ISSN 1986–518X *ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA*

Vol. III (2011), Broj 4, 23–34
Prevod sa Engleskog jezika[1]

NAMJERE I METODE U ISTRAŽIVANJU MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA[2]

Alan H. Schoenfeld[3]

This article begins with an attempt to lay out some of the relevant perspectives and to provide background regarding the nature of inquiry within mathematics education. Among the questions explored are the following: Just what is the enterprise? That is, what are the purposes of research in mathematics education? What do theories and models look like in education as opposed to those in mathematics and the physical sciences? What kinds of questions can educational research answer? Given such questions, what constitute reasonable answers? What kinds of evidence are appropriate to back up educational claims? What kinds of methods can generate such evidence? What standards ight one have for judging claims, models, and theories? As will be seen, there are significant differences between mathematics and education with regard to all of these questions.

Bertrand Russell je definisao matematiku kao nauku u kojoj mi nikada ne znamo šta je u pitanju, ili da li je ono sto govorimo istina. Matematički je dokazano da se široko primenjuje u mnogim drugim naučnim oblastima. Dakle, većina drugih naučnika ne zna o čemu priča, ili da li je ono što oni kažu istina.
Joel Cohen, „O prirodi matematičkih dokaza"

Ne postoje dokazi u matematičkom obrazovanju.
Henry Pollak

Prvi citat iznad je duhovit; a drugi ozbiljan. Oba, medjutim, služe da naglase neke od glavnih razlika između matematike i matematičkog obrazovanja - razlika koja mora biti shvaćena da se razumije priroda, metode i rezultati u istraživanju matematičkog obrazovanja.

Koenov citat ne ukazuje na neke ozbiljne aspekte matematike. U opisivanju različitih geometrija, na primjer, počinjemo sa nedefinisanim uslovima. Zatim, po pravilima logike, možemo dokazati da, ako su neke stvari istinite, drugi rezultati treba da slijede. S jedne strane, termini su nedefinisani; odnosno, „ mi nikada ne znamo šta smo govorili". S druge strane, rezultati su konačni. Kao što je Gertrude Stein[4] možda kazala, dokaz dokaza je dokaz.

Druge discipline rade na druge načine. Polakova izjava nije bila zamišljena kao distanciranje od matematičkog obrazovanja, već kao jedan od pionira u toj oblasti on ukazivanje na činjenicu da priroda dokaza i argumenatcije u matematičkom obrazovanju se prilično razlikuje od prirode dokaza i argumenatcije u matematici. Zaista, vrste pitanja koja se mogu postaviti (i očekivati da se može odgovoriti) u istraživanjima obrazovanja nisu vrste pitanja koja bi matematičari očekivali. Osim toga,

[1] Uz saglasnost autora, tekst preveli Ognjen Romano i Daniel A. Romano
[2] Originalni tekst je publikovan u 'Notice of the AMS', 47(6)(June/July 2000), 641-649
[3] *Alan H. Schoenfeld is Elizabeth and Edward Conner Professor of Education at the University of California, Berkeley.* e-mail: alans@berkeley.edu
[4] Gertrude Stein (rođena 3. februara 1874 u Allegheny, Pennsylvania, umrla 27. jula 1946 u Neuilly-sur-Seine, Francuska), Američko-jevrejski mislilac, pisac, pjesnik i umjetnički kolekcionar

matematičari i istraživači obrazovanja imaju tendenciju da imaju različite stavove o svrhama i ciljevima istraživanja u matematičkom obrazovanju.

Ovaj članak počinje sa pokušajem da se iznesu neke od relevantnih perspektiva i da se obezbjedi pozadina u vezi prirode u okviru istraživanja matematičkog obrazovanja. Među pitanjima istraživali su sledeće: Kakav je to poduhvat? To jest, šta je to što su namjere istraživanja matematičkog obrazovanja? Na šta liče teorije i modeli u obrazovanju u odnosu na one u matematici i prirodnim naukama? Na koju vrstu pitanja u istraživanjima obrazovanja možemo potražiti odgovore? Ako postavimo takva pitanja, kakvu vrstu razumnih odgovora možemo očekivati? Koje vrste očiglednosti / dokaza očekujemo na postavljene zahtijeve u istraživanjima obrazovanja? Koje vrste metoda mogu generisati takve dokaze? Koji standarde za procjenjivanje bi trebalo da primjenjujemo u procjenjivanju zahtijeva, modela i teorija? Kao što će se videti, postoje značajne razlike između matematike i obrazovanja u vezi sa svim ovim pitanjima.

NAMJERE

Istraživanje u matematičkom obrazovanju ima dvije osnovne namjene, jedna je teorijska a druga aplikativna:

- Čista (bazične nauka): Da bismo razumjeli prirodu matematičkog mišljenja, podučavanja i učenja.
- Primjenjena (apikativnost): Iskoristiti ta razumijevanja da bi se poboljšali podučavanje matematike.

One su duboko isprepletane. Prvi ciljevi su jedanko važni kao i druge namjere. Razlog je jednostavan: bez znatnog razumijevanja mišljenja, podučavanja, i učenja, kontinuirani napredak „fronta primjene" nije moguć. Korisna analogija ovome je veza između medicinskog istraživanja i prakse. Postoji širok spektar medicinskih istraživanja. Neka se hitno urade, sa potencijalnim aplikacijama u neposrednoj budućnosti. Neka se vrše sa ciljem razumijevanja osnovnih fizioloških mehanizama. Na duge staze ove dvije vrste rada žive u sinergiji. To je zato što je osnovno znanje od suštinskog interesa i zato što uspostavlja i jača osnove na kome je aplikativni rad zasnovan.

Ove dualnost namjera mora biti razumljiva. Ona je u mnogo u kontrastu sa jednim ciljem istraživanja matematičkog obrazovanja, kao što se to može vidjeti kroz slijedeću rečenicu koju velika većina matematičara postavlja: „Reci mi sta prolazi u učionici."

Iskazavši ovo ne mislimo da matematičare ne interesuje apstraktan nivo u baznim istraživanjima matematičkog obrazovanja, već da je njihovo primarno očekivanje korisnost u prilično direktnom i praktičnom smislu. Naravno, akademska zajednica mora da obezbjedi korisne rezultate tog istraživanja - naravno, korisnost motiviše ogromnu večinu u obrazovnom radu - ali je pogrešno mišljenje da direktna aplikacija (razvoj kurikuluma, „dokazi" da nastavni tretmani rade, itd) su primarna delatnost istraživanja u matematičkog obrazovanja.

O PITANJIMA

Glavno pitanje koje treba da bude razmotrano kada se promišlja o tome šta istraživanje matematičkog obrazovanje može da ponudi je: „*Na koju vrstu pitanja u istraživanju matematičkog obrazovanja možemo da dobijemo odgovor?* Jednostavno rečeno, najtipičnije obrazovna pitanja matematičara - „*Šta fukcioniše u učionici*?" i „*Koji pristup je bolji*?"- imaju tendenciju da budu, u načelu, skoro neodgovoriva. Razlog je taj što neka osoba može misliti da rad zavisi od toga koliko neko kao osoba vrijedi. Prije nego što neko pokuša da odluči da li je neki instrukcioni pristup uspješan, trebalo bi da se bavi pitanjima kao što su: Šta samo želimo da postignemo? Koja shvatanja, za koje ucenike, pod kojim uslovima, sa kojim ograničenjima želimo da realizujemo? Razmotrite sledeće primjere.

