

ŠEST DOKAZA JEDNE TEOREME U GEOMETRIJI

(Six proofs of one geometric theorem)

Dragoljub Milošević¹ i Borisav Simić²

Sažetak: U radu dajemo još šest raznih dokaza jedne teoreme o pravilnom devetouglu.

Ključne riječi: pravilni devetougao, stranica i dijagonale pravilnog devetougla, lema, pravougli trougao, slični trouglovi, Pitagorina i Stjuartova teorema, Molvajdove formule, analitička geometrija.

Abstract: In this paper we give new different proofs of one theorem for the regular nonagon.

Key words: regular nonagon, side and diagonals of regular nonagon, lemma, right-angled triangle, similar triangles, Pythagorean and Stewart's theorem, Mollweide's formulas, analytic geometry.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

Posebnu pažnju zaslužuju zadaci koji mogu da se riješe na više načina, tj. zadaci čijem se rješavanju može pristupiti sa različitih pozicija. Pri rješavanju jednog istog zadatka na više načina upoređivanjem može da se ustanovi koji je od njih kraći, efektniji i elegantniji. Time se stiče i izgrađuje vještina u rješavanju zadataka, naročito problemskih.

U [3] prikazana su četiri dokaza sljedeće teoreme³:

Teorema. *U pravilnom devetouglu $ABCDEFGHK$ važi jednakost*

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = 2.$$

Dajemo još šest različitih dokaza ove teoreme.

Dokaz 1. Uvodimo sljedeće oznake: $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = d$, $\overline{AD} = e$, $\overline{AE} = D$. Tada se navedena jednakost može napisati kao

¹ 17. NOU divizije 43, 32 300 Gornji Milanovac, Srbija

² 173. ulica br. 19/14, 35 000 Jagodina, Srbija

³ Ovdje je ona preformulisana

$$\frac{D}{a} - \frac{e}{D} = 2 \quad (*)$$

Koristit ćemo sljedeće dvije leme (pomoćne teoreme).

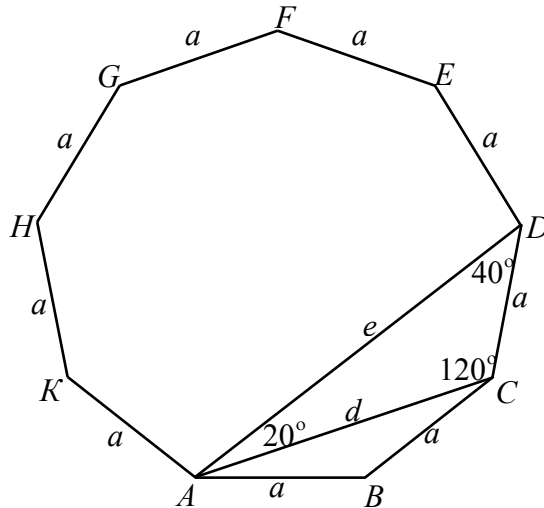
Lema 1. Ako u $\triangle ABC$ je $\alpha = 2\beta$, onda je $a^2 = b(b+c)$.

Lema 2. U pravilnom devetouglu dužina stranice jednaka je razlici dužina najduže i najkraće dijagonale, tj. $a = D - d$.

Napomena. Dokaz leme 1. nalazi se u [5], a leme 2. u [4].

Sada prelazimo na dokaz teoreme.

Spoljašnji ugao pravilnog devetougla je $360^\circ : 9 = 40^\circ$, a unutrašnji ugao $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Periferijski ugao nad stranicom pravilnog devetougla je 20° , pa je $\angle CAD = 20^\circ$ (sl. 1.). U trouglu ACD je $\angle ACD = 140^\circ - 20^\circ = 120^\circ$, što znači da je $\angle ADC = 180^\circ - (20^\circ + 120^\circ) = 40^\circ$.



Slika 1.

