**MAT-KOL (Banja Luka)**
XVII(1)(2011), 13-24

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5228 (o)
*Metodika matematike*

# RAZLIČITE METODE DOKAZIVANJA JEDNE TEOREME U GEOMETRIJI

## (Different methods of proofs of one geometric theorem)

**Šefket Arslanagić[1] i Dragoljub Milošević[2]**

**Sažetak**: U radu je dato jedanaest raznih dokaza jedne teoreme iz geometrije koja se odnosi na pravilni petougao.

**Ključne riječi**: pravilni petougao, stranica i dijagonala pravilnog petougla, slični trouglovi, paralelogram, simetrala unutrašnjeg ugla trougla, rotacija, Ptolemejeva i Stjuartova teorema, sinusna i kosinusna teorema, Molvajdove formule, vektori, skalarni proizvod, analitička geoemtrija.

**Abstract**: In this paper we give eleven different proofs of one geometric theorem for the regular pentagon.

**Key words and phrasese**: regular pentagon, side and diagonal of regular pentagon, similar triangles, parallelogram, angle-bisector, rotation, Ptolemy's and Stewart's theorem, sine and cosine law, Mollweide's formulas, vectors, scalar product, analytic geometry.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

U ovom radu ćemo dati jedanaest raznih dokaza jedne teoreme iz geometrije koja se odnosi na pravilni petougao rukovodeći se poznatom maksimom da je vrijednije jedan matematički zadatak riješiti na dva ili više načina nego riješiti desetine zadataka na jedan te isti način.

U ovim dokazima ćemo koristiti puno činjenica iz planimetrije, trigonometrije, vektorske algebre, analitičke geometrije, itd. Riječ je o sljedećoj teoremi:

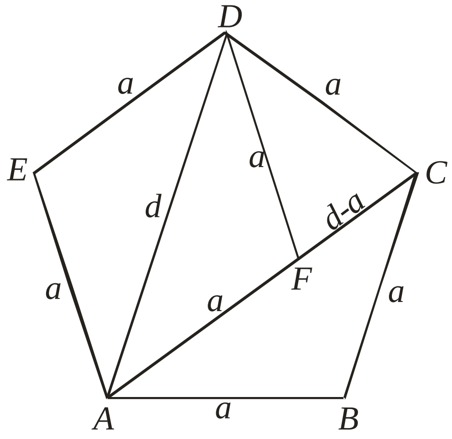
**Teorem**: ***U pravilnom petouglu stranice*** $a$ ***i dijagonale*** $d$ ***važi jednakost***

$$\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1 . \qquad (*)$$

[1] Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, BiH; e-mail: asefket@pmf.unsa.ba
[2] 17. NOU divizije 43, 32300 G. Milanovac, Srbija, e-mail: dramil47@gamil.com

**Dokaz 1**. Petougao $ABCDE$ je pravilan, tj. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AE}$ (sl.1). Njegov unutrašnji ugao $\angle ABC$ jednak je $108^0$, pa je u jednakokrakom trouglu $\Delta ABC$ ( $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ ):

$$\angle BAC = \angle ABC = (180^0 - 108^0) : 2 = 36^0.$$




Slika 1.

Konstruišimo duž $DF, (F \in AC)$ paralelnu sa stranicom $EA$ petougla. Četverougao $AFDE$ je romb, pa je $\overline{DF} = a$. Trouglovi $\Delta ACD$ i $\Delta CDF$ su jednakokraki, pa je $\angle ACD = \angle ADC = (180^0 - 36^0) : 2 = 72^0$ i $\angle CDF = 180^0 - 2 \cdot 72^0 = 36^0$. Ti trouglovi su slični, što znači da je $\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{DF} : \overline{CF}$, tj.

$$d : a = a : (d - a) \Rightarrow d(d - a) = a^2$$

$$\Rightarrow d^2 - a^2 = ad \;/ : ad$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1. \text{ q.e.d.}$$

**Dokaz 2**. Kako je $\angle ADF = \angle CDF$ (sl.1), prava $DF$ je simetrala unutrašnjeg ugla $\angle ADC$ u trouglu $\Delta ACD$, pa možemo primjeniti teoremu o simetrali unutrašnjeg ugla za taj trougao:

$$\overline{AF} : \overline{FC} = \overline{AD} : \overline{CD}$$

$$\Rightarrow a : (d - a) = d : a$$

$$\Rightarrow d(d - a) = a^2$$

$$\Rightarrow d^2 - a^2 = ad \;/ : ad$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1,$$

a ovo je ($*$).

