ISSN 1986–518X *ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA*

Vol. III (2011), Broj 5, 13–19
Originalni istraživački članak

Kompetencije srednjoškolaca o ranim konceptima prirodnih brojeva[1]

Branislav Boričić[2], Daniel A. Romano[3] i Milovan Vinčić[4]

Sažetak: Algebarska iskustva u osnovnoj školi su od suštinskog značaja za izgradnju vještine razmišljanja i, sem toga, da pripremi učenike za učenje formalizovanije algebre u srednjoj školi. U ovom članku izlažemo ustanovljeno aritmetičko-ranoalgebarsko mišljenje o prirodnim brojevima i operacijama sa njima svršenih srednjoškolaca - studenata studijskog programa za predškolsko obrazovanje jednog pedagoškog fakultetu u Bosni i Hercegovini.

Ključne riječi i fraze: poluprsten prirodnih brojeva, prosti brojevi

Abstract: In this article we give an explanation of algebraic thinking about natural numbers and their operation with pre-schools programm students on the Bijeljina Faculty of Education at East Sarajevo University. While the curriculum of 'Early mathematical notions' expects students to engage algebraic ideas that ultimately related to early number concepts (for example, natural numbers, prim numbers and etc.), the students themselves did not appear to link with they.

Key words and phrases: semiring of natural numbers, prime numbers
Math. Subj.Classification (2011): 97B50, 97D30, 97D70, 97F30
ZDM Subj. Classification (2011): B50, C30, C70, D30, D50, D70, F30

UVOD

Učeničke i studentske poteškoće sa učenjem algebre bile su predmet mnogih istraživanja. (Pogledati, na primjer, tekstove [5], [11], [13], [14], [16], [20], [22] i [24].) Većinu istraživača zanimaju problemi koji se pojavljuju pri prelazu od rada u aritmetici ka radu u generaliziranim aritmetičkim i algebarskim strukturama. Domen rješavanja aritmetičkih i algebarskih zadataka je područje unutar kojeg istraživači mogu da sagledaju mnoge poteškoće sa kojma se susreću učenici i studenti. Sagledavajući trendove savremenih istraživanja matematičkog obrazovanja (u tom smislu, pogledati tekstove [2], [5], [12], [14], [19], [21], [23] i [25]) izvršena je evaluacija jednog testa u okvirima predmeta 'Početni matematički pojmovi' studenata studijskog programa za vaspitače (trogodišnji studij) Pedagoškog fakultet u Bijeljini.

Motivacija za ovim radom došla je u isto vrijeme iz nekoliko smijerova. Naime, u okvirima akademskog kursa 'Početni matematički pojmovi', koji se sluša na prvoj godini studijskog programa za

---

[1] Rad je dio istraživačkog projekta „*Ustanovljavanje obrazovnih nivoa u matematici*" koji realizuje Naučno društvo matematičara Banja Luka, a dijelom je finansiran i od strane Ministarstva za nauku i tehnologiju Republike Srbije, projekt broj 179005.

[2] Ekonomski fakultet Beograd, e-amil: boricic@ekof.bg.ac.rs
[3] Pedagoški fakultet Bijeljina, e-mail:bato49@hotmail.com
[4] Mašinski fakultet Banja Luka, e-mail:vincicm@yahoo.com

