

Matematika, Metodika matematike i Matematičko obrazovanje – tri bliska a tako različita domena

Daniel A. Romano¹

Sažetak: Ovaj rad se odnosi nedavno istraživanje koje je sprovedeno sa studentima jednog studijskog programa za obrazovanje učitelja. Rad je dio šireg istraživanja pod naslovom „*Ustanovljavanje obrazovnih nivoa u matematici*“ koje realizuje Naučno društvo matematičara Banja Luka. Teoretski aspekti uključuju pitanja o nastavi elementarne geometrije, Van Hieleovoj teoriji i učiteljskim shvaćanjima o ulozi definicija i njihovom poučavanju. U radu se, na primjeru kruga i kružnice, utvrđuje odnos između epistemoloških značenja domena školskog znanja geometrije, znanja geometrije neophodnog realizatorina nastave matematike u nižim razredima osnovne škole (2-5 razred), vještina konstruisanja geometrijskog znanja planiranog u tim razredima (domen metodike matematike za te razrede) i razumijevanja interakcije učenik-učitelj pri tom konstruisanju (domen problematike matematičkog obrazovanja).

Ključne riječi i fraze: matematika, školska matematika, metodika matematike, istraživanje matematičkog obrazovanja

Abstract. This paper is a part of more extensive research accomplished with students of an education faculty under the title „*Estimation of mathematical education levels*“ which the Scientific Society of Mathematicians Banja Luka is realising. Theoretical aspect includes questions about elementary geometry teachings, van Hiele's theory of understanding geometry, and students' understanding the roles of mathematical definitions. In this paper, using circle and circumference as examples, we demonstrate relationships between school knowledge of geometry, knowledge of geometry needed to any elementary school teachers of mathematics, capabilities of construction of geometry knowledge in the elementary school classes (Didactic mathematics domain) and understanding of interaction between pupils and teachers during that construction (Research of Mathematics Education domain).

ZDF Subject Classification: C30, C70, D30, D60, D70, G10,

Key words and phrases: mathematics, school mathematics, didactic of mathematics and research of mathematical education

1. Uvod i/ili prvi "susret" teorije i prakse

Poznato je da se znatan broj istraživača matematičkog obrazovanja ali i univerzitetskih nastavnika na visokoškolskim ustanovama za obrazovanje nastavnika, u periodu 1998-2001, oslanjao na van Hieleovu teoriju o razumijevanju geometrije kao sredstvo koje će realizatorima nastave matematike na svim nivoima obrazovanja (predškolsko vaspitanje, niže i više osnovnoškolsko obrazovanje i srednoškolsko obrazovanje) olakšati analiziranje učeničkih radova iz geometrije (Cannizzaro and Menghini, 2001). Glavni cilj je bio unaprijeđivanje didaktičke svijesti u smislu upućivanja učenika da sa percepcije elementarnih figura dođu do njihove definicije, te da od definicija dođu do inkluzivnih definicija.

U ovom radu, u prvoj fazi, analizirani su nastavni planovi i programi za niže razrede osnovne škole u Bosni i Hercegovini (2-5 razred). U drugoj fazi pregledani su odgovarajući obavezni udžbenici za matematiku u Republici Srpskoj, a potom napravljena komparativna analiza geometrijskih sadržaja izloženih u tim udžbenicima sa ciljevima nastave matematike odgovarajućih razreda osnovne škole koji se odnose na konstruisanje geometrijskih znanja. Projekt je nastavljen intervjuom sa studentima jednog od studijskih programa za obrazovanje profesora razredno-predmetne nastave na jednoj visokoškolskoj ustanovi za obrazovanje učitelja. Tokom intervjua / testiranja radna grupa istraživača nastojala je da ustanovi:

¹ Pedagoški fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara b.b., Bosna i Hercegovina,
e-mail: bato49@hotmail.com

(a) nivoa razumijevanja elementarne geometrije tih studenata, (tj. da li studenti znaju *o čemu je riječ* kada se govori o razumijevanju prostora, orijentaciji u prostoru i elementarnim geometrijskim imaginacijama);

(b) kvantitet znanja i kvalitet razumijevanja elementarne geometrije u domenu školske matematike (matematičkih znanja, vještina i sposobnosti ovladanim tokom njihovog osnovnoškolskog i srednješkolskog obrazovanja);

(c) kvantitet i kvalitet matematičkih znanja neophodnih realizatorima nastave matematike u nižim razredima osnovne škole (2-5 razred), tj. da li studenti znaju koje zadatke treba realizovati da bi se dosegli ciljevi nastave matematike u dijelu koji se odnosi na geometrijske sadržaje;