Jedno od pitanja koje administracija ali i osoblje na fakultetima često postavljaju je: „Da li su klase, u kojima ima veliki broj učenika, dobre kao male klase?" Nadam se da je jasno da se na ovo pitanje ne može odgovoriti apstraktno. Koliko je neko zadovoljan sa velikom klasom zavisi od toga šta on misli da je važno. Koliko učenici vide smisla u svojim angažovanjima u obradi nastavne materije? Da li učenici / studenti imaju osjećaj šta je važno u nekom kursu kao i šta je važno u čitavom obrazovnom programu?

Da li bi trebalo da postoji zabrinutost u vezi sa procentom učenika / studenata koji se na upisuju na matematičke kurseve koji slijede prethodnim?[5] Zaključci koje se izvode o radu sa velikim klasama znatno variraju u zavisnosti od specifičnosti ishoda koji se dobijaju pri tome.

Slična pitanja se javljaju čak i ako se bavimo isključivo školskom matematikom. Pretpostavimo, sada, da neko želi da se pozabavi pitanjem: „*Da li učenici / studenti uče onoliko matematiku u velikim odeljenjima, koliko u malim*? Mora se odmah pitati: *Na šta se misli kad se govori o matematici*? *Koliko teški treba da budu problemi koje će uučenici / studenti rješavati, modelovati, ili o kojima treba razgovarati*?“ Procjene koje se odnose na efikasnost jednog oblika instrukcija u odnosu na drugi zavise od odgovora na ova pitanja. Grubo rečeno, istraživač mora da zna šta traži i šta treba da uzme kao dokaz postojanja toga što traži prije nego što bude u mogućnosti da utvrdi da je našao to što traži.

Činjenica da je nečija procjena odraz vrijednosti kojih se ta osoba pridržava takođe se odnosi na pitanja tipa: *Koji pristup je bolji (ili najbolje)*? Ovo može izgledati očigledno, ali često nije. Razmotrite račun reforme. Ubrzo nakon Tulane-ove „Lean and Lively“ konferencije, čiji se proceedings pojavio u izdanju Američke matematičke asocijacije (vidi [5]), Nacionalna Fondacija za Nauku (NSF) finansira većinu inicijativa koje se odnose na reformu obrazovanja. Sredinom 1990-ih većina projekt - koordinatora NSF programa bili su ubjedjeni da je reforma obrazovanja „dobra stvar“ i da bi trebalo da bude model za reforme u drugim sadržajnim oblastima. NSF je matematičarima koji su bili uključeni u reformu, i istraživačima matematičkog obrazovanja postavio sledeće pitanje: *Da li dobijamo dokaze da je reforma matematičkog obrazovanja podigla kvalitet znanja matematike (to jest, da je reformisana matematika od tradicionalne matematike)*? Ono što su administratori NSF-a imali u vidu, bio je neki oblik testa. Mislili su da bi trebalo da postoji mogućnost konstruisanja testa, kojim je lako upravljati, i koji bi pokazivao da reforma matematičkog obrazovanja ima uspjeha.

Oni koji zagovaraju ovakav pristup ne shvataju da ono što predlaže je u suštini kao poređenje jabuka i pomorandži. Ako neko daje tradicionalni test koji se snažno oslanja na sposobnost da se obavljaju simbolične manipulacije, učenici / studenti obuhvaćeni reformom (reforma učenici) će biti u nepovoljnom položaju jer oni nisu uvježbani u tim vještinama. Ako neko osmisli taj test involvirajući u njega elemente na kojima počiva reforma obrazovanja, na primjer, elemente modelovanja, onda će učenici / studenti obrazovani na tradicionalan način biti u nepovoljnom položaju, jer tradicinalni pristup nastavi nije podrazumjevao tehnologije modelovanja. Bilo kako bilo, davati test i porediti rezultate ne bi bilo fer. Odgovarajući način da se nastavi komparacija je da pogledamo nastavne planove i programe, identifikujući važne teme i procjenjujući šta to znači njihovo pojmovno razumijevanje. Sa ovom vrstom informacija, pojedine institucije i odeljenja (i profesije u celini, ako žele) mogu onda odlučiti koji aspekti o razumevanju su najvažniji, koje žele da procene, i kako. Kao rezultat produžene diskusije, NSF-ov nastojanja su evaluirala od početnih do onih fokusiranih na dokumentovanje efekata reforme matematičkog obrazovanja sagledavanjem širih okvira u procjenjivanju. Rezultat ovih napora reprezentiran je 1997. godine u knjizi *Testiranje učenika iz matematike* (vidi [10]).

Sve u svemu, za mnoga pitanja koja bi prirodno trebalo da se postave - pitanja tipa: *Šta funkcioniše*?, ili *Koja je metoda najbolja*? – iz dosta dobrih razloga ne mogu se pronaći odgovoriti.

Obzirom na prethodno, sasvim prirodno je da se upitamo koje vrste pitanja mogu istraživači matematičkog obrazovanja mogu postaviti? Ja bih raspravljao o tome da su neki od osnovnih doprinosa istraživanja matematičkog obrazovanja sledeće:

- teorijske perspektive za razumijevanje razmišljanja, učenja, i poučavanja;
- opise aspekata saznanja (na primjer, misliti matematički; učenikova shvatanja i nesporazumi pojmova funkcije, granica, itd.);
- postojanje dokaza (dokaz slučajeva u kojima učenici mogu da nauče rješavanje problema, indukciju, teoriju grupa; dokaz o održivosti raznih vrsta nastave);
- opise (pozitivne i negativne) posledica različitih vrsta nastave.

[5] Misli se na učenike / studente koji imaju mogućnost da izaberu neki od ponuđenih matematičkih kurseva pošto su prethodno odslušali obavezne matematičke kurseve. (primjedba prevodioca)

Michèle Artigue[6] je u svom članku iz 1999. godine (*Notices Amer.Math. Soc)* (vidi [1]) opisuje mnoge rezultate takvih studija. Ja ću u slijedećem odjeljku, odjeljku Metode, opisati neke druge uz komentar o metodama za njihovo dobijanj.

O TEORIJAMA I MODELIMA (I KRITERIJIMA ZA IZBOR DOBRIH)

Kada matematičari koriste termine „teorija“ i „model“, oni obično imaju vrlo specifične vrste stvari na umu, kako u pogledu prirode tih entiteta tako i vrste dokaza koji se koriste za zahteve u njima. Termini „teorija“ i „model“ se ponekad koriste na različite načine u prirodnim i drustvenim naukama, i njihova upotreba može biti više srodna onima koje se koriste u obrazovanju. U ovom odeljku ukratko ću ponešto kazati o primjerima datim u Tabeli 1.

Predmet	Matematika, Fizika	Biologija	Obrazovanje, Psihologija
Teorija	Jednačine, Gravitacija	Evolucija	Um
Model	Toplotni motor U ploči	Predator-plen Odnosi	Problem Rešavanje

Tabela 1. Teorije i modeli iz matematike/ fizike, biologije, i obrazovanja/ psihologije.