**Dokaz 3**. Primjenom **Ptolemejeve**[3)] **teoreme** na tetivni četverougao $ACDE$ (sl.1), dobijamo:

$$\overline{AD}\cdot\overline{CE}=\overline{AE}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DE}$$

$$\Rightarrow d\cdot d=a\cdot a+d\cdot a$$

$$\Rightarrow d^2-a^2=ad\ /:ad$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1. \qquad \text{q.e.d.}$$

**Dokaz 4**. Rotirajmo trougao $\Delta ADE$ oko vrha $D$ tako da se tačka $E$ poklopi sa tačkom $C$, a tačka $A$ sa tačkom $F$ (sl.2). Tada je ugao R$ACF$ opružen, a trouglovi $\Delta CDF$ i $\Delta AFD$ su slični. Zbog toga je:

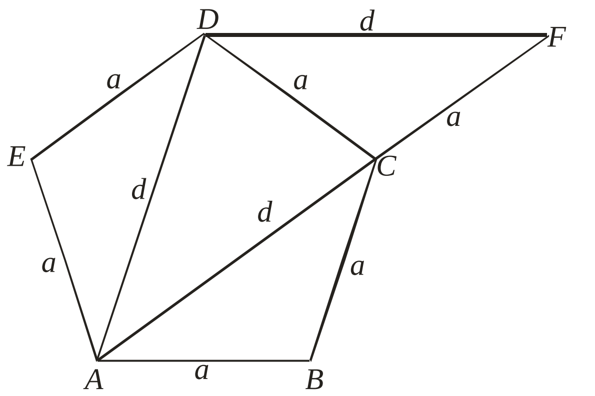
$$\overline{DF}:\overline{CD}=\overline{AF}:\overline{AD}$$

$$\Rightarrow d:a=(d+a):d$$

$$\Rightarrow d^2=a^2+ad$$

$$\Rightarrow d^2-a^2=ad\ /:ad$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1, \text{ q.e.d.}$$




Slika 2

**Dokaz 5**. Koristićemo **Stjuartovu**[4)] teoremu i primjenićemo je na trougao $\Delta ACD$ (sl.1), pa dobijamo:

[3)] Ptolemeus Claudius, starogrčki matematičar, geograf i astronom, II vijek nove ere
[4)] Matthew Stewart (1717-1785), škotski matematičar

$$\overline{AC}\cdot\left(\overline{DF}^2+\overline{AF}\cdot\overline{FC}\right)=\overline{CD}^2\cdot\overline{AF}+\overline{AD}^2\cdot\overline{CF}$$

$$\Rightarrow d\left[a^2+a\left(d-a\right)\right]=a^2\cdot a+d^2\left(d-a\right)$$

$$\Rightarrow d\cdot ad=a^3+d^3-ad^2$$

$$\Rightarrow a^3+d^3-2ad^2=0$$

$$\Rightarrow a^3+d^3-ad^2-ad^2-a^2d+a^2d=0$$

$$\Rightarrow d^2\left(d-a\right)-a^2\left(d-a\right)-ad\left(d-a\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(d-a\right)\left(d^2-a^2-ad\right)=0$$

$$\Rightarrow d^2-a^2-ad=0 \qquad \left(d\neq a,\text{ pa } d-a\neq 0\right)$$

$$\Rightarrow d^2-a^2=ad\ /:ad$$

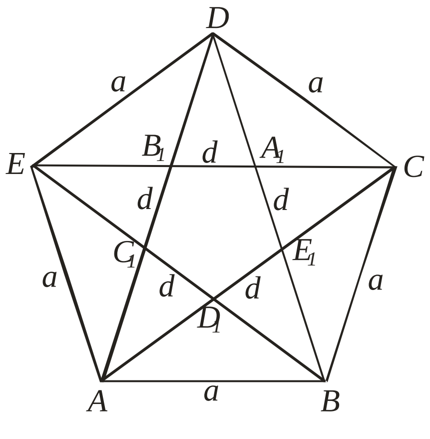
$$\Rightarrow \frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1. \qquad \text{q.e.d.}$$