(d) metodičke kompetencije za realizaciju geometrijskih sadržaja u nižim razredima osnovne škole (2-5 razred), tj. da li studenti znaju koje alate geometrijskog mišljenja bi trebalo da razvijaju kod svojih učenika stvarajući ili dizajnirajući fundamentalne situacije kojima utiču na razvoj tih alata, odnosno da li studenti znaju *kako* bi trebalo podučavati učenike nižih razreda osnovne škole geometrijskim sadržajima; i

(e) razumijevanja interakcije unutar domena 'podučavanje-učenje' da bi uspješno realizovali planirane ciljeve nastave matematike, tj. da li razumiju *zašto* se interakcija učitelj-nastavnik odvija upravo na izabrani način.

Istraživači u ovom projektu nastoje ustanoviti kognitivne nivoa, kvantitet intelektualnih vještina i kvalitet logičkih sposobnosti, govoreći o statističkoj većini populacije, svršenih srednjoškolaca u Republici Srpskoj.² Podsjetimo se da bi trebalo da se ti ciljevi nastave, predviđeni u socio-kulturnim dokumentima „Nastavni plan i programi matematike za učenike devetogodišnje osnovne škole“ dosegnu tokom redovnog i obaveznog obrazovanja. Trebalo je da istraživači registruju kojim informacijama raspolažu studenti treće godine učiteljskog studija da bi ih mogli usmjeriti prema višoj razini preciznosti u jeziku i prema stvarnom razumijevanju uloge definicija.

Namjera istraživača bila je pružiti teorijsku podršku budućim nastavnicima. Korištena je van Hieleova teorija o razumijevanju geometrije kako bi ih podstakli na razmišljanje o njihovoj vlastitoj praksi. Posebno ih je zanimala ideja o prelazu sa simbola na značajne znakove. Van Hieleov simbol (1958., 1974.) predstavlja razinu percepcija (razinu 1), u kojoj učenici sažimaju sva svojstva geometrijskih likova sa kojima se susreću.

Bez sumnje, činjenica da su studenti u toku realizacije kursa 'Metodika nastave matematike' prethodno upoznati sa van Hieleovim nivoima 0, 1, 2, 3 i 4 (do nivoa koji je, na primjer, izložen u člancima [6] i [27]) te karakteristikama Houndement&Kuzniak geometrijskim paradigmatama ([6]) omogućilo je istraživačima da pouzdanije i jasnije odrede svoje ciljeve, čak i ako je određeni rad bio na nivou prve tri razine, tj. na nivoima koji prethode Euklidovim dokazima. Tačnije, studentima je bio jasniji izraz "korak po korak", od ekskluzivnih do inkluzivnih definicija kao i uloga slova u početnoj dedukciji. Ova teoretska podrška omogućila je istraživačima da modificiraju i koriste radne listove u smjeru determinisanih ciljeva.

Clements i Battista (1992) naglašavaju teškoće pri prelazu iz viših razreda osnovne škole ka srednjoj školi, smatrajući da je glavni fokus standardnih nastavnih programa za niže razrede osnovne škole na prepoznavanju i imenovanju geometrijskih oblika, na pisanju odgovarajućih simbola za jednostavne geometrijske koncepte, na razvijanju vještina mjerenja i korištenju geometrijskog pribora kao što su šestar i uglomjer, te na korištenju formula u geometrijskim mjerenjima. S jedne strane, ti nastavni programi sastoje se od niza nepovezanih pojmova, bez sistematičnog napredovanja ka višim nivoima mišljenja - razinama potrebnim za razvoj sofisticiranih koncepata i rješavanje geometrijskih problema. S druge strane, na drugoj razini je tradicionalni naglasak bio na formalnom dokazu, uprkos činjenici da studenti ipak nisu spremni nositi se s time (Romano, Todić i Vinčić, 2010).

U stvari, svrha istraživanja u početku je bila olakšavanje postupnog prelaza iz intuitivne geometrije ka racionalnoj geometriji u srednjoj školi, na osnovu razina 1, 2, i 3.

Ipak, poput Clementsa i Battista (iz godine 1992) većina istraživača se slaže da je postizanje razmišljanja na nivou 2 važan cilj pre-sekundarnih instrukcija.

2. Problem istraživanja

² Iako je kardinalni broj populacije sa kojom je obavljen intervju nevelik, i ne predstavlja dobro izabran statistički skup ove populacije, ipak ovaj intervju istraživačima snažno formira slutnju o karakteristikama parametara koje istražuju.

