

# Matematičko modelovanje u matematičkom obrazovanju<sup>1</sup>

Zlatan Marković<sup>2</sup>

**Sažetak:** Ciljevi ovog teksta su pružanje kratkog pregleda trenutnog stanja matematičkog modelovanja u matematičkom obrazovanju i podučavanju. Sastoji se iz četiri dijela. U prvom dijelu, neki osnovni koncepti koji su bitni za temu će biti objašnjeni, a naročito, matematičko modelovanje će biti definisano u jasnom i širokom smislu. Drugi dio sadrži razloge zbog kojih se matematičko modelovanje uključuje u učenje u školama i na fakultetima. Treći dio opisuje ulogu modelovanja u današnjoj matematičkoj analizi i u svakodnevnom učenju i vježbanju. Neke prepreke za korištenje matematičkog modelovanja u učionicama će biti analizirane, kao i šanse i rizici korištenja računara u toj namjeri. U četvrtom dijelu, izabrani materijali i sredstva za učenje matematičkog modelovanja, razvijeni u poslednjih nekoliko godina u Americi, Australiji i Evropi, biće predstavljani. Primjeri će demonstrirati mnoge perspektivne pravce razvoja.

**Ključne riječi i fraze:** matematičko modelovanje, matematičko obrazovanje

**Abstract:** This paper aims at giving a concise survey of the present state-of-the-art of mathematical modelling in mathematics education and instruction. It will consist of four parts. In part 1, some basic concepts relevant to the topic will be clarified and, in particular, mathematical modelling will be defined in a broad, comprehensive sense. Part 2 will review arguments for the inclusion of modelling in mathematics teaching at schools and universities, and identify certain schools of thought within mathematics education. Part 3 will describe the role of modelling in present mathematics curricula and in everyday teaching practice. Some obstacles for mathematical modelling in the classroom will be analysed, as well as the opportunities and risks of computer usage. In part 4, selected materials and resources for teaching mathematical modelling, developed in the last few years in America, Australia and Europe, will be presented. The examples will demonstrate many promising directions of development.

**Key words and phrases:** mathematical modelling, mathematics education and instruction

**Mathematical Subject Classification (2010):** 97B50, 97D20, 97M20

**ZDM Subject Classification (2010):** B50, D40, D50, M10

## ŠTA JE MATEMATIČKO MODELOVANJE ?

Postoji onoliko definicija matematičkog modelovanja koliko i autora koji o njemu pišu, a i godišnji broj publikacija o modelovanju se neprekidno uvećava. Dozvolite da pomenem neke prethodne korisne knjige na engleskom jeziku koje se bave pitanjem šta modelovanje predstavlja: Blum, Niss i Huntley (1989), Celements (1989), Edwards i Hamson (1989), Huntley i Lames (1990), Murthy, Page i Rodin (1990), Starfield, Smith i Beloch (1990). Naravno, starije knjige kao što su Cross i Moscardini (1985) ili Giordano i Weir (1985) su takođe još uvijek korisne, kao što su i serije radova Internacionalne

---

<sup>1</sup> Tekst je malo preuređeni moj seminarski rad koji sam radio u okvirima nastavnog predmeta „Metodika matematičkog modelovanja“ školske 2010/11 godine na Pedagoškom fakultetu u Bijeljini, a predstavlja sublimaciju dostupne literature.

<sup>2</sup> Pedagoški fakultet Bijeljina, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara b.b., Bosna i Hercegovina,  
e-mail: zlatanmarkovic@hotmail.com

Konferencije za Učenje Modelovanja i Aplikacija (ICTMA): Berry et al (1984), Berry et al (1986, 1987), Blum et al (1989), Niss, Blum i Huntley (1991), de Lange et al (1993).

Dozvolite mi da citiram dobro poznati jednostavni model *prihvaćenog matematičkog rješavanja problema*.

Polazna tačka je *situacija* u stvarnom svijetu, tj. u ostatku svijeta van matematike. Situacija normalno mora biti pojednostavljena, strukturirana i mnogo preciznija od strane onog koji rješava problem, što dovodi do *stvarnog modela* situacije. Stvarni model nije – kao što mnogi često tumače – samo pojednostavljen već prava slika nekog dijela cilja.

Onda, ako je moguće (ako postoji neka matematika u njemu), stvarni model je *matematizovan*, preveden je u matematiku, što rezultuje *matematičkim modelom* originalne situacije. Ponekad, različiti modeli iste situacije mogu biti konstruisani.

Proces rješavanja problema se nastavlja izborom pogodnih metoda i radom u matematici, gdje se dobijaju određeni matematički rezultati. Oni moraju biti ponovo prevedeni u stvarni svijet – da bi bili predstavljeni u relaciji sa originalnom situacijom. U radu, onaj koji rješava problem takođe potvrđuje validnost matematičkog modela.

Ponekad, naročito u školskoj matematici, data situacija je samo vještačka tvorevina nekog čistog matematičkog problema. Tada proces izgradnje modela se sastoji jedino od rješavanja ovog problema, i proces rješavanja problema se zaustavlja posle samo jednog ciklusa. I pored toga, takvi vještački problemi mogu biti od izuzetne važnosti.

Termin matematičke aplikacije može biti iskorišten za različite dijelove ovog ciklusa. Situacije iz stvarnog svijeta se mogu zvati aplikacijama, korištenje matematike za istraživanje stvarnih situacija može se zvati dodjeljivanje matematici, tj. bilo koji način spajanja stvarnog svijeta sa matematikom može se smatrati kao matematička aplikacija. Jednako, termin matematičko modelovanje može značiti proces izgradnje modela, idući od stvarne situacije do matematičkog modela odnosno bilo koji način spajanja stvarnog.

### **ZA ŠTA JE MODELOVANJE DOBRO U IZUČAVANJU I PODUČAVANJU MATEMATIKE?**

U poslednjih 15 godina postoji trend širom svijeta ka modelovanju (u širem smislu) u matematičkom obrazovanju, na školskom i fakultetskom nivou. Danas, modelovanje je favorizovano od gotovo svega, kao što je rješavanje problema, aktivno učenje i druge prirodne aktivnosti (npr., pogledaj Cockcroft-ov Izvještaj u Velikoj Britaniji ili NCTM Preporuke u SAD-u). Postoje različiti razlozi za favorizovanje modelovanja u izučavanju matematike. Volio bih da napomenem ukratko četiri osnovna argumenta:

- *Pragmatični argumenti*. Matematičko obrazovanje nastoji da pomogne učenicima da razumiju i izađu na kraj sa stvarnim situacijama i problemima. Na osnovu toga, modelovanje je obavezno.
- *Formativni argumenti*. Izučavajući matematiku, učenici bi trebali – nadamo se – obezbjediti osnovne kvalifikacije (kao što su sposobnosti da napadnu probleme) ili ponašanja (kao što je otvorenost ka novim situacijama). Modelovanje je jedan od važnijih načina za usavršavanje ovoga.
- *Kulturološki argumenti*. Učenici bi trebali učiti matematičke pojmove i shvatati ih kao vid zabave u cilju stvaranja opširne i ibalansirane slike matematike kao nauke i dijela ljudske istorije i kulture. Modelovanje je ključna figura ljudskog intelekta isto kao i istorije i prakse, i kao takvo doprinosi ka promovisanju ovih aspekata.
- *Psihološki argumenti*. Matematički sadržaji mogu biti razlog motivisanja ili mogu biti učvršćeni preko odgovarajućih primjera modelovanja, a ovi mogu doprinjeti ka dubljem razumijevanju i dužem očuvanju matematičkih tema, ili mogu poboljšati pažnju učenika prema matematici.

Dozvolite mi da objasnim preciznije. U svim vremenima i mjestima postojale su pritužbe na nedostatak svijesti i odsustvo mišljenja u matematičkom obrazovanju i učenju. Učenici često doživljavaju matematiku kao mehaničku manipulaciju beznačajnih simbola. Modelovanje može doprinjeti davanju više smisla učenju matematike. Različite osobe i grupe postavljaju različite ciljeve za matematičko učenje, i

različite argumente za uključenje modelovanja. Prema tome, moguće je identifikovati izvjesne *škole znanja* u okviru matematičkog učenja. Kaiser Messmer (1991) razlikuje tri takve škole:

- Takozvana *pragmatična* škola, široko prihvaćena u engleskom govornom području, gdje su pragmatični ciljevi postavljeni u bekgroundu;
- Takozvana *naučno-humanistička* škola, široko prihvaćena u romanskom govornom području, gdje su kulturološki ciljevi akcentovani; i
- Takozvana *integrirana* škola, najviše rasprostranjena u njemačkom govornom području

Međutim, od 80-ih, postoji trend u domeni matematičkog obrazovanja širom svijeta usmjeren ka širenju spektra ciljeva i argumenata, tako da prihvata sve argumente kao važne. U svakom slučaju, dalje reklamiranje izgleda da nije potrebno, jer postoji koncenzus mišljenja u akademskoj zajednici matematičkog obrazovanja da modelovanje treba da bude važan dio matematičkih instrukcija. Kakava je stvarna situacija u matematičkoj analizi naročito u školskim i univerzitetskim učionicama? Ovdje, po mišljenju Wenera Bluma (sa *Mathematics Department, Kassel University, Germany*) veoma različite slike se prirodno pojavljuju.