predškolsko vaspitanje, studentima je pružena mogućnost da svoje koncepcije o brojevima i geometrijskim pojmovima, koje su stekli tokom svog osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja, stabilizuju kroz ponavljanje i sistematizacije tih sadržaja na jednom višem (i drugačijem) nivou. Procijenjujući uspješnost studenata u dosezanju ciljeva ovog predmeta tokom poslednje tri generacije (2008/09 – 2010/11) kod nas se formirala slutnja o vrlo skromnim matematičkim kompetencijama svršenih učenika srednjih škola. U vezi s prethodnim, u okvirima istraživačkog projekta „*Ustanovljavanje obrazovnih nivoa u matematici*“, koje realizuje Naučno društvo matematičara Banja Luka, grupa istraživača napravila je uvid u studentske radove sa završnih procjena uspješnosti tog predmeta. Prvi problem sa kojim smo se susretali na početku svake školske godine, bio je ustanovljavanje raspona u kojima mogu biti smještene prethodno formirane kognitivne ravni naših slušalaca u jednoj generaciji. U našim obrazovnim sistemima ne postoji dodatni sistem utvrđivanja izlaznih rezultata školskog obrazovanja. Pri tome mislimo na utvrđivanje obrazovnih nivoa nezavisno od oficijelnog. To nas stavlja u gotovo nemoguću situaciju. S jedne strane, moramo se oslanjati na rezultate oficijelnih utvrđivanja uspješnosti srednjoškolskog sistema. S druge strane, mora se realizovati nastavni program kursa ’Početni matematički pojmovi’ na akademskom nivou, što pretpostavlja da svi polaznici ovog kursa raspolažu znanjima o klasama brojeva i geometrijskim objektima na nivou predviđenim nastavnim programima srednjih škola u nas. Pretpostavlja se takođe da su svršeni učenici srednjih škola dosegnuli i druge ciljeve nastave matematike (sticanje vještinama upravljanjem pravilnog zaključivanja i usvajanjem društveno prihvatljivih stavova o etičkim vrijednostima) predviđene kao poželjni ishodi srednjoškolske nastave matematike. Treće, matematička znanja i vještine na akademskom nivou nije moguće graditi bez prethodno stečenih znaja i usvojenih vještina u srednjim školama kao osnova te gradnje. Podsjećamo čitaoca da većina istraživača matematičkog obrazovanja o matematici govori kao o posebnom jeziku. Da bismo čitaocu ovog teksta dočarali šta podrazumijevamo pod iskorištenom sintagmom ’gotovo nemoguća situacija’ poslužiće nam slijedeća hipotetička apsurdna situacija: Zamislite da studentima u Brazilu, čiji je maternjij jezik portugalski, nastavnik predaje na kineskom jeziku kojeg, naravno, studenti ne znaju.

METODA

Algebarska iskustva u osnovnoj školi su od suštinskog značaja za izgradnju vještine razmišljanja i da pripremi studente za učenje formalizovane algebre u srednjoj školi. Realizatori nastave matematike u nižim razredima osnovnme škole trebalo bi da razumiju algebarske sadržaje, da razumiju način na koji učenici uče, i da koriste nastavnu strategiju koja podstiče razvoj algebarskog mišljanja. Uspješni nastavnici mogu imati moćan i dugotrajan uticaj na njihove učenike. Uočeno je da nastavnikova efikasnost ima snažniji impakt na učenička dostignuća od bilo kog drugog faktora. To je važno kako za učenike osmogidišnjih tako i srednjih škola. Mnogi istraživači matematičkog obrazovanja su mišljenja da je učenje matematike plodnije kod efektnih i obrazovanih nastavnika (v. [3], [18]). Prema Rejsu i Finel ([18]), nastavnik je ključ, a vreme učenja je neophodan faktor (v. [17]). Nastavnici moraju razumeti matematičku sadržinu, znati kako studenti uče matematiku, i biti sposoban iskoristiti nastavne strategije koje podstiču učenje matematike (v. [15]).

Algebra se karakteriše uopšte kao aritmetička osnova matematičke škole (v. [10], [24]). Algebra se posmatra kao vrata kursa imajući sposobnost da unapredi studente na viši nivo kurseva i više izbora karijere (v. [9]). Mogućnost da se nauči algebra bi trebala biti data svim studentima. Prema stavu Nacionalnog savjeta nastavnika za matematiku *Principima i standardima za školu matematike*, "algebarska sposobnost je važna u životu odraslih, kako na poslu tako i na pripremama za poslesrednje obrazovanje" (p.37). Svi studenti bi trebalo da uče algebru od efikasnih nastavnika.

U okvirima procesa procjenjivanja uspješnosti u sticanju kompetencija u okvirima akademskog predmeta ‘Početni matematički pojmovi’, obavljen je testiranje studenata korištenjem, između ostalih, slijedećih zadataka.