Sam Van Hiele ponavlja da se nivo mišljenja ne odnosi na biološku evoluciju pojedinca (van Hiele, 1986.), ali za razvoj mišljenja, ovo bi trebalo značiti da se mogu aktivirati na različite načine unutar različitih razina (vidi, na primjer, Shaughnessy and Burger, 1986).

U ovom radu pokušali smo analizirati raspravu, uz uvažavanje tehnologija savremenih istraživanja matematičkog obrazovanja (u tom cilju pogledati na primjer, članke [1]-[3], [5]-[8], [10]-[12], [14]-[15], [17]-[30] i [32]-[35] i/ili knjige [4], [9], [13], [16], [31] i [34]) iz nove perspektive, tj. iz perspektive studenata studijskog programa za obrazovanje profesora razredne nastave (učitelja), kako bismo istaknuli raznolikost pristupa, raznolikost ciljeva i različitosti u prihvaćanju pogrešaka.

Neka opšta pitanja koja se javljaju ([29], [30]) su:

Pitanje 1. *Po čemu se razlikuju ciljevi nastave geometrije u drugom razredu od ciljeva u trećem razredu?*

Pitanje 2. *Po čemu bi trebalo da se razlikuju aktivnosti nastavnika pri predavanju geometrijskih sadržaja u drugom razredu, u metodološkom smislu, od aktivnosti nastavnika koji predaje geometriju u trećem razredu?*

Pitanje 3. *Koliko ta razlika utiče na nastavnička uvjerenja? I obrnuto: Koliko nastavničko uvjerenje utiče na tu razliku?*

Pitanje 4. *U kojoj mjeri van Hieleova teorija razumijevanja geometrije može pomoći realizatorima nastave matematike u njihovim najstijojanjima da naprave distinkciju između svojih aktivnosti u realizaciji geometrijskih sadržaja u različitim (nižim) razredima osnovne škole?*

Za razliku od situacije navedene u prethodnom odlomku, ovo specifično istraživanje pokušava odgovoriti na neka od naših pitanja o koncepcijama nastavnika i profesionalnim navikama, a ne na pitanja o vlastitom načinu izvođenja nastave određenog nastavnika. Mi smo uključili određeni broj budućih učitelja, preciznije 22 studenta studijskog programa za obrazovanje profesora razredno-predmetne nastave jednog od fakulteta obrazovanja u B&H.

Studenti su kroz studentske obaveze unutar kursa 'Metodika nastave matematike' susretali se sa nastavnim programima matematike za prvih pet razreda osnovne škole, imali obavezu da se preciznije upoznaju sa nastavnim ciljevima determinisanim u tim programima, proučavali neke od savremenih teorija matematičkog obrazovanja (između ostalih, upoznali su se sa karakteristikama 'Teorije didaktičkih situacija' i 'Teorije realističkog matematičkog obrazovanja') te upoznavali se sa elementima matematičkog mišljenja (posebno – aritmetičkog i rano-algebarskog i geometrijsko-prostornog) sa posebnim osvrtom na van Hieleovu teoriju o razumijevanju geometrije. O matematičkom mišljenju pogledati, na primjer, članke [1], [3], [10], [14] (o aritmetičkom i rano-algebarskom mišljenju) i/ili članke [2], [5], [6], [8], [15], [18]-[20], [23]-[24], [27]-[30] (o geometrijskom mišljenju).

3. Metodologija

U obaveznom udžbeniku (Boris Čekrlija i Petar Đaković: *Matematika za drugi razred osnovne škole*; Zavod za udžbenika i nastavna sredstva, Istočno Sarajevo 2009) crtež kruga (i termin 'krug') učenici susreću već na stranici 16 tog udžbenika. Dakle, učitelj kod učenika nastoji konstruisati znanja o geometrijskim figurama kruga i kružnice već u početnim časovima nastave matematike. Prema uobičajenoj klasifikaciji, ta znanja su na nivou 0 (po van Hieleovoj klasifikaciji). U istom udžbeniku pojmovi 'spoljašnja oblast' i 'unutrašnja oblast' se pojavljuju na stranici 20. Na istoj stranici učenicima se predočava odnos tačke prema zatvorenoj liniji. Na stranicama 21 – 24 podučavaju se učenici pojmovima 'tačka', 'prava' (te presjeku pravih) i pojmu rastojanja (dužine). Naravno, ova znanja se podučavaju unutar tzv. geometrije I, tj. na sve objekte (osim, naravno, prave linije) koji se pojavljuju u udžbeniku gleda se kao na fizičke objekte. Jedino mjesto gdje se pojavljuje nagovještaj potrebe za imaginacijom je stranica 23 gdje se učenici susreću sa pojmom 'prava linija'. Prema tome, već tu se od učenika zahtijeva konstruisanje imaginacije, tj. tu se učenici prvi put susreću sa potrebom da prihvataju postojanje pojmova koji se konstruišu apstrakcijama.