U matematici, teorije su postavljene eksplicitno, kao u teoriji jednačina ili teoriji kompleksnih varijabli. Rezultati su dobijeni analitički: mi dokazujemo da objekti koji su u pitanju imaju osobine koje tvrdimo da imaju. U klasičnoj fizici postoji uporedivi stepen specifičnosti; fizičar koristi recipročnu vrijednost kvadrata zakon za atrakciju gravitacione sile, na primer. Modeli su približni, ali se od njih očekuje da budu veoma precizni u determinističkom obliku. Dakle, na primer, na model protoka toplote u laminarnoj ploči, navodimo početne uslove i granice protoka toplote, i mi tada rješavamo relevantne jednačine. Ukratko, ne postoji dvosmislenost u tom procesu. Opisi su eksplicitni, a standard ispravnosti je matematički dokaz. Teorije i metode izvedene iz njega mogu biti iskorišćene za predviđanja, što se uzima kao empirijski bitno u sagledavanju ispravnosti teorije.

Stvari su mnogo složenije u biološkim naukama. Razmotrite teoriju evolucije, na primer. Biolozi su u saglasnosti sa opštim pogledom na njegovu suštinsku ispravnost, ali dokazi prikupljeni u korist evolucije sasvim prirodno se razlikuju od dokaza koje se koriste u matematici ili fizici. Ne postoji način da se dokaže da je evolucija ispravna u matematičkom smislu; argumenti koji podržavaju sastoje se od (da pozajmim naslov jedne od Pólya-ovih knjiga) „obrasci vjerodostojnog rezonovanja“, zajedno sa pažljivim razmatranjem alternativnih hipoteza. U stvari, biolozi su rekli sledeće: „Mi imamo planinu dokaza koje su u skladu sa teorijom, široko tumačenih; ne postoji jasan dokaz koji falsifikuje predloženu teoriju, i nema rivala hipotezi koja ima iste kriterijume.“ Dok predviđanja budućih događaja nisu izvodljiva imajući u vidu vremensku skalu evolucionih događaja, teorija podržava alternativne oblike predviđanja. Ranije neistraženi fosilni zapisi moraju odgovarati teoriji, tako da teorija može da se koristi za opisivanje svojstava koje fosili treba, ili ne treba, da imaju. Akumulativan zapis se uzima kao potvrda za teoriju.

Ukratko, teorija i podržavanje dokaza mogu da se razlikuju značajno u prirodnim naukama i u matematici i u fizici. Isto vazi i za metode, ili najmanje za stepen preciznosti koji se očekuje od njih: niko ne očekuje životinjsku populaciju modelovanu predator-plen jednačinu da se prilagodi tim modelima na isti način na koji toplotni tok u laminarnoj ploči očekuje da će u skladu sa modelima toplotnog toka.

Konačno, teorije i modeli u nauci su uvek predmet revizije i preciziranja. Kao što je slavno i divno njutnova gravitaciona teorija bila je zamjenjena Ajnstajnovom teorijom relativnosti. Ili, uzmite u obzir nuklearnu teoriju. Valencova teorija, zasnovana na modelu elektrona koji kruže oko jezgra, omogućila je

[6] Antigue Michele, profesor emeritus, Universite Paris Diderot – Paris 7, potpredsjednik (1998-2006) i predsjednik ICMI-a (International Commision of Mathematical Commision), matematičar, logičar i istraživač matematičkog obrazovanja.

nevjerovatna predviđanja, kao što su postojanje jos uvek neotkrivenih elemenata. Ali fizičari više ne govore o elektronima u orbiti oko jezgra; nekada solidne čestice kao što su elektroni zamenjeni u teoriji verovatnoće oblakom elektrona. Teorije se razvijaju.

Istraživanje u matematičkom obrazovanju ima mnogo atributa istraživanja u fizičkim i prirodnim naukama prethodno opisanim. U „teoriji uma“, na primer, određene pretpostavke su o prirodi mentalne organizacije - na primer, da postoje određene vrste mentalnih struktura te da one funkcinišu na odredjene načine. Jedna takva pretpostavka je da postoje razne vrste memorija, među njima radna ili „kratkoročna“ memorija. Prema teoriji, razmišljanje koristi radnu memoriju: to je, „objekat misli“ da ljudi manipulišući mentalno privremeno smještaju u radnu memoriju. Ono što čini stvari zanimljivim (i naučnim) je da teorija takođe često stavlja jaka ograničenja radne memorije: tvrdi se (npr. u [8]), da ljudi ne drže više od oko devet „komandnih“ informacija u radnoj memoriji u jednom trenutku.

Da biste vidjeli da ova tvrdnja može da bude istinita, treba da probate da pomnožite 379 sa 658 zatvorenih ociju. Većini ljudi će to predstavljati problem ali ne i nemoguće. (Na nedavnom sastanku dao sam grupi od oko 75 matematičara ovaj zadatak. Niko od njih nije uspeo da reši za nekoliko minuta.) Razlog je taj što broj stvari koje osoba mora da prati od - originalnih brojeva i raznih međuvrednosti koje se javljaju u toku množenja - prelazi devet. Sada, osoba je sposobnija da uradi zadatak mentalno proba posle nekih od međuvrednosti: npr. osoba može da izračuna 8 x 379 = 3032 i ponovi „3032“ mentalno dok ne postane komad i zauzme samo jedan razmak („tampon“) u radnoj memoriji. To ostavlja dovoljno radnog prostora za druge proračune. Koristeći ovu vrstu komadanja, ljudi mogu da prevaziđu ograničenja radne memorije.[7]

Sada uzmite u obzir istinitost tvrdnje da ljudi u radnoj memoriji nemaju više od 9 slotova. Nikada neće postojati apsolutni dokaz ove tvrdnje. Prvo, malo je vjerovatno da će istraživači pronaći fizičku lokaciju međumemorija (eng. buffer) radne memorije u mozgu, čak i ako postoji; bufferi su komponente modela, i oni nisu nužni fizički predmeti. Drugo, dokaz u prilog ove tvrdnje je ubjedljiv, ali ne može biti konačan. Mnoge vrste eksperimenata su sprovedene u kojima su ljudima davani zadaci koji zahtijevaju korišćenje više od 9 slotova u radnoj memoriji, i ljudi su pogrešili (ili, uspjevali poslije izvesnog napora, izvodeći ih radeći neku vrstu grupisanja).

Kao i kod evaluacije, postoji mnogo dokaza koji su u skladu sa ovom tvrdnjom, nema jasnih dokaza da je suprotno, i nema suprotne hipoteze sa istim kriterijumima. Ali, da li je to dokazano? Ne, ne u matematičkom smislu. Relevantni standard je, u suštini, ono što bi neutralni žiri smatrao kao dokaz van razumne sumnje. Isto važi i za modele, recimo, rješavanje problema ili (moj trenutni interes) model poučavanja (pogledaj članke [12], [13]). Ja sam trenutno angažovan u nastojanju da izgradim teorijski opis koji objašnjava kako i zašto nastavnici rade to sto rade, u hodu, u učionici. Ovaj rad, procjenjivana na isti nivo detalja kao teorija memorije, nazvan je „teorija nastave u kontekstu“. Tvrdi se da sa teorijom i sa dovoljno vremena da nastavnik napravi modele, može se izgraditi opis izvodioca nastave koji karakteriše njegovo ili njeno ponašanje u učionici sa izuzetnom preciznošću. Kada se jednom pogleda ovaj rad, ne može se očekivati da se nađe vrsta preciznosti nađena u modelovanju protoka toplote u laminarni tanjir. Ali (pogledati, na pr. [12]) nije nerazumno očekivati da se takvo ponašanje može sa istim stepenom tačnosti u „realnom svijetu“ ponašanja kao kod ’predator-plen’ modela.