Zadatak 9a. (25 bodova) Pri dijeljenju jednog prirodnog broja drugim količnik je 18, a ostatak 14. Odredite djeljenik i djelitelj tako da je svaki od njih djeljiv sa 7.
Rješenje: Neka su traženi brojevi označeni sa x i y. Prema uslovima zadatka imamo:

$$y = 18x + 14,\ (\exists a)(x = 7a),\ \ (\exists b)(y = 7b),\ \ 14 < x.$$

Kako je broj x djeljiv brojem 7 i veći od 14, imamo da je $x\in \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, ...\}\setminus \{7, 14\}$. S druge strane, iz prve jednačine uvrštavanjem vrijednosti za x i y, dobijamo

$$7b = 18\cdot 7a + 2\cdot 7\ \ (2 < a)$$

za neke prirodne brojeve a i b. Odavde slijedi da je

$$b = 18a + 2\ (2 < a)$$

za neke prirodne brojeve a i b. Konačno, zaključujemo da parovi

$$(a,b)\in\{(3, 56), (4, 74), (5, 92), ...\}$$

zadovoljavaju prethodno postavljene uslove. Dakle, parovi

$$(x,y)\in\{(21, 392), (28, 518), (35, 644), ...\}$$

su traženi brojevi.

Postoji i jednostavnije rješenje koje je možda bliže studentima: posle definisanja problema y = 18x + 14, gde *x* i *y* su brojevi djeljivi sa 7. Za očjekivati je da će studenti popunjavati tabelu sličnu ovoj (ili razgledati svaki slučaj ponaosob):

x	7	14	21	28	35	...
18x	126	252	378	504	630	...
y	140	266	392	518	644	...

i proverom dobivenih parova eliminasiti prva dva para (ne ispunjavaju uslove zadatka jer 140:7 = 20, a 266:14 = 19).

Zadatak 9b (25 bodova)
9.1. Šta je to prost prirodan broj?
9.2. Koliko ima prostih prirodnih brojeva?
9.3. Dokaži tvrdnju iz tačke 9.2.
9.4. Kakav je to dokaz: (i) direktan; (ii) indirektan?
Rješenje. (9.1) Za prirodan broj, osim jedinice, kažemo da je prost ako i samo ako je djeljiv samo sa samim sobom i jediniciom. To su, na primjer, brojevi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, ...
(9.2) Prostih prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, preciznije prebrojivo mnogo.
(9.3) Pretpostavimo da tvrdnja iskazana u **(9.2)** nije tačna, tj. pretpostavimo da prostih prirodnih brojeva ima konačno mnogo. Neka su to brojevi: $p_1, p_2, ..., p_k$. Podsjetimo se da se svaki prirodan broj može na jedinstven način prikazati kao proizvod samo prostih brojeva. Dakle, broj $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k + 1$ budući da nije dijeljiv ni sa jednim od brojeva: $p_1, p_2, ..., p_k$, prost je broj različit od svih pomenutih prostih brojeva. Ovo je kontradikcija. Dakle, pretpostavka da postoji samo konačno mnogo prostih brojeva dovela nas je u kontradikciju. Zato je treba odbaciti: Ne postoji konačno mnogo prostih brojeva. (v. [1], [7])
(9.4) Kao što se vidi, dokaz o beskonačnom broju prostih brojeva dobijen je na indirektan način .

Zadatak 10a. (25 bodova) Postoji li prirodni broj čiji je proizvod cifara 630? Obrazloži svoj odgovor! Ako je odgovor pozitivan, koliko takvih brojeva ima?
Rješenje: Pretpostavimo da postoji broj $a = a_0 + 10^1 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + 10^3 \cdot a_3 + ... 10^n \cdot a_n$ takav da vrijedi

$$a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 630$$

Odavde zaključujemo da broj 630 treba rastaviti na faktore koji će biti u granicama $1 \leq a_k \leq 9$ (k = 1, 2, ..., n), jer ako bi bar jedna od cifara tog broja bila 0, proizvod tih cifara bi bio tako]e 0. Kako je:

$$630 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$$

to osim svih permutacije bez ponavljana skupa {1, 2, 3, 3, 5, 7} imamo i slijedeće mogućnosti:

(a) $630 = 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ cifre broja a su sve permutacije skupa {1, 3, 5, 6, 7};
(b) $630 = 1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ cifre broja a su sve permutacije skupa {1, 2, 5, 7, 9},
(c) $630 = 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ cifre broja a su sve permutacije skupa {3, 5, 6, 7};
(d) $630 = 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ cifre broja a su sve permutacije skupa {2, 5, 7, 9},
(e) $630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ cifre broja a su sve permutacije skupa {2, 3, 3, 5, 6, 7};

Rješenju zadatka **10b** uvođenje dekadne reprezentacije broja je elegantan uvod, ali realnije je očekivanje da će studenti rješavati zadatak direktno – nalaženjem prostih faktora broja 630 i razgledanjem svakog od slučajeva:

Zadatak 10b. (25 bodova)
10.1. Nabroj nekoliko neparnih prirodnih brojeva.
10.2. Šta je to neparan prirodan broj? Kako se to zapisuje?
10.3. Kojih brojeva ima više: parnih ili neparnih ?
10.4. Skup svih neparnih prirodnih brojeva ima više (ili manje, ili jednako) elemenata nego skup svih prirodnih brojeva? Obrazložite!