Kako je $\angle ADC = 2 \cdot (\angle CAD)$, to možemo primijeniti lemu 1 na $\triangle ACD$:

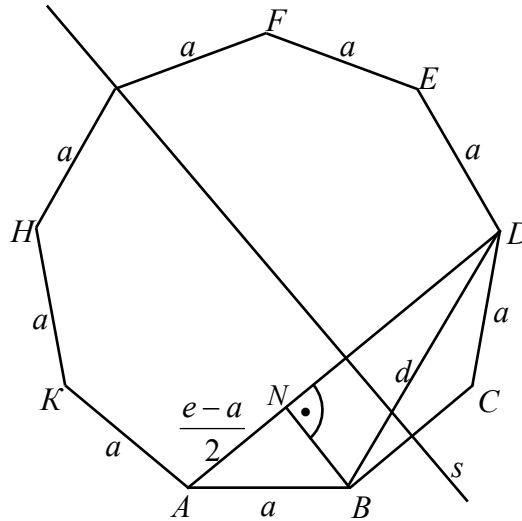
$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot (\overline{CD} + \overline{AD}), \text{ ili } d^2 = a(a + e), \text{ odnosno } d^2 - a^2 = ae.$$

S obzirom da je $d = D - a$ (v. lemu 2), imamo $(D - a)^2 - a^2 = ae$, odakle je

$D^2 - ae = 2aD$. Nakon dijeljenja lijeve i desne strane posljednje jednakosti sa aD dobijamo traženu jednakost (*).

Dokaz 2. Pravilni devetougao $ABCDEFGHIK$ je osno simetrična figura. Jedna od njegovih 9 osa simetrije s sadrži vrh G i središte stranice BC , što znači da su tačke B i C , odnosno A i D , simetrične u odnosu na tu osu. Zbog toga je $BC \perp s$ i $AD \perp s$, pa je $BC \parallel AD$ (sl. 2.).

Kako je i $\overline{AB} = \overline{CD}$, zaključujemo da je četverougao $ABCD$ jednakokraki trapez.



Slika 2.

Neka je $BN \perp AD$, $N \in AD$ (sl. 2.). Тада је $\overline{AN} = \frac{e-a}{2}$ и $\overline{DN} = \frac{e+a}{2}$.

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove ABN i BDN dobijamo

$$\overline{BN}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AN}^2 \text{ i } \overline{BN}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DN}^2, \text{ ili}$$

$$\overline{BN}^2 = a^2 - \left(\frac{e-a}{2}\right)^2 \text{ i } \overline{BN}^2 = d^2 - \left(\frac{e+a}{2}\right)^2.$$

Iz posljednje dvije jednakosti slijedi

$$a^2 - \left(\frac{e-a}{2}\right)^2 = d^2 - \left(\frac{e+a}{2}\right)^2,$$

a odavde je

$$\begin{aligned} d^2 - a^2 &= ae \\ \Rightarrow (D-a)^2 - a^2 &= ae, \quad \text{jer } d = D-a \text{ (lema 2)} \\ \Rightarrow D^2 - ae &= 2aD \text{ / : } aD \\ \Rightarrow \frac{D}{a} - \frac{e}{D} &= 2, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Dokaz 3. Neka je $\{S\} = HD \cap FE$ (sl. 3.). U trouglu DSE je

$$\angle SED = 40^\circ \text{ (spoljašnji ugao pravilnog devetougla)}$$

i

$$\angle EDS = \angle HDS - \angle HDE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Trouglovi ACD i DSE su podudarni (pravilo USU), pa je

$$\overline{DS} = \overline{AC} = d \text{ i } \overline{SE} = \overline{AD} = e.$$

S obzirom da trouglovi ACD i HSE imaju jednake uglove, zaključujemo da je

$\triangle ACD \sim \triangle HSE$. Zbog toga imamo:

