

## Некоторые приложения математического анализа к задачам естествознания. I

В. И. Гаврилов<sup>1</sup>, Ж. Павичевич<sup>2</sup>, А. В. Субботин<sup>3</sup>

### Abstract

Идея написания настоящей статьи возникла в период подготовки нового издания учебника [1], когда было принято решение расширить в нем число примеров по использованию результатов и методов университетского курса математического анализа в смежных математических дисциплинах, а также в других естественных науках. Было решено также сначала собрать примеры применения основ дифференциального и интегрального исчисления для решения как простых, так и достаточно глубоких задач физики, химии и биологии, в которых используются функции одного действительного переменного, а задачи, связанные с функциями нескольких переменных, оставить для другой публикации. Кроме того, с целью оптимизации изложения было решено оформить статью в двух частях с одинаковыми названиями: в первой части рассмотреть задачи, в решении которых использованы только методы дифференциального исчисления, а во второй части собрать задачи, требующие применения еще и простейших методов интегрального исчисления. Настоящая публикация, представляющая первую часть статьи, состоит из четырех параграфов; столько же будет содержать и вторая ее часть.

---

<sup>1</sup>МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, e-mail: 4411066@mail.ru

<sup>2</sup>Университет Черногории, Природно-математический факультет, e-mail: zarkop@ac.me

<sup>3</sup>e-mail: awsubbotin@mail.ru

Нужно отметить, что и содержание обеих частей статьи, и способ его изложения полностью понятны не только студентам-первокурсникам всех естественных и технических факультетов университетов, но и прилежным школьникам старших классов средней школы, интересующимся естественными науками. Поэтому предлагаемый материал может быть использован в преподавании математики и дисциплин естественно-научного цикла как сотрудниками высшей школы, так и учителями старших классов средней школы.

Символы  $\triangleleft$  и  $\triangleright$  обозначают начало и конец доказательств.

*Ключевые слова и фразы:* законы отражения и преломления света, гармонический осциллятор, затухающие колебания, изменение популяции сосуществующих видов.

The idea of writing of present paper was evolved during a preparation of new edition of textbook [1]. It was decided to collect a number of examples in physics, chemistry and biology that use differential calculus of functions of one real variable. The second part of paper supposes to collect problems requiring the use of integral calculus. Symbols  $\triangleleft$  and  $\triangleright$  denote a begin and end of proofs.

*AMS Mathematics Subject Classification (2010):* 97I40

*Key words and phrases:* law of reflection and deflection of light, harmonic oscillations, decaying oscillations, population of co-existing species.

## §1. Законы отражения и преломления света

В этом параграфе объясняются законы отражения и преломления света, исходя из принципа Гюйгенса — путь света таков, что свет на него затрачивает минимальное время.

### 1.1. Простейший случай.

Рассматривается задача: точка движется из положения  $P$  в положение  $Q$  (см. рис. 1) таким образом, что ее скорости в нижней и верхней полуплоскостях постоянны и равны, соответственно,  $v_1$  и  $v_2$ . Спрашивается, какой должна быть траектория движения точки, чтобы на весь путь затратить наименьшее время?

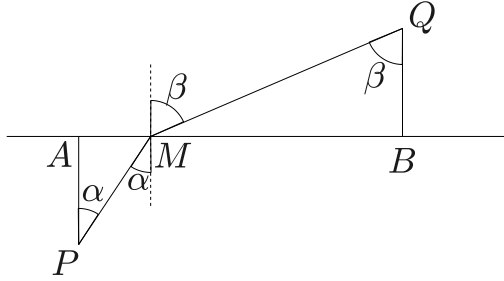


Рис. 1.

◁ Ясно, что если  $v_1 = v_2$ , то искомая траектория есть прямая  $PQ$ . Если же  $v_1 \neq v_2$ , то ею будет ломаная  $PMQ$  и положение точки  $M$  надо определить так, чтобы на весь путь  $PMQ$  было потрачено наименьшее время.

Пусть  $PA \perp AB$  и  $PA = a$ ,  $QB \perp AB$  и  $QB = b$ , а  $AB = l$  и  $AM = x$ . Тогда время  $t$ , затраченное на путь  $PMQ$ , задается формулой

$$t = \frac{PM}{v_1} + \frac{QM}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2}$$

и  $t$  есть функция от  $x$ . Надо найти минимум этой функции.

В точке минимума производная  $t'_x$  должна обращаться в нуль (теорема Ферма) и

$$t'_x = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 0,$$

откуда

$$\frac{x}{x^2 + a^2} : \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Из чертежа видно, что

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{AM}{PM} = \sin \alpha, \quad \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \frac{MB}{MQ} = \sin \beta,$$

где  $\alpha = \angle APM$ ,  $\beta = \angle MQB$ , и поэтому в точке минимума должно выполняться равенство

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (1)$$

Это равенство, как легко видеть, есть известный из физики закон преломления света, поскольку на рис. 1 пунктир в точке  $M$  перпендикулярен  $AB$  и  $\alpha$  — угол падения,  $\beta$  — угол преломления.

Таким же способом решается аналогичная задача, когда исходные пункты  $P$  и  $Q$  лежат в одной полуплоскости (скажем, в верхней), точка движется с постоянной скоростью  $v$  из  $P$  в  $Q$ , проходя через некоторую точку  $M$  на прямой  $AB$ , и требуется найти такое положение точки  $M$  на  $AB$ , чтобы на весь путь  $PMQ$  было затрачено наименьшее время.

Ответ опять приводит к аналогичной формуле (1), в которой  $v_1 = v_2 = v$ , так что синусы углов падения и отражения света оказываются равными, что обосновывает закон отражения света.