Rješenje: 10.1.-10.2. Neparni prirodni brojevi su brojevi koji nisu parni brojevi. To su, na primjer, brojevi 1, 3, 5, 7, ... Dakle, ne mogu se dijeliti brojem 2, bez ostatka. Prema tome, prirodan broj je neparan ako ima ostatak kod dijeljenja sa brojem 2. Dakle, ako prirodan broj n dijelimo brojem 2, imamo da je rezultat neki prirodan broj m, i još imamo ostatak kod dijeljenja. Taj ostatak mora biti 1. Zaključujuemo da se neparni prirodni brojevi mogu zapisivati u opštem obliku, ovako $n = 2m+1$. Na ovaj način zapisani su prirodni brojevi 3, 5, 7, ... Da bi ovom nizu dodali broj 1, opšti oblik neparnih prirodnih brojeva treba zapisivati u obliku $n = 2m - 1$. Zaista, jer za $m = 1$, dobijamo $n = 1$; za $m = 2$, dobijamo $n = 3$. I tako dalje. Očigledno je da je bilo koji prirodni broj ili paran ili neparan, i da svaki prirodni broj mora biti paran ili neparan. Dakle, ako broj nije paran, tada je neparan, Obrnuto, ako broj nije neparan, tada mora biti paran.

10.3. Podsjetimo se da terminom 'ekvipotentnost' dva skupa pokrivamo postojanje bar jedne obostrano-jednoznačne funkcije između ta dva skupa. Podskupovi skup svih parnih brojeva $2\mathbf{N} = \{2, 4, 6,...\}$ i skup svih neparnih brojeva $2\mathbf{N}\text{-}1 = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ skupa **N** prirodnih brojeva su ekvipotentni. To obezbijeđuje, na primjer, slijedeća funkcija

$$f : 2\mathbf{N} \ni 2n \to f(2n) = 2n - 1 \in 2\mathbf{N}\text{-}1$$

10.4. Skup $2\mathbf{N}$-1 svih neparnih prirodnih brojeva je ekvipotentan skupu **N** svih prirodnih brojeva. To obezbjeđuje, na primejr, slijedeća funkcija

$$g: 2\mathbf{N} \ni n \to g(2n) = 2n\text{-}1 \in 2\mathbf{N}\text{-}1$$

U okvirima istraživačkog projekta nastojali smo da implementiramo jedan nastavno-medodički postupak dizajniran za ustanovljavanje procedura razumijevanja artimetičko-ranoalgebarskih postupaka pri radu na aritemetičko-algebarskim operacijama i procesima na uređenom poluprstenu prirodnih brojeva. Posebno, istraživačka pitanja su bila:

1. Kakve su značajne razlike u studentskom predstavljanju njihovih vlastitih odgovora na pitanja testa koji su se odnoslili na aritmetiku i ranu algebru?
2. Ustanoviti nivoe studentskog razumijevanja generalizovanih aritmetičkih i ranoalgebarskih procedura?

ANALIZA PODATAKA

U tabeli, koja slijedi, izložena je procjena uspješnosti u ovladavanju idejama i usvajanju vještina aritmetičko-ranoalgebarskih procedura u rješavanju nelinearnih zadataka.

Uspješnost / Zadatak	**9a**	**9b**	**10a**	**10b**
∅	33	18	28	7
0	4	12	10	1
$1 \leq$ bod ≤ 8	2	3	1	25

Legenda: Uspješnost '∅' znači da studenti nisu ni pokušali da urade zadatak. Uspješnost '0' znači da su odgovori koje su studenti ponudili kao rješenje zadatka bili pogrešni.

Niže su izloženi neki od koncepata prostih i neparnih prirodnih brojeva kojima testirani studenti raspolažu. Iz nihovih odgovora na pitanja u zadacima 9b. i 10b. izdvajamo slijedeće koncepte:

Prosti brojevi:
Prosti brojevi su oni koji se mogu rastaviti na činioce.
Prost prirodan broj je svaki broj koji je djeljiv sa samim sobom.

