MAT-KOL (Banja Luka)
XVIII (1) (2012), 5-15

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5228 (o)
Euklidska geometrija / Metodika matematike

ČETIRI TEOREME O PRAVILNOM DEVETOUGLU

(Four theorems on the regular nonagon)

Dragoljub Milošević[1]

Sažetak: U radu su date četiri teoreme koje se odnose na pravilni devetougao**.**

Ključne riječi: pravilni devetougao, stranica i dijagonale pravilnog devetougla, jednakokraki trougao, simetrala unutrašnjeg ugla, slični trouglovi, tetivni četverougao, Pitagorina, Ptolemejeva i Stjuartova teorema, sinusna i kosinusna teorema.

Abstract: In this paper we give four theorems for the regular nonagon.

Key words: regular nonagon, side and diagonals of regular nonagon, isosceles triangle, angle-bisector, similar triangles, cyclic quadrilateral, Pythagorean, Ptolemy's and Stewart's theorem, sine and cosine law.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

U ovom radu ćemo dati četiri teoreme koje se odnose na pravilni devetougao. Isti je namijenjen prvenstveno nastavnicima matematike koji rade sa nadarenim učenicima.

Svaka od prve tri teoreme bit će dokazana na četiri načina. Neke od vrijednosti dokazivanja teoreme na više načina su: a) time se stiče i izgrađuje vještina u dokazivanju teorema; b) pomaže da se i druga tvrđenja logički korektno dokazuju; c) pruža radost otkrića, što je i najjači motiv za dalju aktivnost.

Na petoj Juniorskoj makedonskoj matematičkoj olimpijadi u Skoplju, 2001. godine, dokazana je sljedeća tvrdnja

Teorema: *U pravilnom devetouglu dužina stranice jednaka je razlici dužina najduže i najkraće dijagonale.*

Ovu teoremu ovdje ćemo koristit kao lemu. Jedan njen dokaz nalazi se u [3].

Teorema 1. U pravilnom devetouglu ABCDEFGHK važi sljedeća jednakost

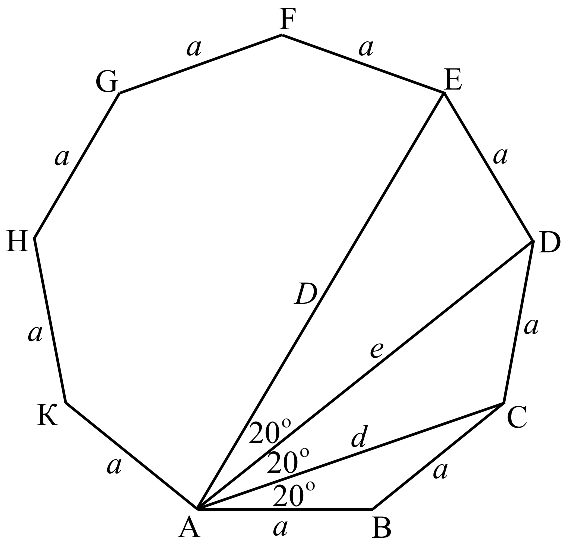
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 2\,.$$

[1] 17. NOU divizije 43, 32300 G. Milanovac, Srbija, e-mail: dramil47@gmail.com

Dokaz 1. Veličina centralnog ugla nad stranicom pravilnog devetougla iznosi $360^\circ : 9 = 40^\circ$, što je i veličina spoljašnjeg ugla. Veličina periferijskog ugla nad stranicom tog devetougla je $40^\circ : 2 = 20^\circ$, a veličina unutrašnjeg ugla je $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

Uvedimo sljedeće oznake: $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = d$, $\overline{AD} = e$ i $\overline{AE} = D$ (sl. 1). Tada se navedena jednakost može zapisati kao

$$\frac{e}{a} - \frac{a}{d} = 2 . \tag{1}$$



Slika 1.