### 1.2. Общий случай.

Пусть график положительной функции  $f$ , имеющей всюду производную, разбивает первую четверть координатной плоскости на две части — "верхнюю" и "нижнюю" (рис. 2). Точка движется из начала координат (оно находится в нижней части) в точку  $Q(a, b)$ , принадлежащую "верхней" части. При этом в "нижней" части ее скорость постоянна и равна  $v_1$ , а в "верхней" части ее скорость равна  $v_2$  и тоже постоянна ( $v_1 \neq v_2$ ). По какому закону должна двигаться точка, чтобы на весь путь затратить минимум времени?

◁ Путь точки есть ломаная  $OMQ$ , где положение точки  $M(x, f(x))$  определяется тем, что на путь  $OMQ$  затрачивается минимальное время. Запишем время  $t$ , затраченное точкой на путь:

$$t = \frac{OM}{v_1} + \frac{MQ}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + f^2(x)}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-b)^2}}{v_2}. \quad (2)$$

Мы получили функцию  $t$  от  $x$  — абсциссы точки  $M$ . Нас интересует минимум этой функции.

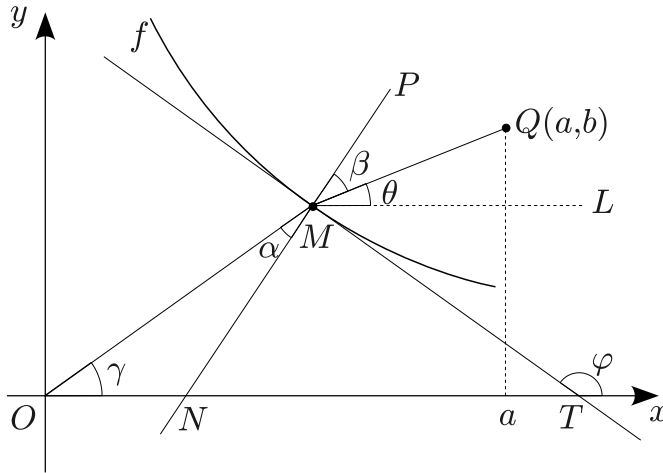


Рис. 2.

Так как функция  $f$  всюду имеет производную, то минимум функции (2) может быть только в той точке, где производная  $t'_x = 0$  (теорема Ферма):

$$t'_x = \frac{x + f(x)f'(x)}{v_1\sqrt{x^2 + f^2(x)}} + \frac{x - a + (f(x) - b)f'(x)}{v_2\sqrt{(x - a)^2 + (f(x) - b)^2}} = 0. \quad (3)$$

На рис. 2 прямая  $MT$  есть касательная к графику функции  $f$  в точке касания  $M$  и  $\varphi$  есть угол ее наклона к оси  $Ox$ , так что  $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$ . Далее, прямая  $PMN$  перпендикулярна касательной  $MT$ , а прямая  $ML$  параллельна оси  $Ox$ . Тогда

$$\sin \gamma = \frac{f(x)}{OM}, \quad \cos \gamma = \frac{x}{OM}, \quad \cos \theta = \frac{a - x}{MQ}, \quad \sin \theta = \frac{b - f(x)}{MQ}$$

и формулу (3) можно переписать в виде

$$\frac{1}{v_1}(\cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{tg} \varphi) - \frac{1}{v_2}(\cos \theta + \sin \theta \operatorname{tg} \varphi) = 0,$$

откуда после умножения на  $\cos \varphi$  получаем

$$\frac{1}{v_1}(\cos \gamma \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi) - \frac{1}{v_2}(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\cos(\varphi - \gamma)}{\cos(\varphi - \theta)} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (4)$$

Угол  $\varphi$  — внешний угол для  $\triangle OMT$  и поэтому  $\varphi = \gamma + \alpha + \frac{\pi}{2}$ , откуда  $\varphi - \gamma = \alpha + \frac{\pi}{2}$  и

$$\cos(\varphi - \gamma) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha. \quad (5)$$

Кроме того, угол  $\varphi$  — внешний для  $\triangle NMT$  и поэтому  $\angle MNT = \varphi - \frac{\pi}{2}$ . Но  $\angle MNT = \angle PML$ , как соответственные углы, и поэтому  $\theta + \beta = \angle PML = \angle MNT = \varphi - \frac{\pi}{2}$ . Отсюда следует, что  $\varphi - \theta = \beta + \frac{\pi}{2}$  и

$$\cos(\varphi - \theta) = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \beta. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получаем формулу (1); т. е. известный закон преломления.  $\triangleright$

**Упражнение.** Аналогично получается закон отражения в общем случае (доказательство предоставляется читателю).

Подчеркнем один важный вывод: *преломление и отражение света происходит так, как будто на некотором промежутке, содержащем точку падения луча, зеркало заменили на отрезок касательной*. Этим мы углубили понимание физической роли касательной к линии.

## §2. Свободные колебания

Типовая модель, иллюстрирующая это физическое явление, состоит в следующем. На горизонтальной пружине, закрепленной в обоих концах, навешен груз массы  $m$ . Отведем его на немного в сторону от положения равновесия и отпустим. Груз начнет совершать движение,

которое называют *свободным колебанием*, и нужно изучить закон этого движения.

Чтобы не усложнять вычислений, считают, что движение груза обусловлено наличием *только двух факторов*: 1) *восстанавливающей силы пружины*, и 2) *сопротивлением среды*, а сам *груз* принимают за *материальную точку* (чтобы иметь возможность использовать законы классической механики).

### 2.1. Гармонические колебания.

Разберем сначала случай *отсутствия сопротивления среды*. Восстанавливающая сила пружины, т. е. сила, которая стремится вернуть груз в положение равновесия, по своей величине *пропорциональна* размеру отклонения груза от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную направлению смещения груза (закон Гука).