### **Koja je uloga matematičkog modelovanja u nastavnim planovima i programima i u svakodnevnoj nastavnoj praksi?**

Kada se uzme u obzir modelovanje matematičkih nastavnih planova i programa, postoje razlike s obzirom na:

- ciljeve nastave matematike i odgovarajuće uloge modelovanja,
- raspon matematičkih tema sa sadržajem o modelovanju,
- područja iz kojih su primjeri modelovanja uzeti (nauka, privreda, svakodnevni život, sport i sl.),
- vrste primjera (globalno - lokalno, autentični - vještački, otvoreno - zatvoreno, relevantni - nevažni za studente, i slično)
- pristupi organizaciji matematičkog modelovanja i modelovanja komponenti nastavnog plana i programa (odvojeni, mješoviti, integrirani).

Globalno govoreći, postoji jasan svjetski trend, uključujući više modelovanja u matematičkim nastavnim planovima i programima, takođe - iako u manjoj mjeri - modelovanje u užem smislu. Neki današnji srednjoškolski programi, na primjer iz Holandije ili iz Viktorije u Australiji, uključuju obavezno modelovanje komponenti tokom cijelog trajanja.

U svakodnevnoj nastavnoj praksi, upotreba matematičkog modelovanja takođe je u porastu. Posebno standardni modeli - mali, dobro definisani primjeri koji se lako istraživaju i dobro se uklapaju s konvencionalnim nastavnim planovima i programima – su ušli u učionice. Međutim, još uvijek postoji značajan jaz između istraživanja i razvoja obrazovanja u matematici, sa jedne strane, i matematičkih instrukcija, s druge strane. U većini zemljama, modelovanje (u širem i, još više, u strogom smislu) još uvijek igra samo manju ulogu u svakodnevnoj nastavnoj praksi u školama i univerzitetima. Formalni proračuni prevladavaju, a aplikativni primjeri su tretirani samo kao ilustracije, i ne uzimaju se ozbiljno. Čak i kompetentni i posvećeni nastavnici često ne slijede sve one dobro utemeljene preporuke i prijedloge matematičkih učitelja. Zašto je to tako?

Mislim da to nije zbog kivnosti ili nekompetentnosti nastavnika, već zbog stvarnih prepreka i barijera. Dopustite mi da ukratko pomenem tri od njih.

- Prepreke s aspekta pogleda na nastavu te proces ocjenjivanja. Modelovanje zahtijeva puno vremena, a ne uklapa se ni u redovni nastavni plan matematike (koji je ionako preopterećen) niti u redovne škole ili univerzitetske organizacije (sa 45 minutnim lekcijama i slično). Modelovanje je teško procijeniti (vidi Niss, 1993), a što nije ispitano neće se uzeti za ozbiljno od strane studenata ili nastavnika.

- Prepreke iz studentskog ugla. Modelovanje čine matematičke lekcije sve zahtjevnijim, te ispiti su manje predvidljivi. Imamo dokaz o toj činjenici iz naše nedavne komparativne empirijske studije u Engleskoj i Njemačkoj (vidi Blum et al, 1992).

- Prepreke iz nastavničkog ugla. Modelovanje čini učenje više zahtjevnim, jer su potrebna dodatna ne-

matematička znanja i kvalifikacije, kao i sposobnost za upravljanje otvorenom situacijom u učionici. Dakle, učiteljska se uloga promijenila. Nadalje, nastavnici često ne poznaju dovoljno primjera modelovanja pogodnih za instrukcije, a i one koje imaju pri ruci moraju biti prilagođene za razred, za šta mnogo dodatnog napora mora biti uloženo.

Neko bi mogao pomisliti da je zapravo četvrta prepreka, da ne postoji dovoljan broj primjera za modelovanje i materijala pogodnih za nastavu. Uvjeran sam da to nije istina. Za gotovo svako matematičko područje i temu postoji bogatstvo primjera o modelovanju svih vrsta, u udžbenicima, zbirka, nastavnim jedinicama, knjigama ili člancima, i u principu sve je dostupno nastavnicima. Prema mojim opažanjima, situacija u razredu je u procesu poboljšanja. U zemljama širom svijeta, nastavnici u školama, koledžima i univerzitetima postaju sve više i više svjesni nedostataka i pokušavaju dovesti do promjene u željenim smjerovima - prema širem spektru ciljeva, prema više aplikacija, prema više autentičnih primjera, prema više otvorenih problema, i tako dalje. Stoga postoji jasan trend prema smanjenju jaza spomenutog ranije, iako s velikim razlikama između različitih zemalja. Uvjeran sam, ipak, da su barijere za modelovanje vrlo teško savladive. Vidim dvije stvari koje prvenstveno treba obaviti. Prvo, da se pokrene svaka vrsta aktivnosti obrazovanja nastavnika, u cilju snadbjevanja što je moguće više učitelja sa znanjem, sposobnostima i, posebno, sa stavovima da se nose s zahtjevima nastave modelovanja - do sada, postoji vrlo malo izvještaja o iskustvima modelovanja u obrazovanju učitelja. Drugo, da se razvije odgovarajući način ocjenjivanja. Ovdje možemo puno naučiti iz holandskih i australskih materijala i iz njihovih iskustava, i dobrih i loših. Sve ove vrste aktivnosti u suštini moraju se odvijati od strane samih nastavnika. Ima neke nade da će se situacija u učionicama matematike poboljšati posebno kroz povećanje raspoloživosti moćnih računara. Bez sumnje, nove mogućnosti su se pojavile za izradu sadržaja dostupnog za učenike. To ima očigledne posljedice za matematičko modelovanje. Zapravo, postoji trend produženog korišćenja računara u matematičkoj nastavi. Međutim, mi ne bi trebali očekivati previše. Prvo, upravo pomenute prepreke ostaju u većoj mjeri nedirnute prisutnošću računara; naprotiv, od učenika i nastavnika se zahtijeva još više kvalifikacija i veći stepen sposobnosti. Drugo, računari mogu imati mnoge vrste novih problema i rizika - na primjer, studenti mogu pokušati zamijeniti potreban intelektualni napor sa modelovanjem pukim pritiskom na dugme. Treće, postoje i postojaće organizacijski problemi s dostupnošću personalnih računara.

### **Koji materijali su dostupni za nastavu matematičkog modelovanja?**

Što se tiče starijih izvora, oslanjam se na istraživanja iz Internacionalnog kongresa o Matematičkom obrazovanju (ICME): Pollak (1979), Bell (1983), Niss (1987), Blum i Niss (1991).

U posljednjih nekoliko godina, razvijeno je mnogo zanimljivih novih materijala. Dozvolite mi da prezentujem mali, subjektivni izbor, koncentrišući se na srednjoškolski nivo.

#### *Iz Australije*

- Dvije knjižice od strane Carr i Galbraith (1987, 1991) sa PAM projekta, s detaljnim primjerima i nastavne jedinice za niži-srednji nivo, pokrivaju širok raspon ekstra- i intra-matematičkih subjekata. Dva izdanja od Lovitt i Clarke (1988), velika zbirka sa detaljnim primjerima za osnovne i srednje škole, orijentisana prema studentskim aktivnostima.

- Dvije knjige od Lowe (1988, 1991), s brojnim detaljnim primjerima za razrede 7-12, pokriva širok raspon tema, uglavnom se odnosi na računare kao alat. U Australiji, postoji i mnogo napora prema novim načinima za procjenu modelovanje- orijentisanim nastavnim programima (vidi, na primjer, Clatworthy i Galbraith, 1991).

#### *Iz Holandije*

- Institut Freudenthal (prije 1991 poznat kao SO & OC) u Utrechtu Univerzitet je razvio puno materijala, uključujući udžbenike, za sve razrede u školi: primarni (Wiskobas projekat od Treffers-a et al), gornje-sekundarne (Hewet projeakt od de Lange-a et al), a u novije vrijeme takođe niže srednje. Mnogi materijali su objavljeni na engleskom jeziku, posebno u vezi s Madison projektom (vidi de Lange, 1992). Svi materijali su strukturisani prema matematičkim temama, a primjeri modelovanja su namijenjeni

za podršku učenju matematike.

#### *Iz Velike Britanije*

- Nekoliko brošura i materijala iz projekta „Računanje kroz rješavanje problema“, razvijenih u Shell centru za matematičko obrazovanje na univerzitetu Nottingham (od Burkhardt et al).