Primjenom kosinusne teoreme na trouglove ACD i ADE dobijamo

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} cos\left(\angle CAD\right)$$

i

$$\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AE} \cdot \overline{AD}\, cos\left(\angle DAE\right),$$

tj.

$$a^2 = d^2 + e^2 - 2de\, cos\, 20^\circ \text{ i } a^2 = D^2 + e^2 - 2De\, cos\, 20^\circ .$$

Nakon oduzimanja prve jednakosti od druge imamo

$$0 = D^2 - d^2 - 2e\left(D - d\right) cos\, 20^\circ ,$$

odnosno

$$\left(D - d\right)\left(D + d\right) = 2e\left(D - d\right) cos\, 20^\circ .$$

Ovu jednakost, zbog $D \neq d$, možemo podijeliti sa $D - d$, pa je

$$D + d = 2e\,cos\,20^{\circ}.$$

Odavde je

$$cos\,20^{\circ} = \frac{D+d}{2e}. \tag{2}$$

Na osnovu sinusne teoreme primijenjene na ΔABC dobijamo

$$\frac{\overline{AB}}{sin\left(\angle BCA\right)} = \frac{\overline{AC}}{sin\left(\angle ABC\right)},\ \text{ili}\ \frac{a}{sin\,20^{\circ}} = \frac{d}{sin\,140^{\circ}}.$$

Kako je

$$sin\,140^{\circ} = sin\left(180^{\circ} - 40^{\circ}\right) = sin\,40^{\circ}\ ,\quad sin\,40^{\circ} = sin\left(2 \cdot 20^{\circ}\right) = 2sin\,20^{\circ}\cos 20^{\circ},$$

iz posljednje jednakosti slijedi

$$cos\,20^{\circ} = \frac{d}{2a}. \tag{3}$$

Iz jednakosti (2) i (3) proizlazi $\frac{D+d}{e} = \frac{d}{a}$, ili $\frac{e}{a} = \frac{D+d}{d}$. Obzirom da je $D = d + a$ (vidjeti lemu), konačno dobijamo

$$\frac{e}{a} = \frac{2d+a}{d} = 2 + \frac{a}{d},\ \text{tj.}\ \frac{e}{a} - \frac{a}{d} = 2.$$

Ovim je dokaz 1 teoreme 1 okončan.

Dokaz 2. Neka je $CE \cap GF = \{S\}$. U jednakokrakom trouglu CEG $\left(\overline{CE} = \overline{EG} = d\right)$ je $\angle GCE = \angle CGE = 40^{\circ}$ i $\angle CEG = 180^{\circ} - 2 \cdot 40^{\circ} = 100^{\circ}$ $\left(\text{sl. } 2\right)$. Obzirom da je

$$\angle GES = 180^{\circ} - 100^{\circ} = 80^{\circ}\ \text{i}\ \angle KCE = \angle KCG + \angle GCE = 40^{\circ} + 40^{\circ} = 80^{\circ},$$

slijedi $KC \| GE$.

Kako je $\overline{KG} = \overline{CE} = d$ i $KC \| GE$, zaključujemo da je četverougao $CEGK$ jednakokraki trapez. Neka je $GL \perp KC$, $L \in KC$. Tada je $\overline{KL} = \frac{e-d}{2}$ i $\overline{CL} = \frac{e+d}{2}$. Na osnovu Pitagorine teoreme primijenjene na pravougle trouglove KLG i LCG imamo

$$\overline{GL}^2 = \overline{GK}^2 - \overline{KL}^2\ \text{i}\ \overline{GL}^2 = \overline{GC}^2 - \overline{CL}^2,\ \text{ili}$$

$$\overline{GL}^2 = d^2 - \left(\frac{e-d}{2}\right)^2 \text{ i } \overline{GL}^2 = D^2 - \left(\frac{e+d}{2}\right)^2.$$

Ove dvije jednakosti daju novu jednakost

$$d^2 - \left(\frac{e-d}{2}\right)^2 = D^2 - \left(\frac{e+d}{2}\right)^2,$$

a odavde je

$$D^2 - d^2 = \left(\frac{e+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{e-d}{2}\right)^2$$

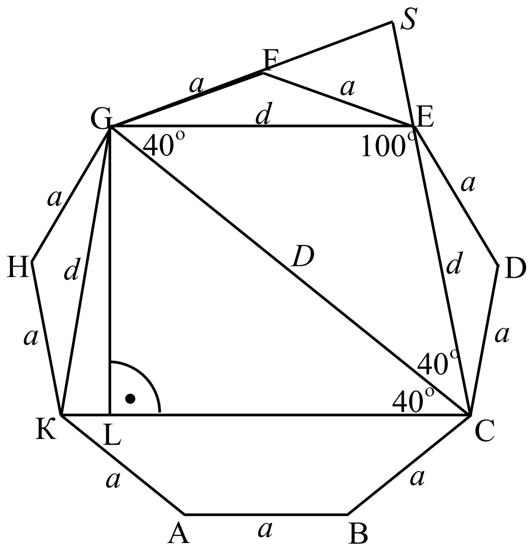
$$\Rightarrow \quad D^2 - d^2 = de$$

$$\Rightarrow \quad (d+a)^2 - d^2 = de \text{, jer je } D = d + a \text{ (lema)}$$

$$\Rightarrow \quad 2ad + a^2 = de$$

$$\Rightarrow \quad de - a^2 = 2ad \;/ : ad$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e}{a} - \frac{a}{d} = 2.\ \ q.e.d.$$



Slika 2.