Возьмем ось  $Ox$  по оси пружины (см. рис. 3) и начало координат  $O$  поместим в точке равновесия. Тогда положение груза определяется его координатой  $x$ , которая меняется со временем  $t$ ; т. е.  $x$  есть функция времени  $t$ :  $x = x(t)$ . Надо найти эту неизвестную функцию и по ней изучить колебания груза.

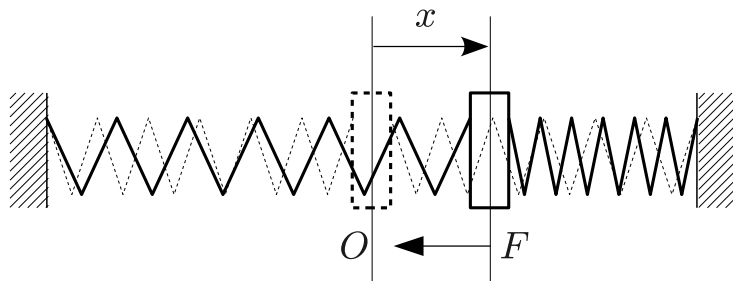


Рис. 3.

Уравнение движения груза, на основании второго закона классической механики, имеет вид

$$F = mj, \quad (7)$$

где  $j$  — ускорение груза, как известно, равное второй производной  $x''$ , а  $F$  есть сумма всех сил, действующих на груз. В рассматриваемом случае

$F = -kx$ ,  $k > 0$  — постоянная, и знак минус поставлен потому, что сила сопротивления пружины направлена от груза к началу координат: если  $x > 0$ , то сила направлена в отрицательном направлении оси  $Ox$ , а если  $x < 0$ , то сила направлена в положительном направлении оси  $Ox$ . Подставляя эти значения для силы и ускорения в уравнение (7), получим уравнение движения груза  $mx'' = -kx$ , или

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) есть частный случай дифференциального уравнения второго порядка

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (9)$$

в котором  $\omega > 0$  — фиксированное число, а  $x = x(t)$  — неизвестная функция аргумента  $t$ , уже никак не связанного со временем, а являющегося независимой переменной со своей областью задания. Дифференциальное уравнение (9) называют *уравнением колебания* (и уравнение (8) объясняет происхождение этого названия).

Таким образом, физическую модель изучаемого природного явления мы описали математическим языком и применим теперь математические методы для нахождения решения. При этом будет рассматриваться не конкретная математическая модель (8), а ее общее представление (9).

Понятно, что постоянная функция  $x = x(t) = 0$  есть решение дифференциального уравнения (9) для всех  $t$  на числовой прямой. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (10)$$

в которой  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные, также является решением уравнения (9) при всех  $t$ , поскольку  $x'' = -C_1\omega^2 \cos \omega t - C_2\omega^2 \sin \omega t$  и  $x'' + \omega^2 x = 0$ . Более того, функция (10) служит *общим решением* дифференциального уравнения (9) в том смысле, что любое решение  $u = u(t)$  уравнения (9) можно получить из формулы (10) надлежащим выбором чисел  $C_1$  и  $C_2$ .



◁ Обоснование этого наблюдения разобьем на три несложных шага.

(i) Проверим сначала, что если функция  $f$  есть решение уравнения (9) и  $f(0) = f'(0) = 0$ , то  $f(t) = 0$  для всех  $t$ .

Рассмотрим функцию  $(f')^2 + \omega^2 f^2$ , которая в модельном случае уравнения (8) при  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  совпадает с удвоенной полной энергией  $E$  груза, деленной на его массу  $m$  (поскольку полагая  $f = x$ ,  $f' = x' = v$ , имеем

$$\frac{m}{2} \left[ (f')^2 + \frac{k}{m} f^2 \right] = \frac{m}{2} \left[ (x')^2 + \frac{k}{m} x^2 \right] = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_{\text{кин}} + E_{\text{потенц}} = E,$$

где  $E_{\text{потенц}} = \frac{kx^2}{2}$  есть работа силы Гука). Так как  $f$  удовлетворяет уравнению (9), то  $f'' + \omega^2 f = 0$  и поэтому

$$\left( (f')^2 + \omega^2 f^2 \right)' = 2f' \cdot f'' + 2\omega^2 f \cdot f' = 2f'(f'' + \omega^2 f) = 0.$$

Отсюда, по критерию постоянства функции на промежутке (понятном и с физической точки зрения: если производная, т. е. скорость изменения функции, равна нулю, то движения нет и функция постоянная), заключаем, что  $(f')^2 + \omega^2 f^2 = C$ , где  $C$  — некоторая постоянная (закон сохранения полной энергии). Поскольку  $f(0) = f'(0) = 0$ , получаем  $C = 0$  и  $(f')^2 + \omega^2 f^2 = 0$ . Поэтому  $\omega^2 f^2 = 0$ ,  $f^2 = 0$ ,  $f = 0$  (число  $\omega > 0$ ).

(ii) Если функции  $f$  и  $g$  суть такие два решения уравнения (9), что  $f(0) = g(0)$  и  $f'(0) = g'(0)$ , то  $f = g$ .

Действительно, для функции  $h = f - g$  имеем

$$h'' = f'' - g'' = -\omega^2 f + \omega^2 g = -\omega^2(f - g) = -\omega^2 h,$$

так что  $h$  есть решение уравнения (9), у которого, по условию,  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 0$ . На основании шага (i) заключаем, что  $h = 0$  для всех  $t$ .