- Sveobuhvatni matematički kurs iz Centra za inovacije u odsjeku za matematiku na univerzitetu Exeter (od Burghes-a et al). Oba i Shell i CIMT materijali su pisani za niži-srednji nivo, i oba su strukturisana prema problemima, a ne prema matematici, s ciljem podsticanja aktivnosti studenata.

- Serija brošura za A-nivo od Spode Grupe (1992), s detaljnim primjerima za direktnu upotrebu u učionici.

- Ja takođe ističem još jednom knjige koje sam spomenuo na početku ovog papira, sve sadrže mnoge studije slučaja, uglavnom na tercijarnom nivou.

#### *Iz SAD-a*

- Dvije serije knjiga s brojnim primjerima iz modelovanja iz Konzorcijuma za matematiku i njene rimjene (uključujući Garfunkel, Aragon, Malkevitch et al) su HIMAP moduli (1985-1992) za sekundarni nivo i MAP moduli (1981-1992) za tercijarne i više-sekundarne nivoe. - Knjiga od Garfunkel i Steen (1991), uvod u posljednje matematičke primjene u praksi, posebno u vezi s računarima, pogodno na sekundarnom i tercijarnom nivou, s nekim matematičkim temama što su još uvijek izvan trenutnih programa.

-Niz aplikativno-orijentisanih udžbenika (1989-92) sa Univerziteta u Čikagu Školski matematički projekat (uključujući Usiskin-a, Bell-a et al), pokrivaju aritmetiku, algebru, geometriju, statistiku i diskretnu matematiku.

- Od NCTM uvod u studije matematike (1988), razvijen od strane Škole nauke i matematike Sjeverene Karoline (Teague et al), te brošuru od Swetz-a i Hartzler-a (1991) s primjerima za modelovanje za sekundarni nivo, usmjerene na aktivnosti studenata.

#### *Iz Njemačke*

- Projekt MUED (MatheInatik-Unterrichtseinheiten-Datei uključuju Boer-a, Volk-a et al) je razvio nekoliko detaljnih globalnih nastavnih jedinica ciljajući na sposobnosti učenika da djeluju kompetentno u stvarnim životnim situacijama. Dva primjera za niže-srednje škole su Boer (1990) i Jannack (1992).

- Nekoliko projekata na univerzitetskom nivou rade s realnim koristima matematike u industriji, te njihovim korišćenjem u obuci budućih matematičara ili nastavnika matematike. Primjer su studije slučaja u Knauer (1992).

Mnogo više referenci za literaturu za srednji nivo na njemačkom, engleskom i francuskom jeziku, sadržano je u opsežnoj bibliografiji od strane Kaiser-Messmer, Blum i Schober (1982/1992).Sve u svemu, ovi primjeri pokazuju obećavajuće mnogo smjerova razvoja iz raznih dijelova svijeta.

- Primjena aplikativno-orijentisanih matematičkih nastavnih planova i programa na širem nivou u Holandiji.

- Kolekcije slučaja za nove modelovanje-orijentisane nastavne planove i programe iz matematike, uključujući i procjenu, u Australiji.

- Primjeri aktivnosti-usmjerenih globalnih problem-sekvenci u Engleskoj.

- Materijali za novo usmjerenje matematičkih nastavnih programa u računarskom dobu u SAD-u.

- Aplikativno-orijentisane nastavne jedinice kao alternativa konvencionalnim učenjima matematike u Njemačkoj.

### **Matematičko modelovanje u obrazovanju predavača – iskustva sa seminarima o modelovanju**

U ovom odlomku govoriću o seminaru o modelovanju za četvrtu godinu studija univerziteta. Između ostalog, učenici će pisati „dnevnik učenja“ tokom cijelog semestra. Ovo će kao rezultat dati interesantan uvid u proces učenja modelovanja, njihov napredak i njihove probleme tokom semestra, kao i njihovim razmatranjima o podučavanju modelovanja. Iako je matematičko modelovanje obavezan dio matematičkog

plana i programa u Njemačkoj i jedna od glavnih kompetencija u sklopu nacionalnog Obrazovnog standarda, nije garantovano da će učenicima predavati predavači koji imaju solidno znanje modelovanja. Jedan od razloga za to je činjenica da modelovanje nije predavano na kursovima za obuku predavača na Univerzitetu, zato što modeliranje nije eksplicitno sadržano u nastavnom planu i programu za buduće predavače matematike u Njemačkoj. Međutim, nema sumnje (videti, na primer, dr Kraus 2008.) da predavači treba da budu stručnjaci u sopstvenom modelovanju kako bi mogli efikasno da predaju studentima, te da njihovo razmišljanje treba da bude oblikovano u pravcu stvaranja bogatog okruženja učionica, što bi omogućavalo studentima da se aktivno uključe u modelovanje (Chapman 2007).

U poslednjih nekoliko godina, mnogo empirijskih studija se bavilo pitanjem kako se modelovanje može predavati u školi (vidi, na primer, Maass 2007 ili Blum i Leiss 2007) ili o tome kako kod studenta univerziteta stvoriti osjećaj za modelovanje kroz složene zadatke (vidi Lingefjaerd & Holmkuist 2007, Blomhoj i Kjeldsen 2007 ili Švarc i Kajzer 2007). Rezultati ovih istraživanja otvorili su nove načine razmišljanja o modelovanju, kao i način na koji se može integrisati u školske matematike na profitabilan način. Međutim, pitanje kako se ovi aspekti mogu integrisati u obrazovanje predavača i dalje ostaje otvoreno. Dva glavna pitanja su:

1. Kako da budući predavači budu pripremljeni za univerzitetske programe za nastavu modeliranja u školi, koji su sadržaji i koje metode prikladne?

2. Kako se proces učenja i razumijevanja učenika razvija tokom takvih kurseva, koje su njihove glavne teškoće i probleme, i kako pratiti napredak?

U ovom radu govoriću o takvom seminaru o modelovanju koji je predavao autor na Univerzitetu u Hamburgu i, sa sličnim karakteristikama, autor na Univerzitetu u Kaselu, gdje ću pokušati da se pozabavim sa ova dva pitanja. Njihov osnovni princip za koncepciju ovog seminara je bio: Ako želimo da naši studenti predaju modeliranje na odgovarajući način (sa podudaranjem između sadržaja i metoda, kognitivnog aktiviranja učenika, sa osvrtom na učenje i integraciju sumativne procjene), mi smo kao predavači morali da osmislimo sopstveno predavanje na isti način (podudaranje između sadržaja i metoda, kognitivnog aktiviranja, uvida, sumativne procjene).

## KONCEPCIJA, CILJEVI, SADRŽAJ I STRUKTURA SEMINARA

Glavnu osnovu za njihovu prikupljenu bazu podataka je seminar modelovanja za studente na njihovoj četvrtoj godini studija na Univerzitetu u Hamburgu. Na ovom kursu je učestvovalo ukupno 25 budućih nastavnika iz svih školskih nivoa, uključujući nastavnike za učenike sa posebnim potrebama. (Iskustva autora sa drugih seminara modelovanja su pokazala da ova vrsta mešavine pravi dobru osnovu za diskusije i da je važna za tvrdnju da je modelovanje pogodno za sve vrste školskih nivoa i vrsta). Kurs je držan jednom nedeljno po 90 minuta tokom jednog semestra, što znači 14 časova ukupno. Prema značenju termina "Univerzitetski Seminar", od studenata se očekivalo da se aktivno uključe u sve aktivnosti, kao i da pokriju veliki dio kursa sopstvenim prezentacijama. U sledećem tekstu ću opisati preciznije koncepciju ovog seminara i način na koji su studenti posmatrani tokom semestra. Matematičko modelovanje kao predmet u obrazovanju nastavnika moglo bi, naravno, biti strukturisano na mnogo različitih načina, zato što je modelovanje ogromno polje i sadrži puno važnih aspekata (vidi Blum i Sar 2007.). U njihovim razmatranjima za planiranje i strukturisanje seminara o modelovanju na novi način, sadržaj i metode treba da odgovaraju jedni drugima. Ovo je i izazov za predavače. Što se tiče sadržaja, smatrali su sljedeće nadležnosti u pogledu modelovanja kao posebno važne:

(1) Teorijske kompetencije (znanja o ciklusima modelovanja, ciljeve / perspektive za modelovanje, te vrste zadataka za modelovanje)

(2) Kompetentnost zadataka (sposobnost da se rješavaju, analiziraju i kreiraju zadaci modelovanja)

(3) Nastava kompetencija (sposobnost da planiramo i izvršimo časove modelovanja i sposobnost odgovarajuće intervencije u toku procesa učeničkog modelovanja)

(4) Kompetenciju dijagnoze (sposobnost da se identifikuju faze procesa učeničkog modelovanja, te dijagnoza učeničkog problema tokom ovih procesa)

Nisu uključili "Procenu kompetentnosti" (to je sposobnost izgradnje i markiranja odgovarajućih testova za modelovanje). Ova nadležnost je, naravno, veoma važna za stručnost nastavnika, ali je ne treba, po njihovom mišljenju, očekivati od studenata koji nemaju dovoljno iskustva u proceni.