Namjera nam je da dosegnemo do pitanje standarda za procenu teorija, modela, i rezultata u odeljku koji je odmah iz slijedećeg.

METODE

[7] Ljudi koriste ”komadanje” kao mehanizam svo vreijme. Trivijalni primer: neko može da se sjeti desetocifrenih brojeva telefona razbijajući ga na dijelove trocifrenih brojeva koja pamti kao cjeline. Isto tako, teorija tvrdi da je komadanje primarni mehanizam koji omogućava da pročitate ovaj članak. Svaku riječ osoba čita kao komad, koja je jednom bila zbirka pisama koja je trebala da bude objavljena. Isti je slučaj kod svih vrsta matematičkih pojmova koje sada osoba ”donosi na pamet” kao jedinicu. Konačno, zar ”munja kalkulatori” - ljudi koji rade izuzetno brzo mentalna računanja – nije kontraprimer ove tvrdnje? Ne izgleda da je to slučaj. Oni koji su studirali ispostavilo se da memorišu ogroman broj posrednih rezultata. Na primer, mnogi ljudi će doneti ”72” u pamćenje automatski kao komad, kada se radi na proračun to podrazumeva 9 x 8, munje kalkulatori mogu učiniti isto za proizvode dvocifrenih ili trocifrenih brojeva. To smanjuje opterećenje radne memorije.

U ovom članku ja ne mogu da obezbedim čak ni početni katalog metoda istraživanja u osnovnom matematičkom obrazovanju. Kao indikacija veličine tog zadatka, uzima se u obzir činjenica da je, na primjer, knjiga [6], *Prirucnik kvalitativnog istraživanja u obrazovanju* sa skoro 900 stranica[8]. Poglavlja u toj knjizi uključuju opsežne diskusije etnografije (kako se shvata „kultura učionice", na primer), analiza diskursa (koji obrasci se mogu videti u pažljivom proučavanju razgovora), uloga kulture u oblikovanju saznanja, i pitanja subjektivnosti i valjanosti. I to je kvalitetan rad - tu je, naravno, dugogodišnja tradicija istraživanja u društvenim naukama, takođe. Moj cilj je da se obezbedi orijentacija vrstama rada koje su urađene i da se predlože vrste nalaza (i ograničenja istog) koje oni mogu proizvesti.

Oni koji su novi u istraživanju obrazovanja teže da razmišljaju terminima standardnih eksperimentalnih studija, koji uključuju eksperimentalne i kontrolne grupe i koriste statističke podatke da utvrde da li jesu ili nisu rezultati značajni. Ispostavilo se da, upotreba statistike u obrazovanju je mnogo složenije pitanje nego što se to može misliti.

U toku nekoliko godina od sredine vijeka pa nadalje, istraživanje u društvenim naukama (u SAD) je dominiralo unutar agrikulture. Osnovna ideja je bila da ako dvije oblasti određenog usjeva budu tretirane identično osim za jednu promenljivu, onda razlike u usjevima mogu se prepisati razlici te promjenljive. Svakako, ljudi su vjerovali, da tome slično može da se desi i u obrazovanju. Ako neko želi da dokaze da novi način nastave studijskog programa X bio superioran, onda bi se mogao sprovesti eksperiment u kojem dve grupe učenika studiraju studijski program X – dok jedna grupa studira na standardni način, druga grupa studira na nov nacin. Ako učenici / studenti koji uče na novi način budu bolji, postojaće dokazi o superiornosti tog nastavnog metoda.

Ostavite na stranu za trenutak pitanja u prethodnom odeljku o ciljevima nastave i činjenicu da se stare i nove instrukcije možda neće fokusirati na iste stvari. Zamislite da je neko mogao da izradi test za stare i nove instrukcije. Pretpostavimo, takođe, da su učenici / studenti nasumice određivani u eksperimentalnu ili kontrolnu grupu. Dakle, standardne eksperimentalne procedure su primjenjivane. Ipak, jos uvek će biti ozbiljnih potencijalnih problema. Ako različiti nastavnici uče dvije grupe učenika, bilo kakve razlike u ishodu mogu biti pripisane razlikama u nastavi. Ali, čak i ako je nastave realizovana od strane istog nastavnika, može biti mnogo razlika. Možda postoji razlika u energiji ili obavezi: učiti „iste stare stvari" nije isto što i isprobavati nove ideje. Ili, učenici u istoj grupi znaju da dobijaju nešto novo i eksperimentalno. To samo može dovesti do značajnih razlika. (Postoji mnogo literatura koje pokazuju da ukoliko ljudi osjećaju da su promjene napravljene u njihovom najboljem interesu, oni će više da rade i bolje - bez obzira kakve su promene. Efekti ovih promjena vremenom izblede.) Ili, učenici mogu eksperimentisati sami.

Ovde je slučaj na koji poentiram. Prije nekoliko godina sam razvio skup samostalnih nastavnih materijala za nastavu Calkulusa[9]. Kolege sa drugog univerziteta dogovorile su se da ih njihovi studenti koriste. U tim univerzitetima formirane su dvije grupe studenata, jedna kojima je dat novi materijal i druga kojoj nije dat. Pri tom je procjenjeno da je eksperimentalan grupa uradila bolje osim u dvije teme. Međutim, u ta dva dijela nije bilo razlika u performansama. Ostavimo po strani to da je većina univerziteta davala materijal studentima uz uvodne objašnjavanja da je to novi materijal koji će im mnogo pomoći. Neki od realizatora nastave dijelova u kojima nije bilo razlika davali su studentima materijal uz obrazloženja: „Oni su me pitali da vam dam ovo. Ne znam da li je dobro."

Ukratko, klasična eksperimentalna metoda može biti problematična u obrazovnim istraživanjima. Da spomenem samo dva problema, dvostruko slepe eksperimente u medicinskom smislu (u kojima ni lekari ne pacijenti ne znaju koji je pravi tretman i ko dobija placebo lečenje) su retko slepi, kao i mnoge eksperimentalne varijable retko kontrolisane u bilo kom smislu. (To je bila poenta primjera u prethodnom pasusu.) Kao rezultat toga, i pozitivni i negativni rezultati mogu biti teski za interpretaciju. Ovim se ne kaže da takve studije nisu korisne ili da duge skale procjene rada nisu vrijedne - jasno je - ali to mora biti

[8] Prevodliac ovog teksta preferira knjigu A. Sierpinska, J. Kilpatrick (editors): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (vols. 1 & 2), Kluwer Academic Publishers: Great Britain, 1998., kao jednu od najboljih knjiga o alatima istraživanja matematičkog obrazovanja.