(iii) Остается проверить, что для любого решения  $u = u(t)$  уравнения (9) можно указать такие числа  $C_1$  и  $C_2$ , что

$$u(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Для этого рассмотрим функцию  $g(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{u'(0)}{\omega} \sin \omega t$ , которая, как отмечено выше, есть решение уравнения (9). Поскольку  $g'(t) = -u(0)\omega \sin \omega t + u'(0) \cos \omega t$ , то  $g(0) = u(0)$  и  $g'(0) = u'(0)$  и на основании шага (ii) имеем  $u(t) = g(t)$ .

Этим завершается доказательство утверждения, что формула (10) задает общее решение дифференциального уравнения (9).  $\triangleright$

Функцию (10) можно записать в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (11)$$

где  $A \geq 0$  и  $\varphi$  — произвольные постоянные.

Действительно, положим  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ . Тогда если  $A = 0$ , то  $C_1 = C_2 = 0$  и формула (11) верна; угол  $\varphi$  можно взять любым. Если  $A > 0$ , то точка  $\left(\frac{C_1}{A}, -\frac{C_2}{A}\right)$  лежит на единичной окружности, так как  $\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 + \left(-\frac{C_2}{A}\right)^2 = 1$ , и поэтому существует такой угол  $\varphi$ , что  $\cos \varphi = \frac{C_1}{A}$ ,  $\sin \varphi = -\frac{C_2}{A}$ , откуда

$$C_1 = A \cos \varphi, \quad C_2 = -A \sin \varphi. \quad (12)$$

Подставив значения (12) в формулу (10), получим

$$x = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi = A \cos(\omega t + \varphi)$$

и формула (11) доказана.

Функция (11) описывает *гармонический колебательный процесс*. Положительная константа  $A$  называется *амплитудой* колебания (11), а  $\varphi$  — его *начальной фазой* или просто *фазой*. Число  $\omega$  называется *круговой частотой* колебаний, в отличие от обычной частоты  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ , равной числу колебаний в секунду.

Возвращаясь к уравнению колебания (8), видим, что его общее решение имеет вид

$$x = C_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right), \quad (13)$$

или

$$x = A \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \varphi\right). \quad (14)$$

Формула (14) показывает, что груз совершает *гармонические колебания* около точки равновесия  $O$  с амплитудой  $A$  и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (15)$$

Конечно, некоторые выводы (в основном, качественного характера) о колебании груза можно сделать и без формул (14), (15), основываясь на физических соображениях. Например, ясно, что с увеличением массы груза колебания будут происходить медленнее — их период увеличится, а с увеличением жесткости пружины (т.е. с увеличением  $k$ ) колебания убудутся, их период уменьшится. Однако только формула (15) объясняет, почему при увеличении массы груза, скажем, в 4 раза период колебаний увеличивается в 2 раза и не более, а при увеличении жесткости пружины в те же 4 раза период колебаний уменьшится только в 2 раза.

Рассмотрим два конкретных (но знаковых) случая задачи (8) о колебании груза, напоминая, что  $x'$  есть скорость  $v$  его движения.

I. В начальный момент времени  $t = 0$  груз отведен от положения равновесия в положение  $x_0 > 0$  (см. рис. 3) и отпущен.

Здесь закон движения описывается формулой (14) и начальными условиями  $x(0) = x_0 > 0$  и  $x'(0) = v_0 = 0$ . Поскольку

$$x' = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \varphi\right),$$

то  $x_0 = x(0) = A \cos \varphi$  и  $v_0 = x'(0) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi = 0$ . Поэтому  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$  и, так как  $\cos 0 = 1$ ,  $\cos \pi = -1$  и  $A > 0$ , то  $0 < x_0 = A \cos 0 = A$ , что приводит к ответу:

$$x = x_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right);$$

амплитуда колебания равна  $x_0$ .

II. В начальный момент времени  $t = 0$  груз находится в положении равновесия и его подталкивают; т. е. придают ему некоторую скорость  $v_0 > 0$ . Теперь закон движения описывается формулой (14) и начальными условиями  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = v_0$ . Поэтому  $0 = x(0) = A \cos \varphi$  и  $v_0 = x'(0) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi$ , так что  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  или  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . С учетом  $v_0 > 0$  и  $A > 0$  имеем  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  и  $A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$ . Подставляя найденные значения  $A$  и  $\varphi$  в (14), получим ответ

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{3\pi}{2}\right) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right),$$

и амплитуда колебаний равна  $v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Как следует из способа доказательства вида общего решения (10) (шаг (iii)), в общем случае, когда в начальный момент времени  $t = 0$  груз отведен от положения равновесия в положение  $x_0$  и ему придана начальная скорость  $v_0$ , движение груза образуется сложением движений в разобранных выше случаях. Закон движения описывается формулой (13), в которой  $C_1 = x_0$  и  $C_2 = v_0\sqrt{m/k}$ ; амплитуда колебаний равна  $\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$ .

## 2.2. Затухающие колебания.

Обратимся теперь к общему случаю, изучение которого проведем в той же системе координат, что и для гармонических колебаний. Однако чтобы различать случаи, договоримся закон движения груза обозначать теперь другой функцией  $s = s(t)$ , хотя  $s$  по-прежнему служит координатой положения груза на оси  $Ox$  в момент времени  $t$ . Теперь скорость движения груза в момент  $t$  равна  $s'(t)$ , а ускорение равно  $s''(t)$ .

Восстанавливающая сила пружины подчиняется закону Гука, ее величина равна  $as$ ,  $a > 0$  — коэффициент пропорциональности, и она направлена в сторону, противоположную направлению смещения гру-

за. Сопротивление среды, по результатам опыта, принимают *пропорциональным скорости движения* груза и, следовательно, величина сопротивления равна  $bs'$ ,  $b > 0$  — коэффициент пропорциональности, и сила направлена в сторону, противоположную направлению движения.