Prost prirodan broj je onaj broj koji nema decimalnih mjesta nego je to cijeli broj.
Prosti brojevi su brojevi koji su neparni.
Za cijeli prirodan broj kažemo da je prost ako je djeljiv sa 1 ili sa samim sobom.
Prost prirodan broj je jednocifren broj. Prostih brojeva ima 9.
Prost prirodan broj je broj koji je djeljiv sa samim sobom nije djeljiv ili je djeljiv. Prostih brojeva ima 9.
Ako je prirodan broj paran tada je prirodan broj prost. Svi prosti brojevi su neparni. Prostih brojeva ima 5.
Prost prirodan broj pripada skupu N = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
Prost prirodan broj je broj koji ima samo jednu cifru.

Neparan prirodan broj:
Neparan prirodan broj je broj koji se može dijeliti sa 1 i li sa samim sobom.
Neparan prirodan broj je svaki broj koji se sabira sa 2
Za neparan broj kažemo da je neparan prirodan broj ako je djeljiv brojem 1 i sa samim sobom.
Neparan prirodan broj je onaj koji kad se podijeli ostane ostatak.
Neparan prirodan broj je broj koji je djeljiv brojem 2.
Neparan prirodan broj je onaj čiji zbir nije djeljiv sa 2.
Neparan prirodan broj je broj koji nije moguće prilikom dijeljenja podijeliti na jednak broj.
Neparan prirodan broj je svaki broj djeljiv sa 3 ili 5.
Neparan prirodan broj je onaj koji je djeljiv sa samim sobom, sa 1 i sa još nekoliko brojeva.
Prirodan broj je neparan ako nije u obliku $n = 2m - 1$, gdje je n neki prirodan broj $n = 2\cdot 1 - 1$, za $m = 2$ dobijamo $n = 2\cdot 2 - 1 = 3$.
Neparan prirodan broj je onaj broj koji se može množiti samo sa određenim brojevima za razliku od parnih koji može sa svakim.

Analizirajući studentske odgovore u zadacima 9a (djeljivost prirodnih brojeva) – otvoreni problem u generalizovanoj aritmetičkoj strukturi posredstvom kojeg se registruje aritmetičko-ranoalgebarsko mišljenje studenata, i 10a (dekadna reprezentzacija prirodnih brojeva) – aritemtički zadatak sa više odgovora posredstvog kojeg se registruje studentska sposobnost reprezentacija atirmetičkih rezultata, konstatovali smo da testirana populacije ne raspolaže stabilnim konceptom prirodnih brojava. Stekli smo utisak da testirana populacija studenata ne raspolaže znanjima o aritmetičko-ranoalgebarskim svojstvima manipuliranja u uređenom poluprstenu $(\mathbf{N},=,+,\cdot,1,<)$ prirodnih brojeva.

Radi ilustracije izložićemo neke od procedura koje su studenti ponudili kao rješenje zadatka 9a.

Primjer 1. Pomoćni broj je 252 kad se podijeli dobije se 18, a to jest jednako 14. Ako podijelimo 252 sa 7 dobijamo 36, veći je od ostatka i ako podijelimo 14 sa 7 dobijamo 2, pa su dati slučajevi djeljitelja veći od ostatka.

Primjer 2. (Budući da je dosta teško rekonstruisati razmišljenje koje je vodilo studenta da ponudi odgovor, tekst koji je student napisao doslovno je prepisan)

$x : y = 18 - 14$
$y > 14$
$x = 382$
$y = 21$
$392 : 21 = 18$ i ostatak 14

$21 \cdot 18 = 378 : 7 = 54$
$378 : 21 =$
$378 + 14 = 392 : 7 = 56$

Radi ilustracije izložićemo neke od procedura koje su studenti ponudili kao rješenje zadatka 10a.

Primjer 1. Postoji, npr. $90 \cdot 7 = 630$; $70 \cdot 9 = 630$; $2 \cdot 315$; $3 \cdot 210$; $1\cdot 630$; $5 \cdot 126$; $6 \cdot 105$; $10 \cdot 63$; ...
$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 30, ...\}$
Primjer 2. Ne postoji prirodan broj koji je zbir cifara 630.
Primjer 3. Da postoji 300 + 330 = 630 ima jedan broj.
Primjer 4. Ne postoji takav prirodan broj.