Ove četiri nadležnosti su bile osnova za strukturu seminara. Seminar je bio podjeljen u pet djelova u sledećem redosledu da bi imali odgovarajuću ravnotežu između više teorijske i više praktične faze:

Dio 1 (teorija): Teorijska pozadina oko modelovanja (3 lekcije)

Dio 2 (praksa): Rešavanje i stvaranje problema modelovanja (3 lekcije)

Dio 3 (teorija i praksa): (1) Studenti analiziraju prepise rada učenika na modelovanju problema, (2) Šta su nadležnosti modelovanja; \* (3) Vrste intervencija nastavnika tokom modelovanja, (4) Metode predavanja modelovanja u školi (4 lekcije)

Dio 4 (prezentacije): Grupe studenata predstavljaju svoje zadatke modelovanja i na koji način su učenici u školi rešili ove zadatke. (3 lekcije)

Dio 5: Poslednja lekcija - odraz cijelog rada tokom semestra.

\* Na kraju ovog dijela se nalazila srednja ocjena seminara na osnovu upitnika.

Jedan važan cilj seminara je bio da studenti ne samo rešavaju ili da formulišu zadatke modelovanja, već i da nauče metode kako mogu predavati modelovanje. Za njih kao predavače činilo se važno ne samo da kažu koje metode mogu biti korisne, već i da ih direktno integrišu u rad na seminaru. Odlučili su se za strategiju nastave iz oblasti "kooperativno učenje" (vidi npr Džonson i Džonson 1999, Kagan 1990), zato što je prvi autor imao dobra iskustva korišćenja ovog sistema tokom predavanja modelovanja u školi. Njihovo mišljenje je da se modelovanje, kao sadržaj, i kooperativno učenje, kao strategija učenja, uklapaju vrlo dobro i na seminarima univerziteta. Istraživanje je pokazalo (vidi Johnson & Johnson 1995) da kooperativne tehnike učenja studenata promovišu učenje i školsko dostignuće, povećava zadržavanje studenata, poboljšavaju zadovoljstvo studenata iskustvom učenja, pomažu razvoj vještine usmene komunikacije studenata, razvijanje socijalnih vještina studenata, i promovišu samopoštovanje studenata. Nekoliko studija na temu modelovanja su pokazale da je modelovanje bolje predavati kao grupu aktivnosti (Ikeda, Stivens i Matsuzaki 2007), takođe i zbog toga što ovaj način podržava diskusije o matematici ili ekstra-matematičkim aspektima, poboljšava argumentaciju itd. Zato su u prvoj lekciji seminara studenti morali da izgrade takozvane "osnove grupe" od pet ljudi koji su trebali da rade zajedno tokom cijelog semestra; potrebno je šest takvih grupa. Međutim, rad u grupama je samo pod određenim uslovima produktivniji nego konkurentni i individualistički napori. Ovi uslovi su (Kagan 1990): Pozitivna međuzavisnost, licem-u-lice-Interakcija, pojedinačna i grupna odgovornost, međuljudske veštine u malim grupama i Grupna obrada. Morali su voditi računa da sve grupne aktivnosti ispunjavaju ove uslove. Kombinovali su ove aktivnosti sa dijelovima seminara:

Dio 1: studenti su morali da posjeduju znanje o različitim pravcima u diskusiji o modelovanju i različitim ciklusima modelovanja (vidi npr Kajzer, Sriraman & Blomhøj 2006 i Borromeo Feri 2006 - literatura koja je bila posvećena studentima). Oni su naučili sledeći sadržaj sa aktivnostima "Slagalice": Svakom članu grupe je dodjeljen neki određeni materijal za učenje, a kasnije i zadatak da predaje članovima svoje grupe (u ovom slučaju svaki student je imao jedan smjer modelovanja kao svoju posebnu temu, npr realističko modeliranje, a u drugom krugu jednu verziju ciklusa modela). Studenti sa istom temom su zajedno radili u "stručnim grupama", tako da je osnovna grupa podjeljena. Nakon rada u ovim ekspertskim grupama, originalne osnovne grupe su ponovo formirane i studenti uče jedni od drugih. Na kraju ovog dijela studenti su uglavnom sadržaj naučili sami. To je, naravno, od značaja za studente koji takođe mogu pitati sve vrste pitanja, naročito u prethodnoj lekciji ovog dijela, tako da su predavači odražavali i teoriju i aktivnosti slagalice.

Dio 2 je počeo sa pitanjem "Šta je dobro modelovanje zadatka?" Za to su koristili aktivnost "Misli-upari-podeli". Ovo uključuje tri koraka kooperativne strukture. Tokom prvog koraka, pojedinci u tišini razmišljaju o pitanju koje daje instruktor. Pojedinci su upareni tokom drugog koraka i razmjenjuju svoje misli. U trećem koraku, parovi dijele njihove odgovore sa cijelom grupom. Nakon toga, osnovna grupa je rješila zadatak modelovanja: "punjenje" ("Tanken", vidi Blum / Leiss 2007). Radi boljeg razumevanja pokazali su studentima mogući proces rješenja putem sedam koraka ciklusa modelovanja koji oni sami koriste u njihovom radu (Blum i Leiss 2007, Borromeo Feri 2007), u cilju da im pomognu da razumiju koji dio njihovog rješenja se može smatrati kao pravi model ili matematički model, i tako dalje. Šest grupa

je tada imalo vrijeme za razmjenu ideja za sopstveno modelovanje zadataka koji su morali da izgrade i da testiraju u školi. Za taj "kreativni deo" koristili smo metod "RoundRobin brainstorming": Jedna osoba iz svake grupe je bila imenovana za snimatelja postupka. Postavljeno je pitanje ili ideja sa mnogo odgovora, a studentima je dato određeno vreme da razmisle o odgovorima. Posle "vremena za razmišljanje", članovi tima su podijelili odgovore. Osoba zadužena za snimanje je zapisala različite odgovore članova grupe. Osoba pored „snimatelja“ počinje, te jedna osoba za drugom iz grupe daje odgovor sve do isteka vremena. Na kraju ovog dijela, grupe su završile sa kreiranjem svojih zadataka modelovanja i naučile kako mogu da analiziraju problem. Slično prvom dijelu, raspravljali smo pitanja i razmatrali metode koje se koriste za potencijalnu upotrebu u školi.

Dio 3 sadrži mnogo zanimljivih aspekata modelovanja. Tako smo započeli razmatranje svakog aspekta sa kratkim teorijskim ulazom, a zatim su studenti imali svoje aktivnosti. Što se tiče aspekta (1), osnovne grupe su radile na prepisima procesa rješavanja zadataka modelovanja učenika zvanog "Svetionik", a imali su i diskusiju nakon toga, posebno o razlici faza tokom modelovanja. Prije nego što su počeli sa ulazom za njihov aspekt (2), koristili su metodu "tihi razgovor pisanjem". Svaka grupa je dobila veliki list papira. U sredini papira su trebali da pišu "Kompetencije modeliranja". Studenti su morali da urade brainstorming o tome koje kompetencije modeliranja mogu biti, ali bez komentara. Zato su morali da komentarišu proizvode ostalih članova grupe, takođe, pismenim putem. Nakon toga su dali informacije o kompetencijama modelovanja, te zatim imali plenarnu diskusiju, uglavnom o tome kako predavači mogu da podrže kompetencije modelovanja i kako mogu da ih procene u školi. Kao i ranije, počeli su aspekt (3) sa aktivnostima, ovaj put "Unutar-Spolja-krug" prije nego što su dali teorijski ulaz o značenju "intervencije" i "samo-regulativno učenje". Djelatnost "Unutar-Spolja-krug" slijedi princip da su svi učenici integrisani u procesu učenja. Oni u unutrašnjem krugu gledaju u spoljni, i obrnuto. Zatim je cijeloj grupi postavljeno pitanje: "Šta mislite da predavač mora da zna za predavanje modelovanja, kako bi mogao da interveniše na odgovarajući način u slučaju problema studenata?" Studenti su se držali suprotno jedni od drugih i raspravljali o ovom pitanju u parovima. Nakon pet minuta, spoljni krug je nastavio dalje i studenti su u novim parovima razmenili mišljenja. Isto je urađeno i sa drugim pitanjem, čime se bavi aspekt (4): "Šta mislite koje su dobre ili loše metode za nastavu modelovanja?" Zatvorili su ovu lekciju sa diskusijom i razmišljanjem o pet aktivnosti kooperativnog učenja koje su imali do sada tokom seminara, kao i kako se oni uklapaju u sadržaj seminara. Istovremeno, ovo je trebalo da bude podsticaj za razmišljanje na različitim nivoima: 1. studenti su morali da razmisle o svakoj od metoda i o predavanju istih u školi u vezi sa modelovanjem; 2. Oni, kao predavači, su morali da se pitaju da li su izabrane aktivnosti korisne za predavanje sadržaja seminara.