Dokaz 3. Neka je $\{P\} = AF \text{ I } HG$ (sl. 3). U trouglu FPG je $\angle PGF = 40^{\circ}$ (spoljašnji ugao pravilnog devetougla) i

$$\angle GFP = \angle AFP - \angle AGF = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}.$$

Trouglovi ACD i FPG su podudarni (pravilo USU), pa je

$$\overline{FP} = \overline{AC} = d \text{ i } \overline{GP} = \overline{AD} = e .$$

Trouglovi APH i FPG imaju jednake uglove, pa je $\Delta APH \sim \Delta FPG$. Zbog toga imamo:

$$\overline{GP} : \overline{AP} = \overline{FG} : \overline{AH}$$

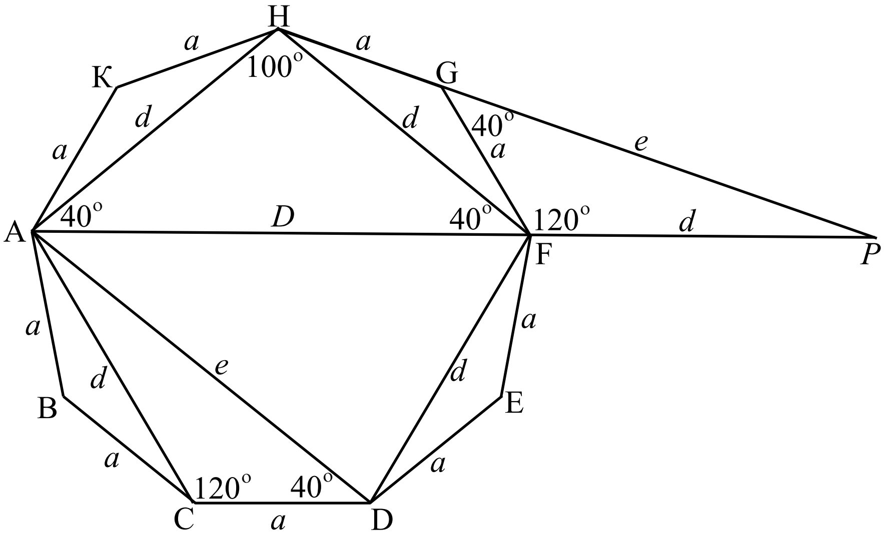
$$\Rightarrow \quad e : (D + d) = a : d$$

$$\Rightarrow \quad de = a(D + d)$$

$$\Rightarrow \quad de = a(2d + a), \text{ zbog } D = d + a$$

$$\Rightarrow \quad de - a^2 = 2ad \;/ : ad$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e}{a} - \frac{a}{d} = 2 . \quad q.e.d.$$



Slika 3.

Dokaz 3. Neka je $\{P\} = AF \cap HG$ (sl. 3). U trouglu FPG je $\angle PGF = 40^{\circ}$ (spoljašnji ugao pravilnog devetougla) i

$$\angle GFP = \angle AFP - \angle AFG = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}.$$

Trouglovi ACD i FPG su podudarni (pravilo USU), pa je

$$\overline{FP} = \overline{AC} = d \text{ i } \overline{GP} = \overline{AD} = e .$$

Trouglovi APH i FPG imaju jednake uglove, pa je $\Delta APH \sim \Delta FPG$. Zbog toga imamo:

$$\overline{GP} : \overline{AP} = \overline{FG} : \overline{AH}$$

$$\Rightarrow \quad e : (D + d) = a : d$$

$$\Rightarrow \quad de = a(D + d)$$

$$\Rightarrow \quad de = a(2d + a), \text{ zbog } D = d + a$$

$$\Rightarrow \quad de - a^2 = 2ad \ / : ad$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e}{a} - \frac{a}{d} = 2 . \quad q.e.d.$$