Теперь второй закон классической механики приводит к дифференциальному уравнению  $ms'' = -bs' - as$  или  $s'' + \frac{b}{m}s' + \frac{a}{m}s = 0$ . Обозначив  $\frac{b}{m} = 2h$  и  $\frac{a}{m} = n^2$ , получим окончательно уравнение

$$s'' + 2hs' + n^2s = 0, \quad (16)$$

в котором число  $h$  называется *коэффициентом затухания* (ср. [2, с. 424]), а  $n^2$  — *коэффициентом восстановления*.

При решении уравнения (16) различают три *качественно различных* случая: а)  $0 < h < n$  (сопротивление среды присутствует, но оно не очень значительно); б)  $0 < n < h$  (сопротивление среды весьма значительно; *вязкая среда*), и в)  $0 < n = h$  (*случай критического сопротивления*, ср. [2, с. 430]).

Рассмотрим сначала случай а)  $0 < h < n$ . Обозначим  $n^2 - h^2 = \omega^2$ ,  $\omega > 0$ , и покажем, что общее решение уравнения (16) представляется формулой

$$s = e^{-ht}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad (17)$$

в которой  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Мы знаем, что формулой  $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$  задается общее решение уравнения колебания (9). Следовательно, поскольку  $s = xe^{-ht}$ , сформулированное утверждение будет доказано, если мы установим, что функция  $s = s(t)$  есть решение уравнения (16) тогда и только тогда, когда  $x = x(t)$  есть решение уравнения колебания (9) с  $\omega^2 = n^2 - h^2$ .

Приведем подробное обоснование одного из этих утверждений; другое доказывается аналогично. Итак, пусть функция  $s = s(t)$  есть решение уравнения (16); т. е.  $s'' + 2hs' + n^2s = 0$ . Тогда функция  $x = se^{ht}$  имеет

$$x'' = e^{ht}(s'' + 2hs' + h^2s), \quad (18)$$

и поскольку  $e^{ht} > 0$ , то

$$x'' + \omega^2x = e^{ht}(s'' + 2hs' + h^2s) + (n^2 - h^2)e^{ht}s = e^{ht}(s'' + 2hs' + n^2s) = 0;$$

т. е.  $x = se^{ht}$  есть решение уравнения (9) с  $\omega^2 = n^2 - h^2$ .

Формулу (17) можно преобразовать, подставив в ее правую часть формулу (11), но можно изменить параметры

$$C_1 = A \sin \alpha, \quad C_2 = A \cos \alpha, \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},$$

и получить

$$s = Ae^{-ht} \sin(\omega t + \alpha). \quad (19)$$

Для выяснения вида графика функции (19) считаем в ней  $A > 0$ ,  $\alpha = 0$ , и теперь график функции

$$s = Ae^{-ht} \sin \omega t \quad (19')$$

сравним с синусоидой  $s = A \sin \omega t$ . Так как  $e^{-ht} > 0$ , то, очевидно, оба графика пересекают ось абсцисс в одних и тех же точках  $t = i\frac{\pi}{\omega}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Кроме того, функция  $s = A \sin \omega t$  имеет попеременно максимумы и минимумы в точках  $t = \left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}$ , в которых обращается в нуль ее производная  $s' = A\omega \cos \omega t$ . Рассмотрим производную функции (19'):

$$\begin{aligned} s' &= Ae^{-ht}(\omega \cos \omega t - h \sin \omega t) = \\ &= A\sqrt{\omega^2 + h^2}e^{-ht} \left( \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + h^2}} \cos \omega t - \frac{h}{\sqrt{\omega^2 + h^2}} \sin \omega t \right) \end{aligned}$$

и, вводя вспомогательный угол  $\theta$  под условием

$$\frac{\omega}{n} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + h^2}} = \cos \theta, \quad \frac{h}{n} = \frac{h}{\sqrt{\omega^2 + h^2}} = \sin \theta,$$

запишем ее в виде

$$s' = Ane^{-ht} \cos(\omega t + \theta), \quad n = \sqrt{\omega^2 + h^2}.$$

Она обращается в нуль в точках

$$t = \left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega} - \frac{\theta}{\omega},$$

и так как косинус, проходя через нуль, меняет знак, то заключаем, что при этих значениях  $t$  функция (19') действительно имеет максимумы при  $i$  четных и минимумы при  $i$  нечетных. По сравнению с синусоидой произошло *смещение* экстремальных точек влево на величину  $\frac{\theta}{\omega}$ .

Нетрудно проверить, что все максимумы будут положительными, а минимумы отрицательными. Если величину  $i$ -ого экстремума обозначить через  $A_i$ , то

$$\left| \frac{A_i}{A_{i+1}} \right| = e^{\frac{h\pi}{\omega}}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

так что размахи убывают в геометрической прогрессии. График функции (19') для простого частного случая и  $t \geq 0$  изображен на рис. 4 (см. также [2, с. 426]).

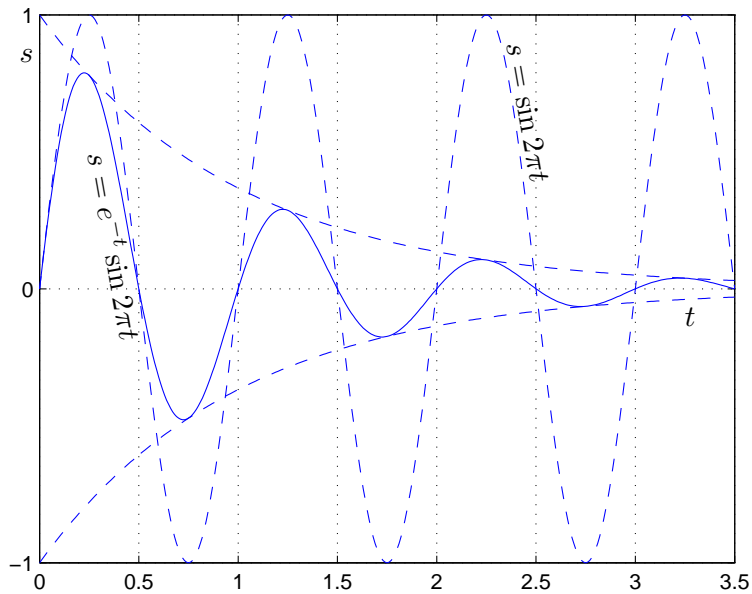


Рис. 4.