U dijelu 4, sve grupe su predstavile svoje zadatke modelovanja i njihova iskustva koja su, u međuvremenu, skupili u školi. Zbog učešća budućih predavača na svim školskim nivoima, takođe su predstavljena iskustva od osnovnih do srednjih škola. Finalni dio 5 je zaokružio seminar pregledom svih aspekata.

Uzimajući u obzir ranije koncepcije seminara, predavači želeli su da znaju da li su se studenti osećali dovoljno dobro pripremljeni za predavanje modelovanja u školi. Takođe su bili zainteresovani za pojedinačne procese učenja i razumjevanja studenata, kao i kako su se razvijali tokom takvog kursa, kao i o njihovim glavnim problemima i teškoćama.

## **METODE ANALIZA PROCESA UČENJA**

Uvid je bio veliki problem za studente na seminaru, jer razmišljanje o sopstvenim akcijama uglavnom produbljuje razumjevanje. Da bi dobili uvid u razmišljanje i proces učenja, studenti su morali da pišu "dnevnik učenja" (vidi npr Gallin i Ruf 1990). Jedan od važnih ciljeva dnevnika učenja je bilježenje individualnog procesa učenja. Ono takođe pomaže stabilizaciji kompetencija povezanih sa sadržajem. Za ciljeve njihovih istraživačkih studija, "Dnevnik učenja" je adekvatan instrument za podsticanje uvida o sopstvenom procesu učenja studenta tokom dugog vremena. Intervjui bi mogli biti alternativa, ali ne za kompletan seminar. Organizacija dnevnika učenja uglavnom izgleda ovako: upisati datum, temu lekcije i aktivnosti; napisati zašto ste morali da odradite aktivnosti; retrospektiva urađenog i razmišljanje o tome



gde se nalazite u procesu učenja. Studenti na seminaru morali su da to urade na sličan način kao i na temu procesa učenja modelovanja. U poslednjih pet minuta svake lekcije, studenti su imali vremena za pisanje svojih razmišljanja u svoje dnevnik učenja. Na kraju semestra, svi dnevnik su prikupljeni da bi bili analizirani u pogledu shvatanja i problema koji se odnose na a) različite dijelova sadržaja, b) metode, c) način na koji je seminar predavan, i d) vlastite uvide učenika o nastavi i učenju modelovanja u školi. Iz tog razloga predavači su kodirali (Štraus / Corba 1990) i kategorizovali izjave studenata u skladu sa ova četiri aspekta kako bi dobili pregled i pronašli obrasce. Pored toga, analiziran je i svaki dnevnik da bi se dobili nagoveštaji u pogledu procesa učenja pojedinaca.

## REZULTATI

Većina studenata je znala iz njihovog prvog semestra malo o modeliranju i šta to znači, ali to je samo mali dio predavanja. Dakle, 18 od 21 studenata je napisalo u svojim razmišljanjima, nakon prvog časa, da nisu znali da je modelovanje tako veliko polje. *"U ovoj lekciji sam dobio prvi uvid u temu "modelovanje". Postalo mi je jasno da je ova tema veoma široka i da ne postoji samo modelovanje ciklusa još tokom prvog semestra" (Katrin, 2. aprila 2008).*

Očekivano, prvi dio nije bio lak za studente. Razlikovanje različitih pravaca, kao i različitih modela ciklusa, je bio veliki zahtjev za njih, što i analize jasno pokazuju. Ali, metoda slagalice je korisna strategija za studente kako bi pomogli jedni drugima i kako bi im sadržaj postao jasan. U svakom slučaju, studenti su osećali da je jak teorijski dio bio od pomoći kako bi stekli odgovarajuće predznanje. *"Ponekad nije bilo lako razumjeti jedan pravac modelovanja u stručnim grupama, zbog kratkoće teksta. Međutim, ovaj metod [Slagalice] je savršen! Svaka od Grupa ima da objasni nešto, tako da smo razgovarali dok nisam bolje shvatila." (Svetlana, 9. april 2008)*

Napredak u procesu učenja studenata može biti rekonstruisan u delu 2. Svi studenti su pokazali da su konačno razumeli sedam koraka ciklusa modelovanja kroz modelovanje zadatka "Tanken" koji smo im detaljno predstavili nakon što su rešili ovaj problem. Pored toga, oni su smatrali da će im pozadina iz dijela 1 pomoći da kreiraju sopstvene zadatke modeliranja, tako da je za njih teorija i praksa ovde povezana. *"Polako sam bolje razumjevaao ciklus modelovanja. Rad sa "Tanken"-zadatkom pomogao mi je u razlikovanju nekoliko koraka ciklusa modelovanja." (Aleksandar, 16. april 2008.)*

Pri analizi razmišljanja o dijelu 2 je postalo jasno da je stvaranje modela zadataka podjednako važno za učenje i razumjevanje modelovanja i rješavanje problema modelovanja. Studenti su morali da misle koji je nivo škole u kojima su hteli da testiraju problem, koliko složen zadatak treba da bude, koliko je vremena učenicima potrebno, i tako dalje. Za njih je bio koristan metod koji se koristi u ovom kontekstu. *"Bilo je dobro to što smo kreirali sopstvene zadatke modelovanja u našoj osnovnoj grupi. Ipak, shvatamo da će to biti težak poduhvat. Ali, metod RoundRobin je veoma adekvatan za dobijanje korisnih predloga iz drugih osnovnih grupa" (Ana, 23. april 2008.)*

Tri lekcije dijela 2 su još jednom bile veza između teorije i prakse za studente, i napredak u procesu razumevanja može biti rekonstruisan, posebno u pogledu modelovanja ciklusa. Pored toga, morali su da se bave pitanjem autentičnosti i složenosti tokom stvaranja sopstvenih zadataka modeliranja. Studenti su suočeni sa mnogo aspekata modelovanja u dijelu 3, kao što je prethodno već opisano. Nemamo prostora da idemo još detaljnije, ali pokušavamo da sumiramo važne tačke. Analiza prepisa procese modelovanja učenika sa aspekta (1) je bila korisna za studente kako bi razlikovali nekoliko faza modelovanja. *"Prepisi učenika pomogli su mi u nekom dijelu u razlikovanju više koraka modelovanja" (Heidi, 7. maja 2008).* Početni aspekt (3) sa metodom Unutar-Spolja-krug je za sve studente dobar početak na temu intervencija predavača. Većina studenata počela je da razmišlja više o sebi kao ličnosti predavača i volela bi da ima više vremena za tu temu. *"Mislim da, nakon rasprave u Unutar-Spolja-krug, predavač mora biti dobro pripremljen kada ima problem modelovanja za svoju lekciju, jer on mora da analizira i dijagnostizira brzo svojim učenicima kako bi im pomogao" (Karolin 21. maja 2008).*

Odras metoda (aspekt 4) je bio veoma konstruktivan, jer su studenti naučili sopstvene metode tokom seminara, te su mogli da odluče o prednostima i manama. Svi studenti su se složili i da ove metode mogu biti integrisane tokom nastave modelovanja, ali moraju biti praktične. *"Dobro je da učimo ne samo*

*modeliranje kao predmet u ovom seminaru, već i metode kako možemo to predavati u školama"*(Katja 28. maja 2008)!

Testiranje zadataka modelovanja u školi, a zatim predstavljanje rezultata u dijelu 4, je posebno značajno za procese učenja učenika. S obzirom na to da su procesi razumjevanja učenika u vezi sa modelovanjem dijelom obrađeni u dijelu 3 zbog raznovrsnosti aspekata, dio 4 je ostao za napredne studente. Razmišljanja pokazuju da su studenti naučili i razumili više o tome šta modelovanje znaci na teorijskom nivou, kao i kako ga predavati. *"Danas smo moja grupa i ja imali svoju prezentaciju. Mislim da je dobro! [...] Sve u svemu testiranje je bilo korisno za mene kao predavača jer sam mogao da vidim gdje učenici imaju probleme tokom modelovanja. Takođe, da biste dobili samosvijest tokom hodanja između malih nivoa intervencije i rezervisanosti je bilo važno za mene. Osim toga, to mi je pokazalo da zadatak mora biti formulisan precizno da omogući dovoljno vremena".* (Bendžamin 4. juna 2008)  
*"Ispitivanje zadataka modelovanja u petim razredima je bilo važno i korisno za moje razumjevanje modelovanja, kao i za praktične transformacije u školi. [...] Bilo je dobro imati šansu za testiranje problema modelovanja u školi"*(Birgit 18. juna 2008).