U obaveznom udžbeniku (Dušan Lipovac: *Matematika za četvrti razred osnovne škole*; Zavod za udžbenika i nastava sredstva, Istočno Sarajevo 2009), na stranicama 55-56 izložen je geometrijski sadržaj o krugu i kružnici na slijedeći način: „Uzmi metalni novčić od 5KM, nasloni ga na hartiju sveske, pa olovkom nacrtaj krivu zatvorenu liniju ... Tako si nacrtao krivu zatvorenu liniju koja se naziva *kružna linija* ili *kružnica*. Pri dnu slijedeće stranice tog udžbenika (istaknuto) stoji: „Kružnica je kriva linija čije su tačke jednako udaljene od jedne stalne tačke – centra. Krug je dio ravni ograničen kružnicom, podrazumijevajući i tu samu kružnicu.“ To su znanja iz geometrije koja se odnose na kružnicu i krug koje edukator nastave matematike u nižim razredima osnovne škole (1-5 razred) ima obavezu da konstruiše kod

svojih učenika. S druge strane, podsjetimo se koji geometrijski sadržaji, u vezi sa krugom i kružnicom, su predviđeni nastavnim programom matematike za IV razred osnovne škole (preuzeto iz dokumenta [36]):

Kao obrazovni ciljevi nastave matematike navedeno je da kod učenika treba da se konstruišu znanja „o krugu i kružnici kao ravnim površinama valjka i kupe“ i „crtanje i označavanje elemenata kružnice i kruga“. Kao sposobnosti i vještine kojima će učenici ovladati navodi se (od interesa za ovaj slučaj), između ostalih, i:

- (1) sposobnost i vještina prostornog organizovanja i orijentacije;
- (2) induktivnog mišljenja;
- (3) induktivnog analognog mišljenja;
- (4) različitih načina matematičkog izražavanja i komunikacije; i
- (5) logičkog i kritičkog mišljenja.

Međutim, u dijelu u kojem se opisuju poželjni ishodi nastave samo se navodi da će učenici moći da nacrtaju kružnicu zadanog središta i poluprečnika.

Obrazovni ciljevi su: Uočavanje kruga i kružnice na valjku i kupi; Precrtavanje kružnice sa kupe i valjka; Modeliranje krugova od papira; Određivanje elemenata kružnice na modelima origami-tehnikama. Ispitivanje položaja središta i crtanje kružnice šestarom; i Elementi kruga i kružnice.

U dijelu „Didaktičko-metodičke napomene“ ovog programa ponuđeno je slijedeće: „Već i sama struktura teksta koji je naveden, daje niz jasnih metodičkih uputsatava i učitelju. Međutim, potcrtavamo da smo u *intuitivnoj geometriji*. Redoslijed: učenici na predmetima prvo uočavaju krug, pa onda kružnicu. Precrtavaju kružnicu i isjecaju model kruga. Presavijanjem modela kruga uočavaju središte i intuicijom naslucuju uzajamni položaj tačaka kružnice i središta kružnice. Elemente kružnice, nakon ovakvog pristupa, lako je objasniti.“

Ni poreda najbolje volje, istraživači nisu bili u stanju da pronađu bar jedan element niti u programu niti u udžbenicima kojim se ispunjavaju gore pomenuti zahtjevi (1) - (5). Prirodno se pojavljuju pitanja:

- *Kako dizajnirati didaktičke situacije koja indukuje 'induktivno mišljenje'?*
- *Kojim alatima učitelj utvrđuje postojanje i razvoj kod učenika induktivnog analognog mišljenja?*
- *Kako se utvrđuje postojanje i razvoj kod učenika logičkog i kritičkog mišljenja?*

Po mišljenju autora ovog teksta, na primjer, pitanja „Da li je data tačka unutar, na, ili izvan kružnice?“ su zadaci posredstvom kojih se utvrđuje sposobnost orijentacije. Sem toga, blagom modifikacijom ovih zadataka nastavnik dizajnira okruženje u kojem se učenici na primjerima susreću sa logičkim principima 'isključenja trećeg' i 'nekontradikcije'.

U daljem, navodimo jedan od zadataka koji su studenti rješavali u okvirima pomenutog intervjua:

Zadatak 3.³ U drugom, trećem i četvrtom razredu osnovne škole učenike podučavamo pojmovima vezanih za krug i kružnicu.