Dokaz 4. Primjenom Ptolemejeve teoreme na tetivni četvorougao $ADFH$ (sl. 3), dobijamo

$$\overline{AF} \cdot \overline{DH} = \overline{AD} \cdot \overline{FH} + \overline{DF} \cdot \overline{HA}$$

$$\Rightarrow \quad D \cdot D = e \cdot d + d \cdot d$$

$$\Rightarrow \quad D^2 - d^2 = ed$$

$$\Rightarrow \quad (d + a)^2 - d^2 = ed \text{ , jer } D = d + a$$

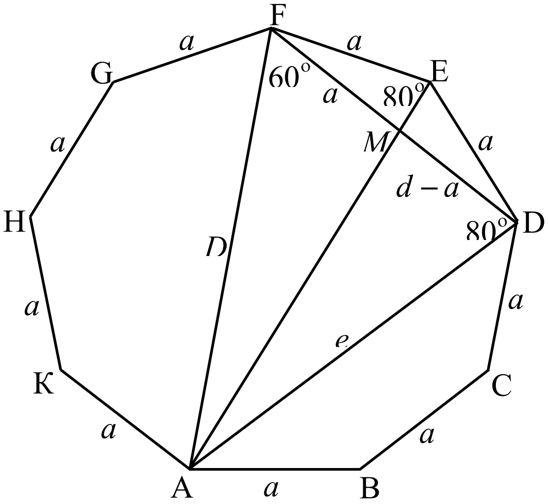
$$\Rightarrow \quad 2ad + a^2 = ed$$

$$\Rightarrow \quad ed - a^2 = 2ad \ / : ad$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e}{a} - \frac{a}{d} = 2 . \quad q.e.d.$$

Teorema 2. Za pravilni devetougao vrijedi jednakost

$$\frac{e}{d}+\frac{d}{D}=2. \tag{4}$$



Slika 4.

Dokaz 1. Tačku presjeka dijagonala AE i DF obilježimo sa M (sl. 4). Trougao AEF je jednakokraki $\left(\overline{AF}=\overline{AE}=D\right)$, pa je $\angle AFE=\angle AEF=\left(180^{\circ}-20^{\circ}\right):2=80^{\circ}$. Zbog toga je $\angle AFD=80^{\circ}-20^{\circ}=60^{\circ}$ i $\angle FME=180^{\circ}-\left(20^{\circ}+80^{\circ}\right)=80^{\circ}$, što znači da je i ΔEFM jednakokraki. Zato je $\overline{FM}=\overline{EF}=a$, pa je $\overline{DM}=d-a$. Trougao ADM je, također, jednakokraki. Iz ΔADF je

$$\angle ADF=\angle ADM=180^{\circ}-40^{\circ}-60^{\circ}=80^{\circ},$$

a iz ΔADM je

$$\angle AMD=180^{\circ}-20^{\circ}-80^{\circ}=80^{\circ},$$

pa je

$$\overline{AM}=\overline{AD}=e \text{ i } \overline{ME}=D-e.$$

Trouglovi EFM i AEF su slični, pa je

$$\overline{ME}:\overline{EF}=\overline{EF}:\overline{AE}$$

$$\Rightarrow \quad (D-e):a=a:D$$

$$\Rightarrow \quad D(D-e)=a^{2}$$

$$\Rightarrow \quad D^{2}-a^{2}=De.$$

Kako je $a=D-d$ (lema), imamo

$$D^2 - (D-d)^2 = De,$$

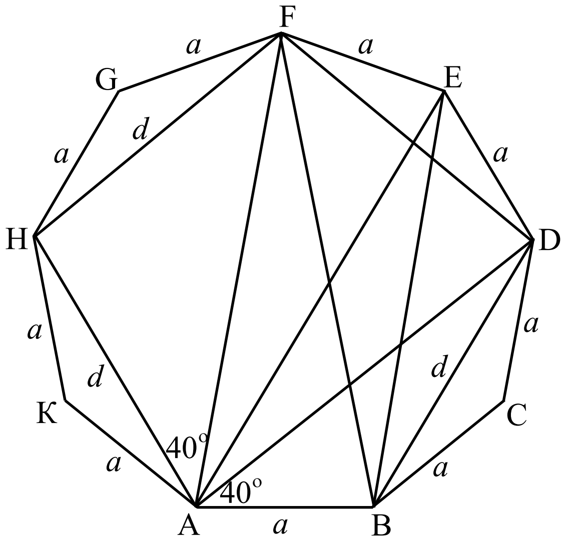
odnosno

$$2Dd - d^2 = De, \text{ tj. } De + d^2 = 2Dd.$$

Nakon dijeljenja ove jednakosti sa Dd dobijamo $\frac{e}{d} + \frac{d}{D} = 2$, tj. jednakost (4) važi.