Движение подобного типа носит название *затухающего колебания*.

### 2.3. Непериодические колебания (апериодические колебания).

Картина движения груза меняется качественно, если среда становится все более вязкой; т. е. если в уравнении движения (16) его коэффициенты связаны отношением  $h \geq n > 0$ . Проиллюстрируем это в простейшем случае, когда  $h = n$ . В этом случае уравнение (16) принимает вид

$$s'' + 2hs' + h^2s = 0. \quad (20)$$

Умножая обе части уравнения (20) на множитель  $e^{ht} > 0$  и вспоминая формулу (18), заключаем, что уравнение (20) равносильно уравнению

$$z'' = 0$$

для функции  $z = se^{ht}$ . Тогда имеем  $z' = C_1$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная, или  $(z - C_1t)' = 0$ . Поэтому  $z = C_1t + C_2$ , где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные, и

$$s = e^{-ht}(C_1t + C_2). \quad (21)$$

Функция (21) *не периодическая*. Кроме того,  $s \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , так как

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_1t + C_2}{e^{ht}} = 0,$$

причем производная  $s' = -e^{-ht}(hC_1t + C_2h - C_1)$  сохраняет свой знак, начиная с точки  $t = \frac{1}{h} - \frac{C_2}{C_1}$ , т. е.  $s$  становится монотонной.

Следовательно, в рассматриваемом случае движение *не является колебательным*, и груз быстро стремится занять положение равновесия. График функции (21) в случае, когда  $C_1 = C_2 = h = 1$ , представлен на рис. 5 (ср. также [2, с. 430]).



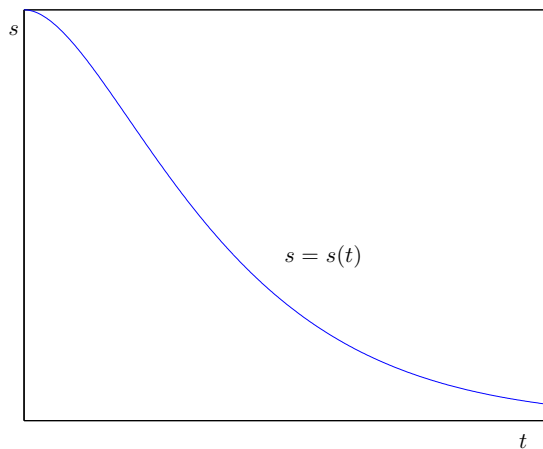


Рис. 5.

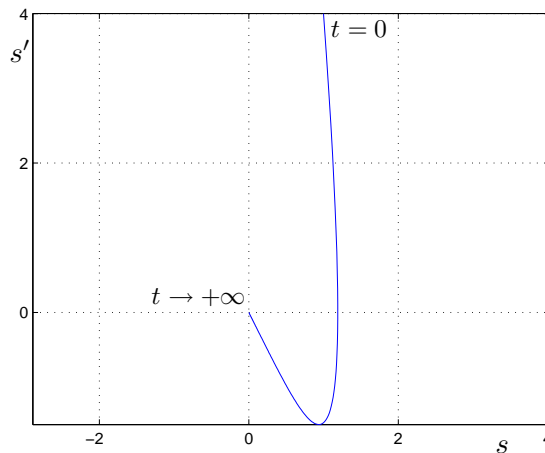


Рис. 5'.

Когда имеет место случай б)  $h > n > 0$  (вязкая среда), эффект апериодичности решения  $s = s(t)$  качественно меняется. В этом случае общее решение  $s = s(t)$  уравнения (16) задается формулой

$$s = C_1 e^{-(h-p)t} + C_2 e^{-(h+p)t}, \tag{22}$$

в которой  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные, а  $p = \sqrt{h^2 - n^2}$ ,  $0 < p < h$ .

Типичное поведение решения (22) изображено на рис. 5' в фазовой плоскости, на которой откладывается  $(s(t), s'(t))$  при каждом значении времени  $t$  (для примера взяты  $h = 5, n = 4, p = 3, C_1 = 2, C_2 = -1$ ), где видно, что кривая при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически стремится к прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом  $-(h-p)$  (см. также [2, с. 430]).

Доказательство формулы (22) проводится с небольшими изменениями аналогично доказательству формулы (10). Покажем, например, как проходятся шаги (i) и (iii).

(i) Проверим, что если функция  $f$  удовлетворяет уравнению (16) и  $f(0) = f'(0) = 0$ , то  $f = 0$  при  $t \geq 0$ .

Действительно, рассмотрим функцию  $(f')^2 + n^2 f^2$  и ее производную:

$$((f')^2 + n^2 f^2)' = 2f'f'' + 2n^2 f f' = 2f'(f'' + n^2 f).$$

Согласно уравнению (16),  $f'' + n^2 f = -2hf'$ , поэтому  $((f')^2 + n^2 f^2)' = -4h(f')^2 \leq 0$ . Следовательно, функция  $(f')^2 + n^2 f^2$ , принимающая неотрицательные значения, невозрастает при  $t \geq 0$ . Так как при  $t = 0$  имеем  $(f')^2 + n^2 f^2 = 0$ , то из невозрастания и неотрицательности этой функции вытекает, что она равна нулю и при всех  $t \geq 0$ . Значит,  $(f')^2 = 0$ ,  $f' = 0$  и  $f$  постоянна при  $t \geq 0$ , причем эта постоянная равна нулю в силу  $f(0) = 0$ .