Primjer 5. Postoji, jer je 0 prirodan broj a svaki broj koji je djeljiv sa 0 daje prirodan broj.

REFLEKSIJE

Pitagorejsko saznanje o nesamjerivosti dijagonale kvadrate sa njegovim stranicama zapravo govori o nedovoljnosti aritmetike da zasnuje geometriju (v. [6]). To takođe potvrđuje i stav da se aritmetika, što istorijski posmatrano označava prevashodno rad sa prirodnim brojevima, nalazi u samim korijenima matematike, i to negdje dublje, i prije geometrije, algebre i analize. Znanja o prirodnim brojevaima spadaju u najintuitivnija matematička znanja, pa, utoliko prije, nezanje o njima ima posebnu specifičnu težinu. S druge strane, ne treba podcijeniti dubinu i težinu aritmetike koja pojedinim svojim dijelovima, prije svega teorijom prostih brojeva, mada spada u domen *elementarne matematike*, slovi za jednu od najizazovnijih i najtežih oblasti matematike. Mnogi aritmetički problemi, iako po svojim formulacijama krajnje jednostavni, u svijetu matematičara predstavljaju decenijama i vijekovima nerazrješive enigme. Stoga sa rezervom valja uzimati i nekompetencije studenata i đaka u ovoj oblasti. Sigurno je, pak, da tako jednostavan koncept kao što je koncept neparnog broja, pa, usuđujemo se reći, i koncept prostog broja, mora biti u više navrata temeljno obrađen tokom osnovnog i srednjeg školovanja, pa bi, stoga, morao dati i bolje rezultate na ovako usmjerenim testiranjima. Dodatni razlog za zabrinutost jeste što su nekompetencije pokazane u oblasti matematike, za razliku od svih drugih oblasti, nepopravljive. Loši pokazatelji stanja osnovnog i srednjeg obrazovanja do kojih smo došli, imajući u vidu ruinirane obrazovne institucije regiona, što ratovima, što ekonomskom tranzicijom, zapravo i ne izneneđuju. Iznenađuje, međutim, u cijelom regionu, naglašeno odsustvo političke volje da se uloži u jedan dugoročno isplativi projekt, *projekt reforme i unapređenja školstva*. U takvoj situaciji, šta preostaje prosvjetnim radnicima osim da u svakoj mogućpj prilici, pa i u ovoj, ukazuju na potrebu što hitnijeg okretanja relevantnih državnih rješavanju gorućih problema obrazovanja. U tom projektu, matematičko obrazovanje mora zauzeti centralno mjesto.

Kako je to uobičajeno u metodici nastave matematike, nastavnici bi trebalo da svoje polaznike upute u procedure rješavanja nelinearno složenih zadataka, zadataka sa više rješenja kao i zadataka kod kojih je skup mogućih rješenja neograničen (tzv. 'open-ended' zadatak). Tokom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja, trebalo bi da učenici steknu vještine primenjivanja procedura u rješavanju ovakvih tipova zadataka. Sem toga, studenti nastavničkih fakulteta bi trebalo i da razumiju te procedure. Niže su, radi sticanja uvida u istraživačke ciljeve na koje su autori ovog teksta bili fokusirani, izložena neka od pitanja na koje, u principu, direktno ili indirektno uvijek treba odgovoriti:

1. (a) Šta je cilj ove procedure?
   (b) Kakvu vrstu izlaznih podataka treba očekivati?
2. (a) Kako treba efektivno provesti proceduru?
   (b) Da li postoji neka druga procedura koja bi se mogla iskoristiti?
3. Zašto smatramo da je izabrana procdura ekektivna i validna?
4. Kojim konekcijama ili kontekstualnim karakteristikama mogu provjetiti rezultate koje sam dobio primjenjujući izabranu proceduru?
5. Koja je procedura 'najprikladnija' za dobijanje traženih informacija?
6. Kako se koristi izabrana procedura za dobijenje tih informacija?