Dokaz 2. Primjenom Stjuartove teoreme na trougao *AEF* (sl. 4), imamo

$$\begin{aligned}
&\overline{AE} \cdot \left(\overline{AM} \cdot \overline{ME} + \overline{MF}^2\right) = \overline{AF}^2 \cdot \overline{ME} + \overline{EF}^2 \cdot \overline{AM} \\
\Rightarrow\quad & D \cdot \left(e(D-e) + a^2\right) = D^2(D-e) + a^2 e \\
\Rightarrow\quad & D^2 e - De^2 + Da^2 = D^3 - D^2 e + a^2 e \\
\Rightarrow\quad & Da^2 - a^2 e = D^3 - 2D^2 e + De^2 \\
\Rightarrow\quad & a^2(D-e) = D(D-e)^2 \ / : D - e \neq 0 \\
\Rightarrow\quad & a^2 = D(D-e) \\
\Rightarrow\quad & D^2 - a^2 = De \\
\Rightarrow\quad & D^2 - (D-d)^2 = De, \text{ zbog } a = D - d \text{ (lema)} \\
\Rightarrow\quad & 2Dd - d^2 = De \\
\Rightarrow\quad & De + d^2 = 2Dd \ / : Dd \\
\Rightarrow\quad & \frac{e}{d} + \frac{d}{D} = 2. \ \ q.e.d.
\end{aligned}$$



Слика 5

Dokaz 3. Na osnovu kosinusne teoreme primijenjene na trouglove *ABD* i *ADF* (sl. 5), imamo

$$d^2 = a^2 + e^2 - 2ae\,cos\,40^{\circ}$$

i

$$d^2 = D^2 + e^2 - 2De\,cos\,40^{\circ}.$$

Nakon oduzimanja tih jednakosti, zbog $D \neq a$, slijedi

$$cos\,40^{\circ} = \frac{D+a}{2e}. \qquad (5)$$

Iz ΔAFH je $d^2 = D^2 + d^2 - 2Dd\,cos\,40^{\circ}$ (kosinusna teorema!), a odavde proizlazi

$$cos\,40^{\circ} = \frac{D}{2d}. \qquad (6)$$

Iz jednakosti (5) i (6) slijedi $\frac{D+a}{e} = \frac{D}{d}$ ili $De = d(D+a)$. Odavde, zbog $a = D - d$, proizlazi $De = d(2D - d)$, a ovo je ekvivalentno sa jednakošću (4).

Dokaz 4. Primjenom Ptolemejeve teoreme na tetivni četverougao *ABEF* (sl. 5), imamo

$$\overline{AE} \cdot \overline{BF} = \overline{AB} \cdot \overline{EF} + \overline{AF} \cdot \overline{BE}, \text{ tj. } D \cdot D = a \cdot a + De.$$

Preostali dio dokaza isti je kao kod dokaza 1.

Teorema 3. U pravilnom devetouglu važi

$$\frac{D}{a} - \frac{e}{D} = 2. \qquad (7)$$

Dokaz 1. Trouglovi *ADM* i *AEF* (sl. 4) su slični, pa je

$$\overline{DM} : \overline{EF} = \overline{AD} : \overline{AE}$$

$$\Rightarrow \quad (d-a) : a = e : D$$

$$\Rightarrow \quad D(d-a) = ae$$

$$\Rightarrow \quad D(D-2a) = ae, \text{ zbog } d = D - a \text{ (lema)}$$

$$\Rightarrow \quad D^2 - ae = 2aD \;/ : aD$$

$$\Rightarrow \quad \frac{D}{a} - \frac{e}{D} = 2. \; q.e.d.$$

Dokaz 2. Na osnovu teoreme o simetrali unutrašnjeg ugla trougla, za ΔADF (sl. 4) je

$$\overline{MF} : \overline{MD} = \overline{AF} : \overline{AD}, \text{ ili } a : (d - a) = D : e.$$

Posljednja jednakost ekvivalentna je sa traženom jednakošću (7).