$$\overline{CD} : \overline{HF} = \overline{AC} : \overline{SF}$$

$$\Rightarrow a : d = d : (a + e)$$

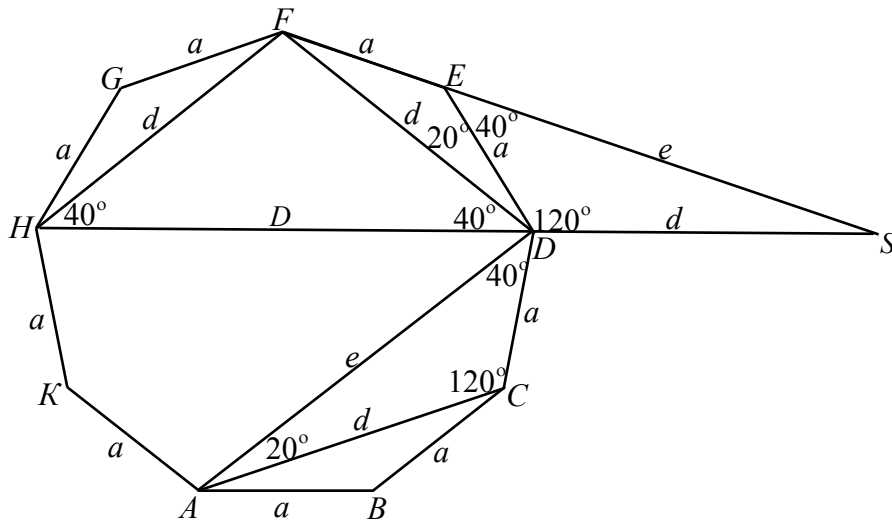
$$\Rightarrow d^2 = a^2 + ae$$

$$\Rightarrow (D - a)^2 = a^2 + ae, \text{ zbog } d = D - a \text{ (lema 2)}$$

$$\Rightarrow D^2 - 2aD = ae$$

$$\Rightarrow D^2 - ae = 2aD \text{ } / : aD$$

$$\Rightarrow \frac{D}{a} - \frac{e}{D} = 2, \text{ q. e. d.}$$



Slika 3.

Dokaz 4. Na osnovu Stjuartove teoreme primijenjene na $\triangle DSF$ (sl. 3.), imamo

$$\overline{SF} \cdot (\overline{EF} \cdot \overline{ES} + \overline{DE}^2) = \overline{DF}^2 \cdot \overline{SE} + \overline{DS}^2 \cdot \overline{EF}$$

$$\Rightarrow (a + e)(ae + a^2) = d^2 e + d^2 a$$

$$\Rightarrow (a + e)(ae + a^2) = (a + e)d^2 \text{ } / : (a + e)$$

$$\Rightarrow ae + a^2 = d^2$$

$$\Rightarrow ae + a^2 = (D - a)^2, \text{ jer } d = D - a \text{ (lema 2)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ae &= D^2 - 2aD \\ \Rightarrow D^2 - ae &= 2aD \quad / : aD \\ \Rightarrow \frac{D}{a} - \frac{e}{D} &= 2, \quad q. e. d. \end{aligned}$$

Dokaz 5. Upotrebit ćemo Molvajdove formule:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}},$$

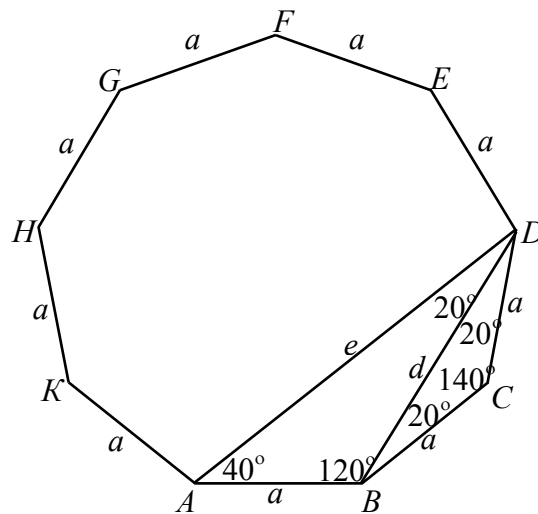
gdje su a, b, c stranice i α, β, γ unutrašnji uglovi trougla ABC .

Primjenom prve formule na $\triangle BCD$ (sl. 4.) dobijamo

$$\frac{d+a}{a} = \frac{\cos \frac{140^\circ - 20^\circ}{2}}{\sin \frac{20^\circ}{2}} = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 10^\circ},$$

a primjenom druge formule na $\triangle ABD$, imamo

$$\frac{d-a}{e} = \frac{\sin \frac{40^\circ - 20^\circ}{2}}{\cos \frac{120^\circ}{2}} = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 60^\circ}.$$