### **Rezime rezultata**

Sumirao sam ove rezultate u vezi sa dva pitanja sa početka. Prvo sam se pitao kako predavači mogu biti pripremljeni na univerzitetskim programima za nastavu na temu modelovanja u školama, koji sadržaji i koje metode su prikladne. Na osnovu ovog iskustva, siguran sam da ravnoteža između teorije i prakse mora biti data. Obje treba da budu povezane pomoću odgovarajućih nastavnih strategija, što se mora odraziti na seminaru. Naravno, sadržaj tih seminara može da varira, ali, prema ovim iskustvima, sledeći sadržaji su pogodni za ovakav seminar (vidi kompetencije navedene na početku): (1) Znanje oko ciklusa modelovanja, ciljeva / perspektive i vrste zadataka, (2) rješavanje, stvaranje i analiza modelovanja zadataka; (3) planiranje i vježbanje lekcija modelovanja, (4) Dijagnostikovanje stvarnog procesa modelovanja učenika.

Drugo: pitao sam kako se napredak studenata u učenju i razumjevanju može razviti tokom takvih kurseva, koji su glavni problemi, kao i kako se napredak može posmatrati. Na osnovu ovoga zaključio sam da studenti moraju da pišu dnevnik učenja kako bi predavačima pomogli u odgovorima na to pitanje u kombinaciji sa ocjenom seminara. To su bili osnovni problemi studenata: razumjevanje nekoliko pravaca modelovanja i razlike između ciklusa modelovanja u literaturi, razlikovanje faza ciklusa modelovanja uopšte, kao i analiza prepisa procesa modelovanja učenika; analiza problema modelovanja, i ,na kraju, pitanje autentičnosti pri pravljenju problema. Napredak studenata u vezi sa ovim teškoćama može biti rekonstruisan uglavnom kada, pragmatično govoreći, su teorija i praksa povezane. Revizija razvoja u toku seminara je pomogla studentima, bez sumnje, na putu ka postanku kompetentnog predavača matematike.

Na kraju, želim da naglasim još jednom neophodnost da studenti univerziteta koji treba da postanu predavači matematike moraju imati ogromne mogućnosti da se bave matematičkim modelovanjem i na teorijskom i na praktičnom nivou, uključujući i iskustva sa modelovanjem u školi. Ovo će doprinijeti ne samo pripremi da budu kompetentni kao nastavnici matematičkog modelovanja, već i daljem razvoju svoga razumjevanja matematičkih predmeta i matematike kao discipline (Lingefjaerd 2007).

## **MATEMATIČKO MODELOVANJE I PARALELNE DISKUSIJE**

U ovom radu sam obratio pažnju na one studentske rasprave koje ne igraju ulogu u izgradnji matematičkih modela. Koristeći kvalitativne podatke iz situacije u učionici, ja preuzima ideju paralelnih rasprava o njima i analiziram njihovu prirodu.

### **Matematičko modelovanje i vježbe učenika, Vidovi modelovanja**

Prema onome što je objašnjeno u Barbosa (2003), ja ću definisati modelovanje kao učenje u sredini u kojoj su studenti pozvani da pitaju ili istražuju situacije koje se odnose na stvarnost kroz matematiku. Bilo

koji matematički prikaz ovih situacija naziva se matematički model. Da bi bilo koja vježba bila definisana kao modelovanje potrebno je da bude problem za studente, tako reći, da oni nemaju prethodnu shemu, i imaju osvrst u stvarnost.

Modelovanje u školi može imati različite karakteristike prema ciljevima vježbe. Nedavno, Kaiser i Sriraman (2006) karakterisali su mnoge poglede u ovoj oblasti. Iako moj cilj nije raspravljati o njima u ovom radu, važno je istaknuti da različiti pogledi stvaraju različite istraživačke programe. Jedan od pogleda kojeg su posmatrali Kaiser i Sriraman (2006) je društveno-kritički, okarakterisana je u Barbosa (2003, 2006a), koje se odnosi na modelovanje kao priliku za studente da razmotre ulogu matematike u društvu i prirodu matematičkih modela.

### **Sadržaj za analize studentskih vježbi**

Neću širiti raspravu o pojmu vježbe. U ovom trenutku, ja ću samo to definisati kao individualno azvijanje radnje, koje ima svoj smisao u kontekstu iz kojeg je nastao. Temeljna pretpostavka koja je ovdje usvojena je da ljudsko djelovanje je povezano s kulturnim, institucionalnim i istorijskim kontekstima (Lerman, 2001; Wertsch, 1993, 1998). Prema onome što Wertsch (1993) objašnjava, "Društveni kulturni pristup na koji misao počinje s pretpostavkom je meditivan i ne može biti odvojen od sredine u kojem se obavlja". Dakle, razumijevanje radnje u određenim sredini modelovanja a ne u odnosima koje su studenti uspostavili s objektom (u ovom slučaju, problemska situacija), ali u vanjskim uslovima.

Oslanjajući se na Vigotski i Bahtin, Wertsch (1993, 1998) stavlja se naglasak na komunikativne vježbe, razumjevajući ih kao primarni izvor za ljudsko djelovanje. U matematičkom obrazovanju, Lerman (2001), između ostalog, napravio je nekoliko učenja koristeći ovu pretpostavku. Ovaj autor je izabrao diskurs kategoriju kao fokus njegovog programa istraživanja. Govor se odnosi na sve vrste jezika, uključujući i gestove, znakove, mimike, i tako dalje (Lerman, 2001). Za njega, analize diskurzivne vježbe je jako bitno, jer značenja nam prethode, a mi smo učili iz jezika i učenja povezanih u nekoliko konteksta u kojem sudjelujemo. Tako razumijevanje djelovanja studenata u sredini modelovanja može biti potraženo u diskurzivnim vježbama.

### **Rasprave učenika**

Kao rezultat društvenog i kulturnog pogleda, ja razumijem studentske vježbe u modelovanju kao diskurzivne. Prethodno, kada se fokusira na verbalne interakcije u sredini modelovanja, predložio sam pojam interakcije prostora kao jedinstvo analiza (Barbosa, 2007). Prostor interakcije se događa kada su učenici okupe ili kada se učenici i nastavnici okupe s ciljem raspravljanja o aktivnosti modelovanja (ili čak i druge vrste).

Borromeo Ferri (2006) predložila je pojam pravca modelovanja za označavanje pojedinih modelovanja na unutrašnje i spoljne nivoe. Ovaj pojam podvlači mogućnosti studenata davajući različite mjerove aktivnosti modelovanja. Otkad sam shvatio diskurs kao predmet, interesovanje opada za verbalnim interakcijama između učenika ili između njih i nastavnika. Dakle, ja ću razmotriti pravce modelovanja kao diskurzivni primjer, ovo ce se odnositi na spoljne nivoe, za razliku od Borromeo Ferri. Šta čini pravce modelovanja? Ovo pitanje započinje veliku temu istraživanja. U prethodnom učenju, inspirirano u Skovsmose (1990), ja sam predložio matematičke, tehnološke i reflektivne rasprave kao dijelove pravca modelovanja (Barbosa, 2006a). Definisujući njih, mi imamo matematičke rasprave koje se odnose na čiste matematičke postupke i pojmove, tehnološke rasprave se odnose na prevode izabranog fenomena za učenje matematike, te reflektivne rasprave se odnose na prirodu matematičkih modela i uticaje kriterija koji su korišćeni u rezultatima. Prema mišljenju nastavnika, moguće je da jedna od tih rasprava bude stimulirana. U konkretnom slučaju društveno-kritičkog pogleda, zanimljivo je to da studenti nisu ograničeni na matematičke i tehnološke rasprave, ali da jesu da stvore reflektivne, zato što one stvaraju priliku da se sagleda priroda i uloga matematičkih modela u društvu. Razmatranje matematičkih, tehnoloških i reflektivnih rasprava ne iscrpljuju vježbanje studenata u sredini modelovanja, jer se druge rasprave mogu pojaviti i možda se ne uklape, u potpunosti, ni u jednom od tih

slušajeva. Dakle, u ovom članku, ja uzimam primjer iz učionice u drugoj analizi drugih rasprava učenika, tako reći, one koje nisu ni matematičke, ni tehnološke ni refleksivne. Uz to, nadam se da ću teoretisati vježbanje, i također imati više elemenata za nastavnike da prate ponašanja učenika.

## METODOLOGIJA I KONTEKST

Grupu učenika koja je radila aktivnosti modelovanja snimio je jedan od članova istraživačke grupe na Univerzitetu u Feira de Santana (Brazil). Kontekst obrazovnog programa je bio pristupačan nastavnicima matematike, u Maju 2006, u gradu Feira de Santana, Brazil, predavao je profesor Andréia Maria Oliveira, koji je je također član istraživačke grupe. Učenici su iskusni nastavnici, ali bez akademska titula, koji su se vraćali na univerzitet da uzmu certifikat u vladinom programu.