Dokaz 3. Primjenom Ptolemejeve teoreme na tetivni četverougao *ABCD* (sl. 5), dobijamo $d^2 = a^2 + ae$. Zbog $d = D - a$, imamo $(D - a)^2 = a^2 + ae$, ili $D^2 - ae = 2aD$. Diobom sa aD dobijamo jednakost (7).

Dokaz 4. Na bazi kosinusne teoreme primijenjene na trouglove *AEF* i *ADM* (sl. 4), imamo:

$$D^2 = a^2 + D^2 - 2aD\,cos\,80^\circ$$

i

$$e^2 = e^2 + (d - a)^2 - 2e(d - a)cos\,80^\circ,$$

odnosno

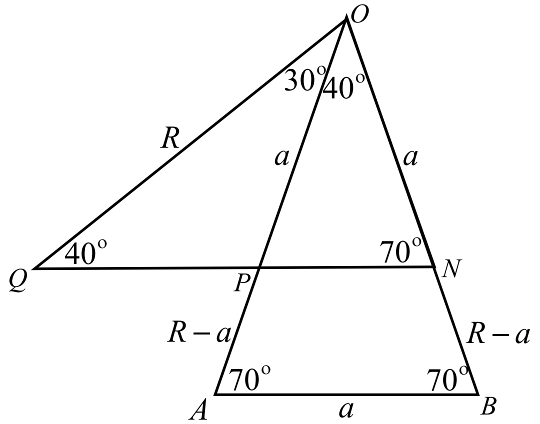
$$cos\,80^\circ = \frac{a}{2D} \text{ i } cos\,80^\circ = \frac{d - a}{2e}.$$

Iz posljednje dvije jednakosti slijedi

$$\frac{a}{D} = \frac{d - a}{e}.$$

Odavde lahko dobijamo željenu jednakost (7).

Teorema 4. Ako je $\frac{a}{R} = m$, onda je $m^3 - 3m + \sqrt{3} = 0$, (*R* – poluprečnik opisane kružnice oko pravilnog devetougla).



Slika 6.

Dokaz. Neka je ΔABO karakteristični trougao pravilnog devetougla (sl. 6). Na kraku OB odredimo tačku N tako da je $\overline{ON} = a$, a potom konstruišimo trougao ONQ podudaran sa ΔABO. Tada je $PN \| AB$ i $\Delta ABO \sim \Delta OPN$. Iz te sličnosti slijedi $\overline{PN} : \overline{AB} = \overline{ON} : \overline{OB}$, ili $\overline{PN} : a = a : R$, tj.

$$\overline{PN} = \frac{a^2}{R}, \text{ pa je } \overline{QP} = R - \frac{a^2}{R}.$$

Na osnovu kosinusne teoreme primijenjene na trougao OQP je

$$\overline{QP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cdot cos\, 30^\circ,$$

ili

$$\left(R - \frac{a^2}{R} \right)^2 = a^2 + R^2 - aR\sqrt{3}.$$

Nakon sređivanja posljednje jednakosti dobijamo $a^3 + R^3\sqrt{3} = 3aR^2$, odnosno

$$\left(\frac{a}{R} \right)^3 - 3\left(\frac{a}{R} \right) + \sqrt{3} = 0.$$

Ako stavimo $\frac{a}{R} = m$, dobijamo $m^3 - 3m + \sqrt{3} = 0$, što je i trebalo dokazati.

Napomena. Još šest dokaza jednakosti $a^3 + R^3\sqrt{3} = 3aR^2$ nalazi se u [4].

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] V. Blagojević, *Teoreme i zadaci iz planimetrije,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, I. Sarajevo, 2002.
[3] D. Milošević, *Neke teoreme o pravilnom devetouglu,* Tangenta (Beograd), 42/2 (2005/06), 15 – 16.
[4] D. Milošević, *Razni dokazi jedne teoreme za pravilan devetougao*, Nastava matematike, LI, 3 – 4 (2006), 52 – 54.
[5] D. Milošević, B. Simić, *Matematičke zanimljivosti*, Dečje novine DOSITEJ, Gornji Milanovac, 2011.
[6] *www.dms.org.rs*

(Pristiglo u redakciju 09.09.2011. revidirana verzija 28.09.2011. Dostupno na internetu od 03.10.2011.)