[9] Nastavni program matematike namjenjen nematematičkim studijskim programima (primjedba prevodioca)

učinjeno sa velikom pažnjom i rezultati i zahtevi moraju se tumačiti jednako pažljivo. Statistički rad u skladu sa vrijednostima teži da bude ono sto:

(a) proizvodi opšte zaključke u vezi sa populacijom. Na primjer, Artigue u [1] navodi da „vise od 40% studenata koji upisuju francuske univerzitete smatraju da ako dva broja A i B su bliže jedan drugom nego 1/*N* za svako pozitivno *N*, onda ne moraju biti jednaki, već su samo beskrajno blizu.“

(b) daje jasno poređenje dvije ili više populacija. Na primjer, rezultati Trece medjunarodne matematicke i naucne studije osnovne performanse studenata razlicitih nacija na niz matematickih sadrzaja.

(c) obezbedjuje dokazivanje, tokom vremena, od nalaza koji su prvi otkriveni u nekoliko manjih razmera interventnim studijama.

Ono sto se nalazi u najvecem dijelu je istrazivanje metoda u osnovnom matematickom obrazovanju - u svim obrazovanjima po tom pitanju - ukazuju na rezultate i da zajednicki dokazi mnogih studija tokom vremena da je ono što se daje za dokazivanje nalaza. Proširicu ovo pitanje sa jednim produženim primerom uzetim iz mog rada. Pitanje se tiće „metakognitinog ponasanja“, ili matakognicije: konkretno, efikasno korištenje jednog resursa (ukljucujuci i vreme) za vreme rjesavanja problema. Ovde je primjer motivacije. Prije mnogo godina, kada je jedna standardna nastavna tema za studente prve godine bila tehnika integracije, sledeća vježba je bila prvi problem na testu datom jednoj velikoj klasi:

$$\int \frac{x}{x^2 - 9}\, dx.$$

Očekivalo se da ce studenti izvršiti očiglednu zamjenu $u = x^2 - 9$ i brzo riješiti problem. Oko polovine klase je to i uradilo. Međutim, oko četvrtina klase, primjetivši da je imenilac glavni činilac, pokušali su da riješe problem koristeći tehniku parcijalnih razlomaka. Osim toga, oko 10% studenata primjetivši da je imenilac bio oblika $x^2 - a^2$, pokusali su da riješe problem koristeći se tehniku zamjene $x = 3 \sin\theta$. Sve ove metode dovode do tačnog odgovora, naravno, ali za drugu i treću metoda studenti troše više vremena. Studenti koji primjenjuju te tehnike, u velikoj mjeri, loše urade test zato sto im ponestane vremena. Primjeri kao što je ovaj su me naveli da razvijem nastavni materijal fokusiran na strateske izbore koji se čine u radu sa integralima. Ovo sugeriše da bi trebalo pronaći neke dokaze da su strateški izbori tokom rješavanja problema važni.

Pitanje strateškog izbora pojavilo se ponovo kada sam, kao dio mog istraživanja na rješavanju problema, pregledao videotrake studentskih pokušaja da riješe probleme. Često, izgledalo je, studenti bi pročitali iskaz problema, brzo izabrali metodu rješavanja, a onda uporno insistirali na tom pristupu čak i kada izgleda da izabrani pristup ne daje rezultate. Da bih ove opservacije napravio rigoroznim zapažanjima, razvio sam „šemu kodiranja“ za analiziranje videotraka o rešavanju problema. Ovaj analitički okvir obezbeđuje mehanizam za identifikovanje puta tokom rada na problema kada donošenje odluke može da bude pretača uspješnom ili neuspješnom rješavanju. Okvir je definisan na takav način da bi ga drugi istraživači mogli koristili, ne samo za potrebe istraživanja mojih trake, već i za ispitivanje nekih drugih takođe. Koristeći ih, istraživači mogu da vide kako studentska odluka pomaže ili ometa njihove pokušaje u rješavanja problema. Takvi okviri služe u više različitih svrha. Prvo, imati takvu šemu omogućava karakterizaciju videokaseta u smislu da postanu relativno objektivne: ako dva analitičara rade na istoj traci samostalno proizvodeći iste kodove, tada postoji razlog da verujemo u konzistentnost interpretacije. Drugo, postojanje ovakvih analitičkog sredstva za ovaj tip omogućava da se uđe u trag efektima instrukcija za rješavanja problema: upoređujući videosnimke formirane „prije i poslije“ rješavanja problema mogu da otkriju da li su učenici postali efikasniji. Treće, ova vrsta alata omogućava nagomilavanje podataka iz studija. S jedne strane, rezime rezultata u ovom slučaju: metakognitivna sposobnost je veoma produktivan faktor u rješavanju problema.[10] Za više detalja, pogledati članak [9].

Kao što je gore navedeno, rezultati istraživanja u obrazovanju nisu „dokazani“ u smislu kako su dokazani u matematici. Štavise, često je teško koristiti jednostavne eksperimentalne ili statističke metode koje se koriste u fizičkim naukama zbog kompleksnosti povezanih sa onim koliko znače za obrazovne uslove da budu „replika“. U obrazovanju se može naći širok spektar istraživačkih metoda. Pogled na jednu od prvih knjiga dodiplomskog matematičkog obrazovanja, recimo knjigu [14], omogućava uvid u njihov opseg. Ako ništa drugo, broj i vrsta metoda su povećane, kao što se vidi u tri toma *Istraživanje u*

[10] U slučaju pri ruci (metakognitivno ponašanje), veliki broj studija je pokazao da efektivne odluke donešene u toku rješavanja problema ne ”dolaze prirodno”. Takve vještine se mogu naučiti, iako je intenzivna nastava neophodna. Kada učenici nauče takve vještine, njihovo rješavanje problema se poboljšalo.

univerzitetskom matematičkom obrazovanju[11]. Mogu se naći, na primer, izvještaji detaljnih razgovora sa studentima, poređenja reforme i tradicionalnog pristupa, ispitivanje matematičkih „radionica“, kao i proširenu studiju studentskog razvijanja razumijevanja fizičkog uređaja i grafikone u vezi sa tim. Studije sadrže i antropološkog posmatranja tehnika kao i druge kvalitativne metode interesantne od zajedničkog interesa.

Koliko su važeće takve studije, i koliko možemo da zavisimo od njihovih rezultata? O tom pitanju se raspravlja u slijedećem dijelu.

STANDARDI ZA PROCJENJIVANJE TEORIJA, MODELA I REZULTATA

Postoji širok spektar rezultata i metoda u matematičkom obrazovanju. Glavno pitanje je sledeće: Koliko povjerenja treba da postoji u određeni rezultat? Šta predstavlja solidni razlog, šta predstavlja „dokaz van razumne sumnje“?

Sledeća lista pruža skup kriterijuma koji mogu da se koriste za vrednovanje modela i teorija (i uopšte bilo empirijskog ili teorijskog rada) u matematičkom obrazovanju:

- Deskriptivna moć
- Moć objašnjenja
- Obim
- Moć intuicije
- Rigoroznost i specifičnost
- Falsifikativnost
- Zamenljivost
- Višestruki izvori dokaza („triangulacija“)

Ukratko ću opisati svaku od njih.