U tom trenutku, lokalni gradonačelnik odobrio je povećanje autobuske karte sa R \$ 1,40 do R \$ 1,50 (u Brazilu, valuta je brazilski real, prenosi R \$), što je izazvalo veliki bijes u gradu. Koristeci javnu raspravu o ovom događaju, nastavnik ih je pitao da procjene uticaj povećane cijene autobuske karte na mjesečni porodični budžet. Kao prvo, nastavnik je dao kopiju članka u novinama koji je govorio o povećanju cijene autobuske karte, koji je bio pročitani i raspravljani sa svima. U zged, oni su bili organizovani po grupama, i imali su za zadatak pronaći rješenje za ovaj problem. U ovom radu, ja ću uzeti u obzir snimanje grupe sastavljene od Lila, Selma i Maria.

Analiza podataka je utemeljena u teoriju (Charmaz, 2006), koristili su uglavnom neke smjernice za kodiranje. Posmatranje je bilo prepisano i kodirana linija po linija, pokušavajući da identifikuju odlomke koji su se odnosili na matematičke, tehnološke i refleksivne rasprave i one koji se nisu uklapali ni u jednu od njih. Dalje, oni koji su kasnili dobili su kodove, koji su grupisani u veće opisne kategorije. atim, rezultati su bili upoređeni s literaturom, stvarajući teorijska razumjevanja u svrha ovoga rada.

### Prezentovanje podataka

Grupa učenika formirana og Lile, Selme i Marie, odmah je odlučila da traži rješenje za problem koji je učitelj postavio. Zbog ograničenja prostora, ja ću samo predstaviti dva reprezentativna odlomka odataka. Moguće je identifikovati iskaze u njima koji mogu biti stavljena pod definiciju matematičkih rasprava [M] i tehnoloških rasprava [T]. Međutim, postoje i drugi iskazi koji se ne odnose na te, njih ću označiti kao [?]

[T] Lila: Šta stvarno mi hoćemo da znamo? Mi još uvijek treba da izračunamo mjesečnu potrošnju. Četiri i po nedjelje.

[T] Selma: porodica koja minimalno zaradjuje ili učestvuje bar sa tri ili četiri plate.

[?] Maria: Bože, stvarnost je stvarno teška.

[?] Lila: To je razlog zašto djeca moraju ići u bliže škole. To nije moguće. Oni idu pješice. Maria: Reci nešto Selma,

[M] Selma: Izračunali smo 1,50 puta šest. Rezultat je 9,00

[T] Marija: Nedjelja ima pet dana: ponedjeljak, utorak, srijeda, četvrtak i petak.

[T] Selma: U mjesecu ima oko 18 ili 20 školskih dana.

Nastavnik prilazi grupi.

[T] Nastavnik: Jeste li računali punu cijenu ili pola cijene autobuske karte? [Učenici plaćaju pola autobuske karte u Brazilu]

[T] Selma: Uzeli smo u obzir pola cijene.

[M] Maria: Pola i 18 puta 4.

[?] Selma: Znači radnik plaća 6%. Zakon autobuski karti ide ovako: zaposleni plaćaju 6%, a poslodavci plaćaju 94% [U Brazilu ima državni program koji se naziva "transport-karta", u kojem kompanija plaća iznos koji zaposleni plate u gradskom prevozu, s druge strane, zaposlenom se oduzima 6% od njegove plate].

[?] Maria: To je pomoć transportu.

[?] Lila: To nije moguće, to je vrlo skupo.

[T] Selma: 85,5? To je pogrešno!

Oni govore o visokoj cijeni u gradskom prevozu za siromašne ljude koji primaju minimalne plate. Sjetili su se "transport-karta", koji zaposleni primaju. Učenici ne misle da su ove informacije korisne za rješavanje problema, jer nisu razgovarali o strategiji grupe. Odlomak pokazuje da rasprava označena kao [?] ide paralelno sa ovima koje su označene sa [M] i [T], jer ona nije dio gradjenja matematičkih modela. Ipak, oni rade kao u stvarnosti izvan škole, života u društvu i, konkretno, mogućnost pristupa stanovništva gradskom prevozu. Oni se ne uklapaju u definiciju refleksivne rasprave, zato što ne moraju da rade vezama matematičkog modela i kriterija koji se koristi u njegovoj izgradnji. Ipak, mislim da, s društveno-kritičkog gledišta, da ove rasprave koje su označene u epizodi kao [?] predstavljaju neke refleksije o društvenoj stvarnosti izvan škole. Oni donose nastavi matematike raspravu o kritičnim problema u društvu. Kasnije, kada je učitelj posjetio grupu, pojavljuje se druga vrsta dikcije koja se ne uklapa u [M] i [T], ali se razlikuje od onih navedenih u gornjem odlomku kao [?].

[T] Učitelj: Koje promjenjive možemo staviti u problem? Šta se događa kada se povećaju plate? Šta će se desiti? Možemo raspravljati o ovome.

[T] Selma: Smanjuje se, ako osoba prima mnogo plata.

[?] Maria: Oni su obrnuto proporcionalni. Hajde, idemo!

[T] Selma: Da li želite od nas da izračunamo to u odnosu na platu?

Učitelj: Kako vi želite.

[U ovom dijelu, Marijin iskaz nije prepoznat, i nije bio prepoznat ni u jednom od prethodnih iskaza] U ovom odlomku, učenici su razgovarali s učiteljem o promjenjivima koje treba da budu izabrane za taj problem. Selminu dikciju karakteriše veza između potrošnje u gradskom prevozu i plata kao obrnuto proporcionalna, za koju njene kolege nisu čule. To se dešava kao paralelni pravac, a ne utiče na gradjenje matematičkih modela, koji su samo veza s nekim predhodnim znanjem. Pitanja, kao što su "Zašto?", "Šta je obrnuto proporcionalno?", Itd., mogu biti postavljena i neke dobre matematičke rasprave mogu biti stvorene.

## RASPRAVA

Analize u gornjem odlomku stavljaju nove elemente za karakteristike učenika u vježbama modelovanja. Kao što je ranije uočeno, pravci modeliranja predstavljaju diskurzivni proces koji su učenici izveli i koji igra važnu ulogu u gradjenju matematičkih modela. Oni se mogu odnositi na matematičke, tehnološke i refleksivane rasprave, kao što je navedeno u Barbosa (2006a).

Svakako, kao što je pretpostavljeno, mnogo izraza se ne uklapa u ove kategorije. U ovom slučaju označeno kao [?] u gore analiziranim odlomcima. Iskaz koji su označeni [?] imaju paralelne pravce u učenikom modelovanju, ja ću ih nazvati paralelne rasprave. Oni se odnose na one koje se događaju u prostoru interakcije modelovanja, ali ne pripadaju pravcu modelovanja, jer ne igraju bitnu ulogu u izgradnji matematičkih modela. Podaci pokazuju da se iskazi uklapaju u pravce modelovanja ili paralelne rasprave, zavisno kako se koriste. Analize odlomka pokazuju da paralelne rasprave se mogu odnositi na nekoliko pravaca. Prvi slučaj odnosi se na kontekst problema, u primjeru podataka s komentarima o pristupu stanovništva gradskom prevozu. U ovom pravcu, aktivnosti modelovanja mogu dopustiti osvrt na društvene situacije, čak i ako nisu osvrtno rasprave. Paralelne rasprave, u ovom slučaju, proizvele su percepcije o društvenoj stvarnosti časova matematike. S druge strane, kao primjeru u podacima, paralelne rasprave mogu se odnositi na matematičke predmete. U ovom slučaju, legitimnost se temelji na kontekstu vježbi učenika. Ovakva vrsta rasprave pokazuje kako se u sredini modelovanja mogu stvoriti problemi čiste matematike. Možemo uzeti ovu vrstu rasprave kao priliku za konceptualni razvoj učenika na način opisan u Zbiek i Conner (2006).

U ovom trenutku, možemo prepoznati paralelne rasprave u sklopu vježbi učenika u sredini modelovanja, čak i ako nije povezano sa gradjenjem matematičkih modela. Ukratko, htio bih predložiti da učenicke vježbe u modelovanju mogu biti klasifikovane kao pravci modelovanja i paralelne

rasprave. Istaknuo sam ovdje sve one dijelove koji mogu biti prilika za razvoj važne rasprave za školsku sredinu.

### ZAVRŠNE NAPOMENE

Kao što sam istaknuo na početku ovog rada, mnoga učenja o vježbama učenika u sredini modelovanja su usmjerene na aktivnosti koje se provode u izgradnji matematičkih modela, pomoću pojmova kao što su kompetencije, vještine i pravci modelovanja. Predlaganje ideja paralelnih rasprava je da bi se označio izgovor da ne igraju ulogu u izgradnji matematičkih modela, ja bih želio da više pažnje usredsredite na vježbe učenika u sredini modelovanja, kako je naglašeno ranije, paralelne rasprave su mogućnosti u provođenju aktivnosti modelovanja. Riječ je o prilici za raspravu o aspektima života u društvu i čistoj matematici, koje mogu izazvati druge matematičke aktivnosti u školskom kontekstu i raspravu o aspektima života u društvu.