(iii) Проверим, что для любого решения  $u = u(t)$  уравнения (16) можно подобрать такие постоянные числа  $C_1$  и  $C_2$ , что  $u$  будет равна функции (22).

Для этого обозначим  $u(0) = x_0$ ,  $u'(0) = v_0$  и рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{v_0 + x_0(h+p)}{2p} e^{-(h-p)t} - \frac{v_0 + x_0(h-p)}{2p} e^{-(h+p)t}.$$

Она имеет производную

$$g'(t) = -\frac{v_0(h-p) + x_0(h^2 - p^2)}{2p} e^{-(h-p)t} + \frac{v_0(h+p) + x_0(h^2 - p^2)}{2p} e^{-(h+p)t}.$$

Из этих двух формул видно, что  $g(0) = x_0 = u(0)$  и  $g'(0) = v_0 = u'(0)$ . Согласно шагу (ii),  $u(t) = g(t)$  для  $t \geq 0$ , что заканчивает доказательство шага (iii).

Таким способом удастся доказать утверждение об общем решении только для значений  $t \geq 0$ , но беря в качестве начального времени вместо 0 все меньшие и меньшие значения  $t_0 < 0$ , можно распространить общий вид решения (22) (с теми же значениями постоянных  $C_1$  и  $C_2$ ) для всех  $t$ .

### §3. Задача о математическом маятнике

Составим и решим приближенно уравнение *математического маятника*. Математический маятник представляет собой точку  $M$  массы  $m$ , которая под действием силы тяжести движется по окружности  $K$  радиуса  $l$ , лежащей в вертикальной плоскости. Величину  $l$  называют *длиной маятника*. На окружности  $K$  выберем угловую координату, приняв за начало координат самую нижнюю точку  $O$  окружности  $K$  (рис. 6).

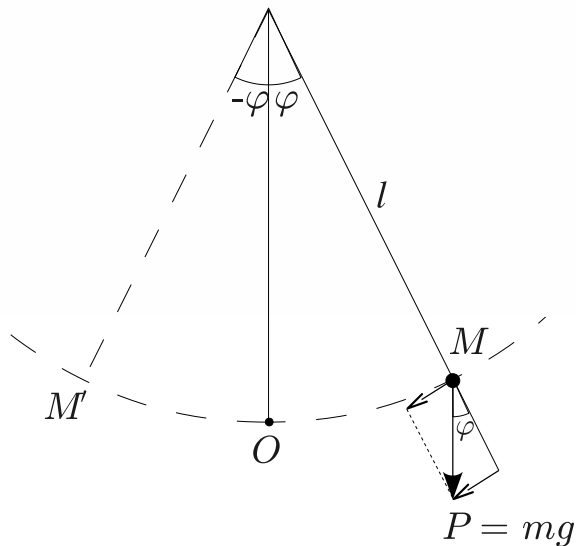


Рис. 6.

Переменную координату точки  $M$  обозначим через  $\varphi = \varphi(t)$ , где  $t$  есть время на перемещение из точки  $O$  в точку  $M$ . Точка  $M$  находится под действием силы тяжести  $P = mg$ , направленной вертикально вниз. Составляющая этой силы, направленная по нормали к окружности, уравновешивается благодаря реакции связи (окружности или нити, заставляющей точку двигаться по окружности). Составляющая силы  $P$ , направленная по касательной к окружности в точке  $M$ , равна  $-mg \sin \varphi$

(если за положительное направление на касательной принять направление, соответствующее возрастанию угла  $\varphi$ ). Таким образом, длина пути  $OM$  равна  $l\varphi$ , и в соответствии со вторым законом классической механики уравнение движения точки  $M$  имеет вид:  $m(l\varphi)'' = F = -mg \sin \varphi$ , или

$$l\varphi'' + g \sin \varphi = 0. \quad (23)$$

Нахождение решения этого уравнения представляет большие трудности (см. [3, с. 408–413] или [4, с. 250–253]). Однако если предположить, что координата  $\varphi$  точки  $M$  в процессе движения *мало отклоняется от нуля*, то приближенно в уравнении (23) можно заменить  $\sin \varphi$  на  $\varphi$  и получить "приближенное" уравнение движения маятника в виде

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0. \quad (24)$$

Таким образом, период колебания; т. е. время на перемещение из точки  $M$  в симметричную ей точку  $M'$  на окружности  $K$ , задается приближенной формулой  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , которая обычно приводится в элементарных (в частности, в школьных) курсах физики, а частота "малых колебаний" маятника определяется формулой  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Число  $\nu$  малых колебаний маятника в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Поэтому, длина *секундного маятника*; т. е. маятника, совершающего одно колебание в секунду ( $\nu = 1/\text{сек}$ ), определяется формулой

$$l = \frac{g}{4\pi^2} \text{сек}^2 \approx 0,25 \text{ м.}$$

#### §4. Задача о сосуществовании двух видов

В заключение рассмотрим задачу сосуществования двух видов, известную в биологии под названием "хищник — жертва". Протекающие в

ней процессы часто описывают следующей моделью: на острове растет трава и пасется стадо овец; овцы поедают и вытаптывают траву — здесь это вид-хищник, а трава — вид-жертва. Понятно, что если овец слишком много, то они поедят и вытопчут слишком много травы. Условия жизни овец ухудшатся, они начнут вымирать и их количество уменьшится. Поэтому поедать и вытаптывать траву они будут меньше — трава разрастется, условия жизни овец улучшатся и их стадо разрастется. И так пойдет колебательный процесс, характеристики которого надо установить.