Moć deskripcije. Pod ’moći opisivanja’ mislim na kapacitet teorije da uhvati „ono na šta se odnosi“ na načine koji se čine vjernim fenomenima koji opisuje. Kao što je Gaea Leinhardt[12] u [7] istakla, fraza „uzmi u obzir sfernu kravu“ (“consider a spherical cow”) može biti odgovarajući kada fizičari shvataju kravu u smislu njene gravitacione mase - ali ne i ako je istraživanje neke od njenih fizioloških svojstava! Teorije uma, rešavanje problema, ili nastava trebalo bi da sadrže relevantne i važne aspekte razmišljanja, rešavanja problema, i nastave respektivno. Na veoma visokom nivou, nekoliko pitanja koje bi trebalo postaviti su: *Da li nešto nedostaje*? *Da li elementi teorije odgovaraju onome što se čini razumno*? Na primer, recimo da procedura rješavanja problema, intervjua, ili učioničke lekcije snimljen. Hoće li se osoba koja čita analizu i vidi videotraku iznenaditi stvarima koje nedostaju u analizi?

Moć objašnjenja. Pod ’moći objašnjenja’ mislim o pružanju objašnjenja o tome kako i zašto stvari funkcionišu. Jedna je stvar reći da će ljudi, ili neće, biti sposobni da izvrše određene vrste zadataka, ili čak da opišu šta rade detaljno; to je još jedna stvar koju treba objasniti. Jedno je, na primjer, reći da će ljudi imati poteškoća prilikom množenja dva trocifrena broja u njihovim glavama. Ali to ne pruža informacije o tome kako i zašto dolazi do teskoća. Pun teorijski opis radne memorije, koji je već spomenut, dolazi sa opisom memorije bafera, detaljno objašnjenje mehanizma za komadanje, i pažljivo razgraničeno kako komponente memorije komuniciraju jedne sa drugima. Objašnjenje radi na nivou mehanizma: ono govori

[11] (a) Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H., & Kaput, J. (Eds.) (1994). *Research in Collegiate Mathematics Education. I.* Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences.
(b) Kaput, J. Schoenfeld, A. H., & Dubinsky, E., (Eds.) (1996). *Research in Collegiate Mathematics Education. II.* Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences.
(c) Schoenfeld, A. H., Kaput, J., & Dubinsky, E. (Eds.) (1998). *Research in Collegiate Mathematics Education. III.* Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences.
(d) Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H., & Kaput, J. (Eds.) (2000). *Research in Collegiate Mathematics Education. IV.* Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences.

[12] Gaea Leinhardt, profesor emeritus, University of Pittsburg, ekspert za kognitivne studije, e-mail: gaea@pitt.edu

u razumno preciznim terminima šta su objekti u teoriji, kako su povezani, i zašto su neke stvari moguće a neke ne!

Obim. Pod 'obimom' mislim na spektar fenomena pokriven od strane teorije. Teorija jednačina nije baš impresivna ako se bavi samo linearnim jednačinama. Isto tako, teorija nastave nije baš impresivna ako pokriva samo predavanja!

Moć predviđanja. Uloga intuicije je očigledna: jedan test bilo koje teorije je da li može da navede rezultate pre njihovog dešavanja. Opet, dobro je imati stvari kao što je teorija evolucije u vidu modela. Predviđanja u obrazovanju i psihologiji nisu često tipa kao u fizici.

Ponekad je moguće napraviti precizna predviđanja. Na primer, Brown[13] i Burton[14] u [4] su proučavali vrste netačnih shvatanja da učenici kada uče razvijaju standardni američki algoritam oduzimanja za bazu 10. Oni su pretpostavljali veoma specifičnu mentalnu konstrukciju na za jednu grupu studenata - ideja je bila da studenti /učenici nisu samo majstori standardnog algoritma, već da studenti/učenici često razvijaju jednu veliku klasu netačne varijante algoritma i primenjuju je dosledno. Brown i Burton su razvili jednostavni dijagnostički test sa svojstvom da je student/učenik-ih obrazaca netačnih odgovora predložili su lažan algoritam koji će on ili ona koristiti. Oko polovine vremena bili su sposobni da predvide netačne odgovore pre nego što student/učenik riješi problem!

Takva precizna i dosledna predviđanja na osnovu nečega tako jednostavnog kao što je dijagnostički test su ekstremno rijetka, naravno. Na primer, ne postoji teorija nastave koja precizno predviđa šta će nastavnik da uradi u različitim okolnostima; ljudsko ponašanje nije toliko predvidljivo. Međutim, teorija nastave može da radi na način analogan teoriji evolucije. Može da predloži ograničenja pa čak i da sugeriše vjerovatne događaje.

[Izrada predviđanja je veoma moćno sredstvo u teoriji preciznosti. Kada se tvrdi da je nesto nemoguće a to se, ipak dešava, ili kada teorija pravi ponovne tvrdnje da je nešto veoma vjerovatno a to se, ipak, ne desi, onda teorija ima probleme! Dakle, angažovanje u takvim prognozama je važno metodološko sredstvo, čak i kada je razumljivo da je precizno predviđanje nemoguće.]

Rigoroznost i specifičnost. Izgradnja teorije ili modela uključuje specifikaciju skupa objekata i odnosa među njima. Ovaj skup apstraktnih objekata i odnosa navodno odgovara nekom skupu objekata i odnosa u „realnom svijetu". Relevantna pitanja su:

Koliko dobro su definisani uslovi? Da li znate o jedan, ako ste vidjeli taj? U stvarnom životu? U modelu? Koliko su dobro definisani odnosi među njima? I koliko dobro objekti i odnosi u modelu odgovaraju stvarima koje bi trebalo da predstavljaju? Kao što je gore navedeno, ne mogu se obavezno očekivati iste vrste sličnosti između dijelova modela i objekata stvarnog svijeta kao što je slučaj sa jednostavnim fizičkim modelima. Mentalne i socijalne konstrukcije, kao što su bafer memorije i „didaktički ugovor" (ideja da nastavnici i učenici uđu u učionicu sa implicitnim razumevanjima u pogledu normi za njihove interakcije i da ova shvatanja oblika deluju) nisu pregledani ili merljivi na način na koji je toplotni protok u laminarnoj ploči. Ali, možemo da pitamo za detalje, i ono šta su objekti i kako se uklapaju zajedno. Da li su odnosi i promjene među njima pažljivo definisani, ili da li se „magija dešava" negde usput? Ovde je gruba analogija. Za veći deo XVIII veka flogiston teorija sagorjevanja - koja pospostavlja da u svim zapaljivim materijalima postoji bezbojna, bez mirisa, bestežinska, bezukusna supstanca koja se zove „flogiston" oslobođena tokom sagorjevanja - bila široko prihvaćena. (Lavoisier-ov rad na sagorevanju konačno je odbacio tu teoriju.) Sa malo mahanja rukom, flogiston teorija objasnila je razumljiv izbor fenomena. Možda će neko nastaviti da je koristi, samo teoretičari možda nastave izgradnju epicikle na epicikle u teoriji kružnih orbita.[15] Teorija je možda nastavila proizvodnju nekih korisnih rezultata, dovoljno dobrih „za sve praktične svrhe". To može biti dobro za praksu, ali je problematično u

[13] John Seely Brown, University of Southern California, član American Academy of Arts and Sciences od 2009.