Koncept paralelnih rasprava započinje nova pitanja u prostoru istraživanja u naučnom polju. Koji su njegovi uslovi proizvodnje? Zašto oni ne uzimaju obzir grupu? Koje se druge vrste paralelnih rasprava mogu dogoditi? Koji je put paralelnih rasprava u stvaranju drugih aktivnosti? Istraživanja o ovim pitanjima mogu nam pomoći u izgradnji slike vježbi učenika u sredini modelovanja.

### LITERATURA:

- [1] Barbosa, J.C. (2007): *Mathematical modeling and parallel discussions*, State University of Feira de Santana, Brazil.
- [2] Bell, M (1983). Materials available worldwide for teaching applications of mathematics at the school level. In Zweng, M et al (ed), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. Boston: Birkhauser, 252-267.
- [3] Berry, J et al (ed) (1984). *Teaching and Applying Mathematical Modelling*. Chichester: Ellis Horwood.
- [4] Berry, J et al (ed) (1986). *Mathematical Modelling Methodology, Models and Micros*. Chichester: Ellis Horwood.
- [5] Berry, J et al (ed) (1987). *Mathematical Modelling Courses*. Chichester: Ellis Horwood.
- [6] Blum, W (1991). Applications and modelling in mathematics teaching - a review of arguments and instructional aspects. In Niss, M, Blum, W, Huntley, I (ed), loco cit., 10-29.
- [7] Blum, W et al (ed) (1989). *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.
- [8] Blum, W. (1993): *Mathematical modeling in mathematics education and instruction*, Mathematics Department, Kassel University, Germany.
- [9] Blum, W et al (1992). Teaching and learning of mathematics and its applications: first results from a comparative empirical study in England and Germany. In *Teaching Mathematics and its Applications*, 11, 112-123.
- [10] Blum, W, Niss, M (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. In *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- [11] Blum, W, Niss, M and Huntley, I (ed) (1989). *Modelling, Applications and Applied Problem Solving - Teaching Mathematics in a Real Context*. Chichester: Ellis Horwood.
- [12] Blum, W. & Leiß, D. (2007). „Filling Up“ - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In: Bosch, Marianna (Ed.): *CERME 4 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1623-1633.
- [13] Blomhøj, M & Kjeldsen, T. (2007). Learning the integral concept through mathematical modelling. In: Pitta-Pantazi, D & Philippou, G. (Eds): *CERME 5 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2070-2079.
- [14] Boer, H (1990). *Das Projekt Wasser*. Miihlheim: Schulpraxis.
- [15] Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 38, 2, 86-95.
- [16] Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. In: Pitta-Pantazi, D & Philippou, G. (Eds): *CERME 5 – Proceedings of the Fifth*

- Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 2080-2089.*
- [15] Borromeo Ferri, R., Blum, W. (2008): *Mathematical modelling in teacher education-experiences from a modelling seminar, University of Hamburg and University of Kassel, Germany.*
- [14] Carr, A and Galbraith, P (1987/1991). *Practical Applications of Mathematics*. Vol 1/2. Churchill: PAM.
- [15] Chapman, O. (2007). Mathematical modelling in high school mathematics: teachers' thinking and practice. In: Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. & Niss, M. (Eds): *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 325-332.
- [15] Clatworthy, N and Galbraith, P (1991). Mathematical modelling in senior school mathematics: implementing an innovation. In *Teaching Mathematics and its Applications*, 10, 6-22.
- [16] Clements, R (1989). *Mathematical Modelling - A Case Study Approach*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [17] COMAP (ed) (1985-92). *HIMAP Modules 1-19*. Arlington: COMAP.
- [18] COMAP (ed) (1981-92). *UMAP Modules - Tools for Teaching*. Arlington: COMAP
- [19] Cross, M and Moscardini, A (1985). *Learning the Art of Mathematical Modelling*. Chichester: Ellis Horwood.
- [20] Edwards, D and Hamson, M (1989). *Guide to Mathematical Modelling*. London: Macmillan. Mathematical modelling in mathematics education and instruction 13
- [21] Garfunkel, S and Steen, L (ed) (1991). *For All Practical Purposes*. New York: Freeman.
- [22] Giordano, F and Weir, M (1985). *A First Course in Mathematical Modelling*. Monterey: Brooks/Cole.
- [23] Hobbs, D (ed) (1992, 1993). *Enterprising Mathematics Course*. Oxford: Heinemann.
- [24] Huntley, I and James, G (ed) 1990. *Mathematical Modelling - A Source Book of Case Studies*. Oxford: Oxford University Press.
- [25] Ikeda, T., Stephens, M. & Matsuzaki, A. (2007). A teaching experiment in mathematical modelling. In: Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds): *Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics*. Chichester: Horwood Publishing, 101-109.
- [26] Jannack, W (1992). *Schalten mit Kopfchen*. Miihlheim: Schulpraxis.
- [27] Johnson, D. & Johnson, R. (1995). *Teaching students to be peacemakers*. Edina: Interaction Book Company.
- [27] Johnson, D. & Johnson R. (1999). *Learning together and alone. Cooperative, Competitive and Individualistic Learning*. New York: Prentice Hall.
- [28] Kagan, S. (1990). *Cooperative learning resources for teachers*. San Juan Capistrano, CA.
- [29] Kaiser, G., Sriraman, B. & Blomhoj, M. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 38, 2, 82-85.
- [30] Kaiser-Messmer, G (1991). Application-orientated mathematics teaching: a survey of the theoretical debate. In Niss, M, Blum, W and Huntley, I (ed), loc.cit, 83-92.
- [31] Kaiser-Messmer, G, Blum, W and Schober, M (1982, 1992). *Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht*. Vol 1/2. Fachinformationszentrum, Karlsruhe.
- [32] Knauer, U (1992). *Mathematische Modellierung*. Braunschweig: Vieweg.
- [33] Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*.
- [29] de Lange, J (1992). *Meaningful Math*. 3 Volumes: Matrices; Flying Through Math; Data Visualization (with Verhaage, H). Scotts Valley: Sunburst.
- [30] de Lange, J et al (ed) (1993). *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood.
- [31] Lingefjaerd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education – necessity or unnecessarily. In: Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. & Niss, M. (Eds): *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 333-339.
- [32] Lingefjaerd, T. & Holmquist, M. (2007). Model transitions in the real world: The Catwalk problem. In: Haines, C., Galbraith, P., Blum, W & Khan, S. (Eds): *Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics*. Chichester: Horwood Publishing, 368-376.
- [33] Lovitt, C and Clarke, D (1988). *MCTP Professional Development Package: Activity Bank*. Vol 1/2. Canberra: Curriculum Development Centre.
- [34] Lowe, I (1988/1991). *Mathematics at Work: Modelling your World*. Vol 1/2. Canberra: Australian Academy of Science.
- [35] Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? In: Haines, C., Galbraith, P., Blum, W & Khan, S. (Eds): *Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics*. Chichester: Horwood Publishing, 65-78.
- [36] Murthy, D, Page, N and Rodin, E (1990). *Mathematical Modelling - A Tool for Problem Solving in*

- Engineering, Physical, Biological and Social Sciences*. Oxford: Oxford University Press.
- [37] Niss, M (1987). Applications and modelling in the mathematics curriculum - state and trends. In *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology* 18, 487-505.
- [38] Niss, M (1993). Assessment of mathematical modelling and applications in mathematics teaching. In de Lange, J *et al* (ed), loco cit, 41-52.
- [39] Niss, M, Blum, Wand Huntley, I (ed) (1991). *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood.
- [40] North Carolina School of Science and Mathematics (1988). *Introduction to College Mathematics*. 2 Volumes: Matrices; Data Analysis. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- [41] Pollak, H (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (ed), *New Trends in Mathematics Teaching IV*. Paris: UNESCO, 232-248.
- [42] Schwarz, B. & Kaiser, G. (2007). Mathematical Modelling in school – experiences from a project integrating school and university. In: Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Eds): *CERME 5 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2180-2189.
- [43] Spode Group (1992). *A-Level Mathematics Support Series*. Vol 1-10. Cranfield: Cranfield Press.
- [44] Starfield, A, Smith, K and Bleloch, A (1990). *How to Model it: Problem Solving for the Computer Age*. New York: McGraw Hill.
- [45] Strauss, A, & Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research*. London: Sage.
- [41] Swetz, F and Hartzler, J (ed) (1991). *Mathematical Modelling in the Secondary School Curriculum*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- [42] University of Chicago School Mathematics Project (Usiskin, Z *et al*) (1989-92). 6 Volumes: *Transition Mathematics; Algebra; Geometry; Advanced Algebra; Functions, Statistics and Trigonometry; Precalculus and Discrete Mathematics*. Glenview: Scott, Foresman & Co.