Dakle, autori u ovom tekstu elaboriraju ustanovljene nivoe razumijevanja aritmetičkih i rano-algebarskih procedura svršenih srednjoškolaca i studfenata u rješavanju nelinearnih aritmetičkih i rano-algebarskih zadataka. Procjenjujemo da je sasvim opravdano postaviti pitanje osobama koje imaju uticaja na obrazovnu politiku: *Kakva su filozofsko-principijelna opredjeljenja naše društvene zajednice o ishodima nastave matematike u osnovnoškolskom i srednješkolskim obrazovnim sistemima*? Ili, možda, još ozbiljnije i teže pitanje: *Da li su ta opredjeljenja opšte definisana i koji su to mehanizmi koji bi obezbijedili njihovo efikasno sprovođenje?*

Autori se zahvaljuju recenzentima na sugestijama na korisnim sugestijama

LITERATURA

[1] M.Aigner and G.M.Ziegler: *Proofs form THE BOOK*, Springer, berlin 1998.
[2] B.Atweh, H.Forgasz and B.Nebres (eds): *Sociocultural Research on Mathematics education*; Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New Jersy and London 2001
[3] D.Ball: *The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education*. The Elementary School Journal, 90(1990), 449-466.
[4] J.Bay-Williams: *What is algebra in elementary school*? Teaching Children Mathematics, 8(2001), 196-200.
[5] Biehler, Scholz, Strässer & Winkelmann (Editors): *Didactics of mathematics as a scientific discipline*; MA: Kluwer, Norwell, 1994.
[6] M.Božić: *Pregled istorije i filozofije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2002.
[7] B.Boričić: *Ima beskonačno mnogo prostih brojeva*, Matematički list, XXXV (5)(2000), 3-4
[8] J.Cai and E.J.Knuth: *The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives*; ZDM 2005 Vol. 37 (1), 1- 4
[9] M.E.Chappell: *Preparing student to enter the gate*. Teaching Children Mathematics, 2(1997), 266-267.
[10] P.Christmas and J.Fey*: Communicating the importance of algebra to students*. In NCTM (Eds.), *Algebra for everyone*. (pp. 62-73). Reston, VA: NCTM 1990.
[11] J.Dindyal: *Algebraic Thinking in Geometry at High School Level: Students' Use of Variables and Unknowns*, MERGA Conference Proceedings 2004, 183-190
[12] L.D.English (ed.): *Handbook of International Research in Mathematics Education*; Routledge, New York and London 2008
[13] P.Ernest, B.Greer and B.Sriraman (eds.) *Critical Issues in Mathematics Education*; Information Age Publishing, Greenwich 2009.
[14] S.Goodchild and L.English (eds.): *Researching Mathematics Classrooms*; Information Age Publishing, Greenwich 2005.
[15] H.C.Hill, S.G.Schilling and D.L.Ball: *Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching*. Elementary School Journal, 105(2004), 11-30.
[16] S.Ibrahimpašić, B.Ibrahimpašić i D.A.Romano: *Argumentacija slutnje (formiranje hipoteze) o nivoima razumjevanja osnovnoškolske aritmetike i algebre studenata Pedagoškog fakulteta Univerziteta u Bihaću*, IMO, ISSN 1986-518X, Vol. II (2010), Broj 3, 3-14
[17] D.Muijs and D.Reynolds: *School effectiveness and teacher effectiveness in mathematics: Some preliminary findings from the evaluation of the mathematics enhancement program (primary)*. School Improvement, 11 (2000), 273-303.
[18] B.Reys and F.Fennell: *Who should lead instruction at the elementary level*? Teaching Children Mathematics*,* 9(2003)*,* 277-282.
[19] D.A.Romano: *Istraživanje matematičkog obrazovanja*; IMO, Vol. I (2009), 1-10
[20] D.A.Romano: *Šta je algebarsko mišljenje*; MAT-KOL (Banja Luka), XV(2)(2009), 19-29
[21] D.A.Romano: *Šta znamo o matematičkom mišljenju*? MAT-KOL (Banja Luka), Posebna izdanja, Broj 13(2010)
[22] D.A.Romano: *Kako (budući) učitelji razumiju algebarske generalizacije – jedno istraživanje o parnim i neparnim brojevima*; IMO, ISSN 1986-518X (o), Vol. II (2010), Broj 3, 27-32
[23] A.Sierpinska and J.Kilpatrick (eds): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*; Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston and London 1998.
[24] Z.Usiskin, K.Andersen and N.Yotto (eds.) *Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry*; Information Age Publishing, Greenwich 2010.
[25] M.Walshaw (ed.) *Mathematics education within the Postmodern*; Information Age Publishing, Greenwich 2004.