[14] Richard R. Burton, expert za vještačku inteligenciju i compjutersku lingvistiku, umro Oct. 29, 2007 u Bostonu

[15] Ovaj primjer ukazuje na još jedan važan kriterijum, jednostavnost. Kada teorija zahtijeva više "ispravki" kao što su epicikle na epicikle, to je simptom da nešto nije u redu sa teorijom.

odnosu na teoriju. Baš kao u fizičkim naukama, istraživači u obrazovanju imaju intelektualnu obavezu da pomere ka većoj jasnoći i specifičnosti i da traže ograničavanje slučajeva ili kontraprimera da se vidi gdje se teorijske ideje razrađuju.

Evo dva primjera. Prvi, u mom istraživanju grupa modela nastavnog procesa, mi predstavljamo aspekte znanja nastavnika, ciljeve, vjerovanja, i donošenje odluka. Skeptici (uključujući i nas) bi pitali, koliko je jasno izlaganje? Jednom su termini definisani u modelu (tj., naveli smo znanja nastavnika, ciljeve i vjerovanja) da li postoji mahanje rukom kada kažemo ono što nastavnik može da uradi u posebnim okolnostima, ili je model dovoljno dobro definisan da ga drugi pokrenu i naprave ista predviđanja? Drugi, „APOS teorija“[16], izložena u [2], koristi termine kao što su akcija, proces, objekat, i šema. Da li ćes znati nešto o njoj ako ih sretneš? Da li su dobro definisani u modelu? Da li su načini na koji oni komuniciraju ili postaju transformisani dobro navedeni? U oba ova slučaja krajnja pitanja su: Koje su šanse da je ovo takođe flogiston teorija? Da li ljudi angažuju teoriju konstantno je testirajući kako bi saznali? Slična pitanja trebalo bi postaviti o svim uslovima koji se koriste u obrazovnom istraživanju, na primer, „didaktički ugovor“, „metakognicija“, „koncept slike“, i „epistemološka prepreka“.

Neoriginalnost. Potreba za falsifikativnošću - za izradu autonelogičnih zahtijeva ili predviđanja čija tačnost može da bude testirana empirijski - trebalo bi da budu jasna u ovom smislu. To je okolnost za diskusiju u prethodne dvije podsekcije. Oblast ostvaruje napredak (i stražari protiv tautologije) tako što stavlja svoje ideje na liniju.

Ponavljanje. Pitanje zamenljivosti je takođe tijesno povezano sa rigoroznošću i specifičnošću. Postoje dvije povezane grupe pitanja: (1) Da li će se iste stvari desiti ako se okolnosti ponavljaju? (2) Da li će drugi, nekada adekvatno obučeni, videti iste stvari u podacima? U oba slučaja odgovaranje na ova pitanja zavisi od postojanja dobro definisanih procedura i sinteza.

Formulacija (1) je namerno nejasna, jer se pretpostavlja da pokriva širok spektar predmeta. U slučaju kratkotrajnog pamćenja, tvrdnja da će ljudi naići na poteškoće ukoliko zadaci memorije zahtijevaju korišćenje više od devet kratkoročnih bafer memorija. U slučaju sociološke analize učionice, tvrdnja da kada se jednom didaktički ugovor podrazumijeva, akcije učenika i nastavnika će se potvrditi sa (najčešće prećutno) podrazumijevanjem. U slučaju vjerovanja, tvrdnja da će učenici koji imaju određena vjerovanja djelovati na određeni način dok rade matematiku. U slučaju epistemološke prepreke ili APOS teorije, tvrdnje su da studenti koji imaju (ili nemaju) određene mentalne konstrukcije te će (ili neće) biti sposobni da rade određene stvari.

U svim ovim slučajevima korisnost saznanja, tačnost tvrdnji, i sposobnost za falsifikovanje ili ponavljanje zavisi od specifičnosti sa kojom su termini definisani. Razmotriti ovaj slučaj u smislu klasičnog obrazovanja književnosti. Ausubel-ova[17] teorija o „napredovanju organizatora“ (u [3]) postulatu da ako je studentima dat uvid u materijal koje čitaju koji ih usmerava šta da slede, njihovo razumijevanje čitanja značajno će se poboljšati. Posle deceniju ili dvije i mnogo, mnogo studija, litaratura na tu temu bile su neubjedljive: oko polovine studija pokazalo je da napredovanje organizatora je napravilo razliku, a polovina ne. Blizi pogled otkriva razlog: termin je bio loše definisan. Različiti autori su izgradili sopstveno napredovanje organizatora zasnovano na osnovu onoga što oni misle da bi trebalo da budu - i postojalo je mnogo varijacija. Nije ni čudo što su zaključci bili neubjedljivi! (Jedna standardna tehnika za rad sa dobro definisanim pitanjima, i koja postavlja pitanje (2) iznad je da postoje nezavisni istraživači koji prolaze kroz iste podatke a zatim porede svoje rezultate. Postoje standardne norme u polju za „zakopavanje ocjenjivača pouzdanosti“; norme kvantifikuju stepen do kojeg nezavisni analitičari vide iste stvari u podatku.)

Višestruki izvori dokaza („Triangulacija“). Ovde nalazimo jednu od glavnih razlika između matematike i društvenih nauka. U matematici jedan ubjedljiv argument (dokaz) je dovoljan: važnost je

[16] APOS teorija – jedan od perspektiva u istraživanju matematičkog obrazovanja, počiva na hipotezama da se matematičko znanje zasniva na individualnim tendencijama u vezi sa sagledavanjem situacija u kojima se pojavljuju matematički problemi, mentalnim konstrukcijama nad: aktivnostima (*actions* A), procesima (*processes* P), objektima (*objects* O) te da ih organizuje u sheme (*schemas* S) stvarajući tako smisao u kojima treba rješavati probleme.

[17] David Paul Ausubel (1918 – 2008), američki obrazovni psiholololog.

uspostavljena. U obrazovanju i društvenim naukama mi smo generalno u potrazi za *ubedljivim dokazima.* Činjenica je, dokazi mogu biti varljivi: ono što mi mislimo da je uopšteno može u stvari biti artefakt ili funkcija okolnosti prije nego opšti fenomen.

Evo jedan primjer. Prije nekoliko godina napravio sam seriju videosnimaka studenata koji rješavaju problem, Koliko ćelija postoji u odraslom ljudskom tijelu prosječne veličine? Njihovo ponašanje je bilo upečatljivo. Broj studenata je napravio gruba nagađanja o redu veličine dimenzija ćelija - od „recimo da je ćelija angstrom jedinica na strani “ do „reći da je celija kocka 1/100 inča širine.“ Onda, imajući veličinu ćelije u sekundi, proveli su dosta vremena na veličinu cilindra, kupe, i sfere i računanje obima svakog sa nekom pažnjom. Ovo je bilo veoma čudno.