Биомассу овец обозначим через  $x(t)$ , биомассу травы — через  $y(t)$ ; это функции времени  $t$ . Будем считать, что условия жизни этих видов характеризуются числами  $b$  и  $c$ ; если биомасса овец меньше  $b$ , то они съедают не всю вырастающую траву и трава разрастается; если биомасса овец больше  $b$ , то трава вымирает; если биомасса травы больше  $c$ , то стадо овец растет; если биомасса травы меньше  $c$ , то овцы вымирают.

Составим дифференциальные уравнения, учитывающие эти условия жизни видов: знак производной  $x'$  должен совпадать со знаком  $y - c$ , а знак  $y'$  — со знаком  $b - x$ . Получаем

$$\begin{cases} x' = k(y - c) \\ y' = m(b - x), \end{cases} \quad (25)$$

где  $k$  и  $m$  — некоторые положительные коэффициенты. В общем случае они — функции от  $t$ ,  $x$  и  $y$ . Но мы рассмотрим простейшую ситуацию, когда  $k$  и  $m$  — положительные числа. Для решения этой системы продифференцируем первое уравнение в (25) и подставим туда  $y'$  из второго. Получим  $x'' = km(b - x)$ , или  $(x - b)'' + km(x - b) = 0$ . Это уравнение колебания и его общее решение имеет вид  $x - b = A \cos(t\sqrt{km} + \varphi)$ , или

$$x = b + A \cos(t\sqrt{km} + \varphi). \quad (26)$$

На основании (26) и первого уравнения системы (25), находим

$$y = c - \sqrt{\frac{m}{k}} A \sin(t\sqrt{km} + \varphi). \quad (27)$$

Особенно наглядно описывается этот процесс, если графики функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  изобразить вместе (см. рис. 7).

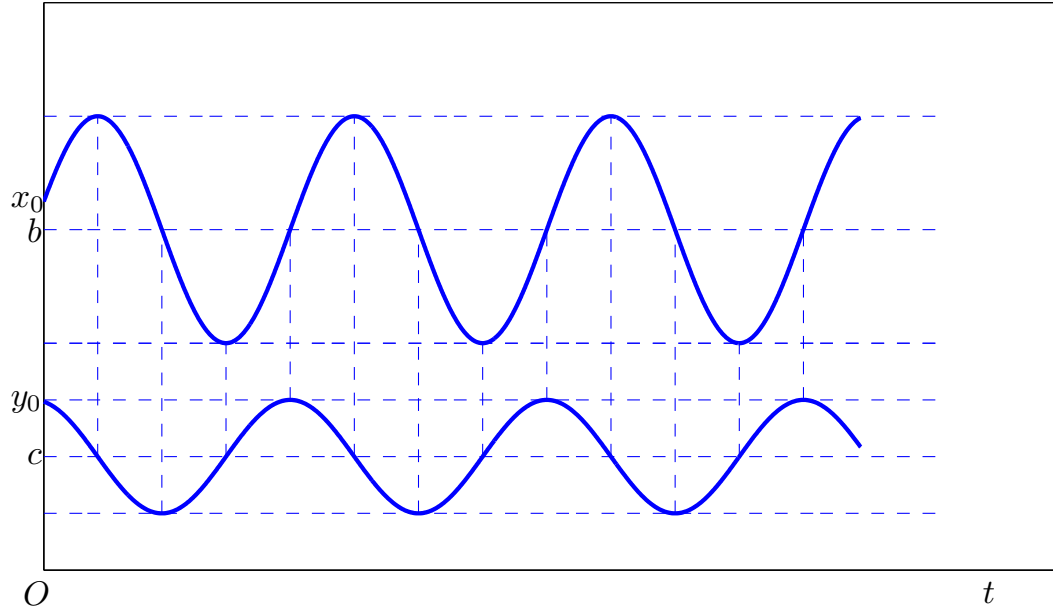


Рис. 7.

Функции имеют общий период, а их графики сдвинуты на четверть периода, и каждый график "колеблется около своего оптимального значения": график  $x(t)$  около значения  $b$ , а график  $y(t)$  около значения  $c$ .

Посмотрим еще, какова здесь роль управления, т. е. какое влияние в этой экологической системе может оказать человек. В простейшем случае вмешательство здесь может быть таким: в начальный момент времени  $t = 0$  на остров, где растет определенное количество травы с биомассой  $y_0 = y(0)$ , завезено определенное количество овец с биомассой  $x_0 = x(0)$ . Этими числами  $x_0$  и  $y_0$  (начальными условиями) уже

определяется амплитуда колебаний. Действительно, из формул (26) и (27) для  $x$  и  $y$  при  $t = 0$  имеем:

$$x_0 - b = A \cos \varphi, \quad y_0 - c = -\sqrt{\frac{m}{k}} A \sin \varphi,$$

откуда

$$A = \sqrt{(x_0 - b)^2 + \frac{k}{m}(y_0 - c)^2}.$$

Из этого выражения видно, что при больших разностях  $(x_0 - b)$  и  $(y_0 - c)$  амплитуда  $A$  может оказаться настолько большой, что  $A\sqrt{\frac{m}{k}} > c$ , а это значит, что в некоторый момент времени (когда  $y < 0$ ) вся трава окажется уничтоженной, а вслед за этим погибнут и овцы. Это говорит о том, насколько осторожным должно быть вмешательство.

## Список литературы

- [1] V. I. Gavrilov, Žarko Pavićević. Matematička Analiza I.
- [2] В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. Курс теоретической механики. М.: Высш. школа, 1983. — 575 с., ил.
- [3] Н. Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки. Изд. 6-ое, доп. М.: Наука, 1965. — 468 с.
- [4] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. — 800 с.