**Dokaz 6**. Četverougao $DCBC_1$ je paralelogram (vidi dokaz 1), te je (sl.3):

$$\overline{EC_1}=\overline{EB}-\overline{C_1B}=\overline{EB}-\overline{DC}=\overline{EB}-\overline{ED_1}=\overline{D_1B}.$$

Trouglovi $\Delta EC_1B_1$ i $\Delta AC_1B$, te $\Delta ED_1C$ i $\Delta AD_1B$ su slični, pa je:

$$\frac{\overline{EB_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{D_1B}}{\overline{ED_1}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{EB_1}+\overline{B_1C}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{EB_1}+\overline{AB}}=\frac{1}{\frac{\overline{EB_1}}{\overline{AB}}+1}.$$




Slika 3.

Stavljajući da je $\frac{\overline{EB_1}}{\overline{AB}} = x$ imamo $x = \frac{1}{x+1}$, a odavde

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (1)$$

Imamo dalje zbog $\frac{\overline{EB_1}}{\overline{AB}} = x$:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EB_1} + \overline{B_1C}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EB_1} + \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EB_1}}{\overline{AB}} + 1 \text{, tj.}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AB}} = x + 1 \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \qquad (2)$$

Sada je zbog $\overline{EC} = d$ i $\overline{AB} = a$ iz (2):

$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad (3)$$

te

$$\frac{a}{d} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (4)$$

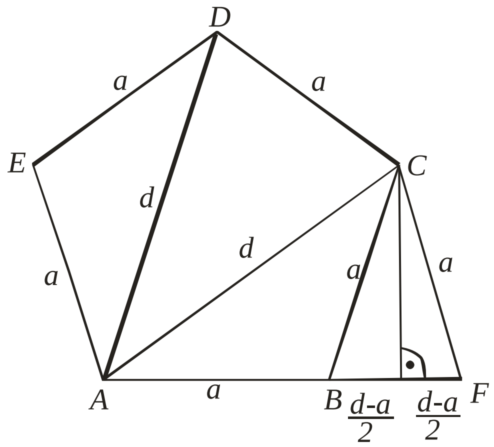
Dobijamo sada iz (3) i (4):

$$\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1. \qquad \text{q.e.d.}$$

**Dokaz 7**. Produžimo stranicu $AB$ petougla do tačke $F$ tako da je $\overline{AF} = \overline{AC} = d$ (sl.4). Neka je $CG$ visina jednakokrakog trougla $\Delta BFC; G \in AF$. Tada je $\overline{BG} = \frac{d-a}{2}$, pa je $\overline{AG} = a + \frac{d-a}{2} = \frac{a+d}{2}$. Imamo sada iz pravouglog trougla $\Delta AGC$:

$$\cos(\angle CAG) = \cos 36^0 = \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} \text{, tj.}$$

$$\cos 36^0 = \frac{a+d}{2d}. \qquad (1)$$




Slika 4.

Primjenom sinusne teoreme na trougao $\Delta ACD$, dobijamo:

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\angle CAD}=\frac{\overline{AD}}{\sin\angle ACD}, \text{ tj.}$$

$$\frac{a}{sin 36^0}=\frac{d}{sin 72^0}. \qquad (2)$$

Kako je $sin 72^0 = sin\left(2\cdot 36^0\right)=2 sin 36^0 cos 36^0$, iz jednakosti (2) slijedi:

$$cos 36^0=\frac{d}{2a}. \qquad (3)$$

Iz jednakosti (1) i (3) imamo:

$$\frac{a+d}{2d}=\frac{d}{2a},$$

odnosno

$$d^2=a\left(a+d\right)$$

$$\Rightarrow d^2-a^2=ad \;/ : ad$$

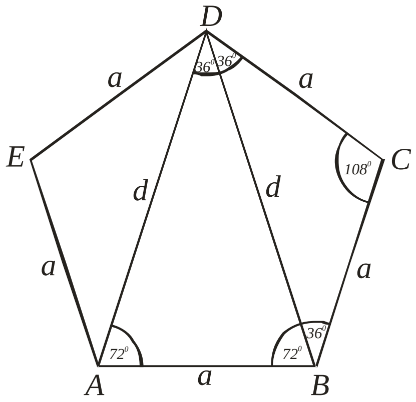
$$\Rightarrow \frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1 \text{ . q.e.d.}$$

**Dokaz 8**. Na osnovu kosinusne teoreme primjenjene na trouglove $\Delta BCD$ i $\Delta ABD$ (sl.5) imamo:

$$a^2=a^2+d^2-2ad\, cos 36^0$$

i

$$a^2=d^2+d^2-2d^2 cos 36^0 .$$




Slika 5.

Iz prve jednakosti slijedi:

$$\cos 36^0 = \frac{d}{2a},$$

pa smjenom u drugu jednakost, dobijamo:

$$a^2 = 2d^2 - \frac{d^3}{a} \Rightarrow a^3 + d^3 = 2ad^2,$$

a odavde (vidi dokaz 5):

$$(d-a)\left(d^2 - a^2 - ad\right) = 0$$

$$\Rightarrow d^2 - a^2 - ad = 0 \text{ (jer zbog } d \neq a \text{ je } d - a \neq 0\text{)}$$

$$\Rightarrow d^2 - a^2 = ad \ / : ad$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1. \qquad \text{q.e.d.}$$

**Dokaz 9**. Koristićemo **Molvajdove**[5)] formule:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ i } \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

gdje su $a,b,c$ stranice i $\alpha, \beta, \gamma$ unutrašnji uglovi trougla $\Delta ABC$.
Primjenom prve formule na trougao $\Delta BCD$ (sl.5), dobijamo:

[5)] Karl B. Mollweide (1774-1825), njemački matematičar i astronom

$$\frac{d+a}{a}=\frac{\cos\frac{108^0-36^0}{2}}{\sin\frac{36^0}{2}}=\frac{\cos 36^0}{\sin 18^0},$$

a primjenom druge formule na trougao $\Delta ABD$ , imamo:

$$\frac{d-a}{d}=\frac{\sin\frac{72^0-36^0}{2}}{\cos\frac{72^0}{2}}=\frac{\sin 18^0}{\cos 36^0}.$$

Tada je

$$\frac{d+a}{a}\cdot\frac{d-a}{d}=\frac{\cos 36^0}{\sin 18^0}\cdot\frac{\sin 18^0}{\cos 36^0}=1$$

$$\Rightarrow d^2-a^2=ad\ /:ad$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1 \text{, q.e.d.}$$

**Dokaz 10**. Ovdje ćemo koristiti vektore. Imamo (npr. iz sl.1):

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$$

a odavde, zbog

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=d\ ,\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a \ \text{ i }\ \angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=72^0$$

i činjenice da je $\cos 72^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ dobijamo

$$d^2=2a^2+2a^2\cos 72^0$$

$$\Rightarrow d^2=2a^2\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow d^2=\frac{1}{2}a^2\left(\sqrt{5}+3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ te}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Sada je

$$\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1, \text{ q.e.d.}$$

**Napomena**: Daćemo dva dokaza da vrijedi

$$\cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

**Dokaz 1**. Imamo

$$\sin 18^0 = \frac{2\sin 18^0 \cos 18^0}{2\cos 18^0} = \frac{\sin 36^0}{2\cos 18^0} = \frac{\cos 54^0}{2\cos 18^0} = \frac{\cos\left(3\cdot 18^0\right)}{2\cos 18^0} =$$

$$= \frac{4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0}{2\cos 18^0} = \frac{4\cos^2 18^0 - 3}{2} = \frac{4 - 4\sin^2 18^0 - 3}{3} = \frac{1 - 4\sin^2 18^0}{2}, \text{ tj.}$$

$$\sin 18^0 = \frac{1 - 4\sin^2 18^0}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0$$

$$\sin 18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \text{ tj.}$$

$$\cos 72^0 = \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{ q.e.d.}$$

**Dokaz 2**. Neka je $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Tada je na osnovu **Muavreove**[6)] formule:

$$z^5 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1, \text{ tj.}$$

$$z^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0,$$

[6)] Abraham de Moivre (1667-1754), engleski matematičar francuskog porijekla a odavde zbog $z \neq 1$:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \, / : \left(z^2 \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 .$$