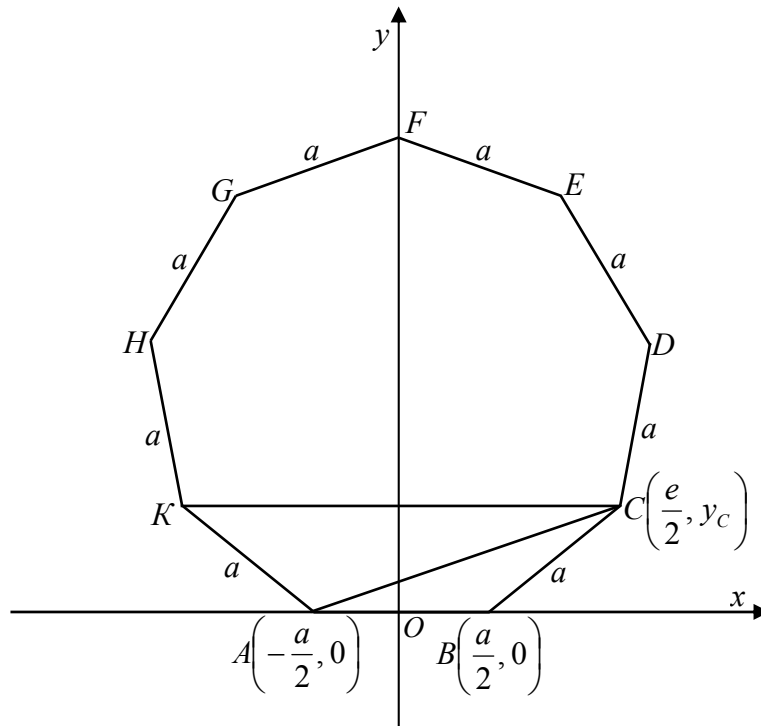


Slika 4.

Tada je

$$\begin{aligned} \frac{d+a}{a} \cdot \frac{d-a}{e} &= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{\sin 10^\circ}{\cos 60^\circ} = 1 \\ \Rightarrow d^2 - a^2 &= ae \\ \Rightarrow (D-a)^2 - a^2 &= ae, \text{ jer } d = D-a \text{ (lema 2)} \\ \Rightarrow D^2 - ae &= 2aD \quad / : aD \\ \Rightarrow \frac{D}{a} - \frac{e}{D} &= 2, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Dokaz 6. Koristit ćemo analitičku geometriju. Izaberemo Dekartov pravougli koordinatni sistem u ravni tako da vrhovi A i B pravilnog devetougla $ABCDEFGHIK$ budu simetrični u odnosu na koordinatni početak O (središte stranice AB) i da stranica AB pripada apscisnoj osi (sl. 5.).



Slika 5.

Zbog $CK \parallel AB$ i $\overline{CK} = e$, koordinate vrhova A , B i C pravilnog devetougla su:

$$A\left(-\frac{a}{2}, 0\right), B\left(\frac{a}{2}, 0\right) \text{ i } C\left(\frac{e}{2}, y_c\right).$$

Odredimo ordinatu y_c tačke C ; imamo

$$\overline{AC}^2 = d^2 = \left(\frac{e+a}{2}\right)^2 + y_c^2,$$

a odavde je

$$y_c = \sqrt{d^2 - \left(\frac{e+a}{2}\right)^2}.$$

Kako je $\overline{BC} = a$, $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ i $C\left(\frac{e}{2}, \sqrt{d^2 - \left(\frac{e+a}{2}\right)^2}\right)$, dobijamo

$$\overline{BC}^2 = a^2 = \left(\frac{e-a}{2}\right)^2 + \left(d^2 - \left(\frac{e+a}{2}\right)^2\right),$$

a odavde je

$$\begin{aligned} a^2 &= d^2 - ae \\ \Rightarrow d^2 - a^2 &= ae \\ \Rightarrow (D-a)^2 - a^2 &= ae, \text{ jer je } d = D-a \text{ (lema 2)} \\ \Rightarrow D^2 - ae &= 2aD / : aD \\ \Rightarrow \frac{D}{a} - \frac{e}{D} &= 2, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

LITERATURA

- [1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
- [2] V. Blagojević, *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, I. Sarajevo, 2002.
- [3] D. Milošević, *Neke teoreme o pravilnom devetouglu*, Tangenta (Beograd), 42/2 (2005/06), 15 – 16.
- [4] D. Milošević, *Razni dokazi jedne teoreme u geometriji*, MAT - KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 49 - 54.
- [5] D. Milošević, *Četiri teoreme o pravilnom devetouglu*, MAT - KOL (Banja Luka), XVIII (1) (2012), 5 - 15.

(Pristiglo u redakciju 03.10.2011. revidirana verzija 15.11.2011. Dostupno na internetu od 28.11.2011.)