C = (A \oplus B) \oplus U = A \oplus (B \oplus U) = A \oplus B^C$
$\qquad = (A \oplus B) \oplus U = (A \oplus U) \oplus B = A^C \oplus B$.

(7) Kako je $A \cap A^C = \emptyset$, prethodna tvrdnja, tvrdnja (6), je specijalan slučaj slijedeće tvrdnje.

Ako za skupove A i B vrijedi $A \cap B = \emptyset$, tada imamo

$$A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \cup B).$$

Odmah se vidi da vrijedi i obrnuta tvrdnja. Naime, ako je $A \oplus B = A \cup B$, tada je $A \cap B = \emptyset$.

(8) Na kraju, pretpostavimo da je $A \subseteq B$. Tada imamo

$$A \oplus B = (B \backslash A) \cup (A \backslash B) = (B \backslash A).$$

Pretpostavimo da za skupove A i B vrijedi $A \oplus B = B \backslash A$. To znači da je $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = B \backslash A$. Odavde zaključujemo da mora biti $A \backslash B \subseteq B \backslash A$. Ovo poslednje je moguće samo ako je $A \backslash B = \emptyset$, tj. ako je $A \subseteq B$.

Nije teško uočiti da je relacija $\subseteq$ relacija parcijalnog uredjenja na polugrupi $(\wp(U), \oplus)$ ali da ta relacija nije saglasna sa operacijom $\oplus$. U stvari, za po volji izabrane podskupove A, B i X podskupa skupa U ako je $A \subseteq B$ ne mora obavezno biti $A \oplus X \subseteq B \oplus X$, jer, u opštem slučaju, ne vrijedi $B \cap A^C \cap X = \emptyset$. Dakle, polugrupa $(\wp(U), \oplus)$ nije uredjena polugrupa.

Autor se zahvaljuje recenzentima na korisnim sigestijama. Takodje, autor se zahvaljuje Milovanu Vinčiću, profesoru Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Banjoj Luci, na strpljivom čitanju teksta tokom njegovog nastajanja.

References

[1] Tero Harju: *Lecture Notes in Semigroups*; Preprint 1996.

[2] J. M. Howie: *An Introduction to Semigroup Theory*; Academic press, 1976.

[3] D.A.Romano: *Osnove matematike, Drugi dio: Teorija skupova - Knjiga 1: Naivna teorija skupova*, Mat-Kol (Banja Luka), XII (2) (2006), A5, 1-122

[4] D.A.Romano: *Osnove matematike, Drugi dio: Teorija skupova - Knjiga 2: Zermelo-Frankelova aksionatska teorija skupova*, Mat-Kol (Banja Luka), Posebna izdanja, No. 5(2007), B5, 1-154

Primljeno u redakciju: 04. maj 2012; revidirana verzija 23.05.2012; dostupno na interneto od 18.06.2012