Nešto kasnije sam počeo snimati studente kako rješavaju probleme u parovima, a ne samostalno. Ja nisam ponovo video ponašanje opisano iznad. Ispostavilo se da kada su radili samostalno, studenti su osjećali ogroman pritisak. Znali su da će profesor matematike pregledati njihove radove. Pod ovim okolnostima su osjetili potrebu da urade nešto matematički, i obim proračuna barem su učinili da izgleda kao da su radili matematiku. Kada su učenici radili u parovima, počeli su rekavši nešto kao „Ovo je sigurno čudan problem.“ To je bilo dovoljno da rasturi neke pritiske, rezultat je da nije bilo potrebe za njima, da se uključe u obim računanja nego da ga se oslobode. Ukratko, neka vrlo konzistentna ponašanja su zapravo funkcija okolnosti prije nego sastavni dio problema ili studenata.

Jedan od načina za artifakt ponašanja je da se razlikuju okolnosti: da pitam, da li vidite istu stvar u različito vrijeme na različitom mjestu? Još jedan je da se traži što više izbora informacija o fenomenu u pitanju i vidjeti šta prikazuje sklad poruka. U mom istraživanju grupnog rada na modelovanju nastave, na primer, izvlačimo zaključke o nastavničkom ponašanju iz videosnimaka nastavnika u akciji - ali i obavljamo intervju sa nastavnikom, pregledamo njegove ili njene planove lekcija i bilješki, i diskutujemo o našim probnim zakljičcima sa nastavnikom. Ovim načinom mi tražimo konvergenciju podataka. Više nezavisnih izvora potvrđuje da to što tražimo postoji, iz više nalaza proizlazi veća verovatnoća.

ZAKLJUČAK

Poenta ovog zaključka je da istraživanje u (studentskom) matematičkom obrazovanju je veoma različita inicijativa od istraživanja u matematici i da je razumijevanje te različitosti od suštinskog značaja ukoliko je potrebno da procijenjujemo (ili još bolje, doprinosimo) rad u ovom polju ljudskog znanja. Nalazi su retko definitivni; oni su obično sugestivni. Sakupljanje i utvrđivanje podataka nije u cilju dobijanja dokaza, ali je kumulativni, kreće se ka zaključcima koji se mogu smatrati da su van razumne sumnje. Naučni pristup je moguć, mora da se vodi računa da ne bude *kvazi-naučnosti* - ono što se treba uzimati u obzir nisu spoljni pokazatelji, kao što je, na primjer, eksperimentalna metoda, već upotreba pažljivog rasuđivanja i standardnih dokaza, angažovanja širokog spektar metoda odgovarajućih za zadatke koje imamo pred sobom.

treba da se podsjetimo da je istraživanje matematičkog obrazovanja još uvijek mlad domen ljudskog znanja. Matematičari u svojim istraživanjima koriste matematičko nasleđe nastajalo vijekovima. ako ne i milenijumima. Za razliku od toga, nagomilana iskustva u istraživanjima matematičkog obrazovanja (posebno, u istraživanjima studentskog matematičkog obrazovanja) se procjenjuju i koriste tek nekoliko decenija. Časopis *Educational Studies in Mathematics* (Obrazovne studije u matematici)[18] datira iz 1960. Prvi broj *Journal for Research in Mathematics Education* (*Časopisa za istraživanje u matematičkom obrazovanju*)[19] je objavljen u januaru 1970. Serija tomova *Istraživanje u univerzitetskom matematičkom obrazovanju* - prvi set tomova posvećen je matematičkom obrazovanju na univerzitetskom nivou - počela je da se pojavljuje 1994. Nije slučajno da je 1999.-e, u tekstu [1], ogromnu većinu članaka citirala Artigue u svom pregledu istraživanja koje su objavljene 1990-im godinama. Bilo je nekih istraživanja o dodiplomskim studijama i prije toga. Postoji izuzetan napredak u broju publikovanih istraživanja poslednjih nekoliko godina, ali, ipak, ovo polje je još uvek veoma mlado, i, postoji dug put koji treba da pređe.

[18] *Educational Studies in Mathematics,* , Springer, ISSN: 0013-1954 (p), ISSN: 1573-0816 (o)
[19] *Journal for Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics, ISSN: 0021-8251

Zbog prirode ovog domena, prikladno je podesiti svoj stav prema radu i njegovoj korisnosti. Matematičari koji namjeravaju da se bave istraživanjima u ovoj oblasti trebalo bi da budu otvoreni za širok spektar ideja, prihvatajući da metode i perspektive na koje su navikli se ne primenjuju u obrazovnom istraživanju na tako čvrst način. Oni ne bi trebalo da traže definitivne odgovore, ali mnoge ideje mogu da budu korisne. U isto vreme, svi potrošači i praktičari istraživanja u (studentskom) matematičkom obrazovanju treba da budu zdravi skeptici. Posebno, zato što ne postoje definitivni odgovori, svakako bi trebalo da budu oprezni prema bilo kome ko nudi takve ionformacije. Uopšteno govoreći, osnovna namjere u decenijama koje dolaze, trebalo bi da je da se nastavi sa izgradnjom teorija matematičkog obrazovanja kao i metoda njihovih istraživanja tako da postanu ne samo robusna osnova i domen u kojem treba primjenjivati svoje rezultate istraživanja.

REFERENCE

[1] M. ARTIGUE, The teaching and learning of mathematics at the university level: Crucial questions for contemporary research in education, *Notices Amer. Math. Soc.* 46 (1999), 1377–1385.

[2] M. ASIALA, A. BROWN, D. DE VRIES, E. DUBINSKY, D. MATHEWS, and K. THOMAS, A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education* (J. Kaput, A. Schoenfeld, and E. Dubinsky, eds.), vol. II, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, pp. 1–32.

[3] D. P. AUSUBEL, *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt-Reinhardt-Winston, New York, 1968.

[4] J. S. BROWN and R. R. BURTON, Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills, *Cognitive Science,* 2 **(2)**(1978), 155–192.

[5] R. G. DOUGLAS (ed.), *Toward a Lean and Lively Calculus*, MAA Notes Number 6, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1986.

[6] M. LECOMPTE, W. MILLROY, and J. PREISSLE, *Handbook of Qualitative Research in Education*, Academic Press, New York, 1992.

[7] G. LEINHARDT, On the messiness of overlapping goals in real settings, *Issues in Education,* 4 (1998), 125–132.

[8] G. MILLER, The magic number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information, *Psychological Review,* 63 (1956), 81–97.

[9] A. H. SCHOENFELD, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, FL, 1985.

[10] A. H. SCHOENFELD (ed.), *Student Assessment in Calculus*, MAA Notes Number 43, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1997.

[11] A. H. SCHOENFELD, On theory and models: The case of teachingincontext, *Proceedings of the XX Annual Meeting ofthe International Group for Psychology and Mathematics Education* (Sarah B. Berenson, ed.), Psychology and Mathematics Education, Raleigh, NC, 1998.

[12] A. H. SCHOENFELD, Toward a theory of teaching-in-context, *Issues in Education,* 4 (1998), 1–94.

[13] A. H. SCHOENFELD, Models of the teaching process, *Journal of Mathematical Behavior,* Vol. 18, N0. 3, March 1999, pp. 243-261

[14] D. TALL (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, 1991.