Neka je $z + \frac{1}{z} = t$ ; slijedi

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} . \qquad (*)$$

Kako je

$$z + \frac{1}{z} = cos\frac{2\pi}{5} + i\,sin\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{cos\frac{2\pi}{5} + i\,sin\frac{2\pi}{5}} =$$

$$= cos\frac{2\pi}{5} + i\,sin\frac{2\pi}{5} + \frac{cos\frac{2\pi}{5} - i\,sin\frac{2\pi}{5}}{cos^2\frac{2\pi}{5} + sin^2\frac{2\pi}{5}} = 2\,cos\frac{2\pi}{5} ,$$

a odavde

$$cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

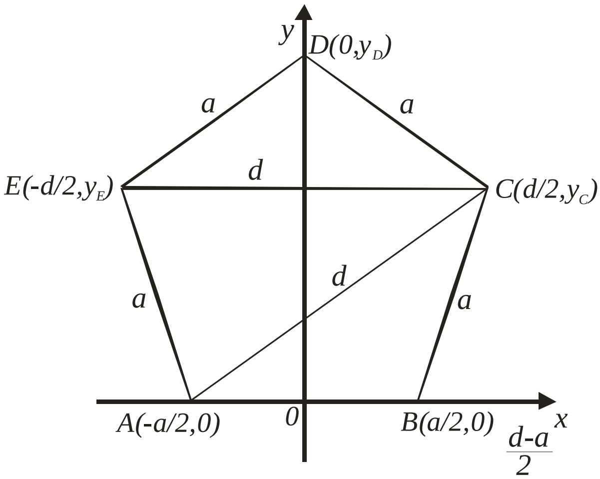
(jer je $cos\frac{2\pi}{5} > 0$ ). Dakle, zbog $cos\frac{2\pi}{5} = cos 72^0$ , slijedi

$$cos 72^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \text{, q.e.d.}$$

**Dokaz 11**. Ovdje ćemo koristiti analitičku geometriju. Izaberimo **Dekartov**[7) ] pravougli koordinatni sistem u ravni tako da vrhovi $A$ i $B$ pravilnog petougla $ABCDE$ budu simetrični u odnosu na koordinatni početak $O$ (središte stranice $AB$ ) i da stranica $AB$ pripada apscisnoj osi (sl.6).

---

7) René Descartes (1596-1650), francuski matematičar i filozof




Slika 6.

Zbog $\overline{AB} = a$ i $\overline{CE} = d$ ($CE \| AB$), koordinate vrhova petougla su: $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{d}{2}, y_C\right)$, $D(0, y_D)$ i $E\left(-\frac{d}{2}, y_E\right)$.

Odredimo ordinatu $y_C$ tačke $C$; imamo

$$\overline{BC}^2 = a^2 = \left(\frac{d}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + y_C^2 ,$$

a odavde je

$$y_C = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2} .$$

Kako je $\overline{AC} = d$, $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ i $C\left(\frac{d}{2}, \sqrt{a^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2}\right)$, dobijamo:

$$\overline{AC}^2 = d^2 = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(a^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2\right),$$

a odavde je

$$d^2 = a^2 + ad$$

$$\Rightarrow d^2 - a^2 = ad \ / : ad$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1 . \qquad \text{q.e.d.}$$

## L I T E R A T U R A


[1] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] **Blagojević, V.**, *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, I. Sarajevo, 2002.

[3] **Marić, A.**, *Planimetrija - zbirka rješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.


Primljeno 23.03.2011.