- 3.1. Definiši kružnicu.
- 3.2. Nabroj elemente kružnice.
- 3.3. Kakvi su međusobni odnosi tih elemenata?
- 3.4. Definiši krug.
- 3.5. Neki od objekata povezanih sa krugom su, između ostalih, pokriveni su pojmovima 'unutrašnjost kruga' i 'spoljašnjost kruga'. Kako se opisuju ti pojmovi?
- 3.6. Opiši odnos tačke prema kružnici.
- 3.7. Opiši odnos prave prema kružnici.
- 3.8. Šta učenik drugog razreda osnovne škole treba da zna o krugu i kružnici da bi njegovo znanje procjenili kao nivo 1?
- 3.9. Šta učenik trećeg razreda osnovne škole treba da zna o krugu i kružnici da bi njegovo znanje procjenili kao nivo 1?
- 3.10. Šta učenik četvrtog razreda osnovne škole treba da zna o krugu i kružnici da bi njegovo znanje procjenili kao nivo 1?

Odgovori na pitanja⁴

³ Pitanja 3.8. – 3.10., očigledno, spadaju u domen metodike matematike (a time i domenu problematike matematičkog obrazovanja).

⁴ Odgovori na pitanja ovog zadatka ponuđeni su na nivou matematičkih znanja neophodnim realizatorima nastave matematike u nižim razredima osnovne škole.

3.1. *Kružnica* je skup tačaka u ravni podjednako udaljenih od jedne unaprijed izabrane tačke. Ta tačka naziva se *centar kružnice*, a 'jednako rastojanje' nazivamo *poluprečnik kružnice*. Centar kružnice najčešće označavamo sa C a poluprečnik (prečnik) najčešće označavamo sa r (odnosno sa R). Ovu kružnicu najčešće označavamo sa $k(C,r)$

3.2. Elementi kružnice (prema odgovoru 3.1) su: '*kružna linija*', *poluprečnik* i *prečnik kružnice*, i *centar kružnice*.

3.3. Poluprečnik je polovina prečnika: $R = 2r$. Centar kružnice polovi prečnik kružnice na dva poluprečnika. Odnos mjernog broja '*kružne linije*' i mjernog broja prečnika (poluprečnika) je konstantan.

3.4. Skup svih tačaka ravni omeđenih kružnicom nazivamo *krug*. Dakle, sve tačke X ravni koje su udaljene od centra C kružnice manje od poluprečnika r ($XC < r$) čine tzv. *otvoreni krug*. Ako tom skupu dodamo tačke kružnice $k(C,r)$ dobijamo *zatvoreni krug*. Zatvoreni krug najčešće označavamo sa $K(C,r)$.

3.5. Elementi kruga su, između ostalih, i pojmovi '*unutrašnjost kruga*' i '*spoljašnjost kruga*'. Termin '*unutrašnjost kruga*' je sinonim za pojam *otvoreni krug*. Sintagmom '*spoljašnjost kruga*' pokrивamo skup tačaka ravni čije je rastojanje od centra kruga veće od poluprečnika.

3.6. Odnos tačke Z prema kružnici $k(C,r)$, u skladu sa odgovorima u prethodnoj tački, determinisan je odnosno duži CZ i poluprečnika r . Dakle, ako je $CZ = r$, tačka Z je *na kružnici*; ako je $CZ < r$, tačka Z je *u kružnici*; i ako je $r < CZ$, tada je tačka Z *izvan kružnice*.

3.7. Neka je data prava p i kružnica $k(C,r)$. Postoji jedna jedina prava n koja prolazi tačkom C a normalna je na pravu p . Neka ta prava presjeca pravu p u tački P . Uporedimo duž CP sa poluprečnikom r . U skladu sa odgovorima u prethodnoj tački, imamo:

(1) Ako je rastojanje $CP = r$, tada tačka P leži na kružnici. U tom slučaju kažemo da prava p *tangira (dodiruje)* kružnicu $k(C,r)$ u tački P .

(2) Ako je $CP < r$, tada tačka P leži unutar kružnice $k(C,r)$. Ovo znači da prava *presjeca* kružnicu u dvijema (različitim) tačkama.

(3) Ako je $r < CP$, tada prava p i kružnica $k(C,r)$ nemaju zajedničkih tačaka.

3.8.-3.10. U skladu sa nastavnim programima matematike drugog, trećeg i četvrtog razreda osnovne škole u B&H, a rukovodeći se obaveznim udžbenicima za te predmete, da bi učeničko znanje procijenili kao nivo 1, potrebno je da:

- učenik prepoznaje krug i kružnicu (kad ih vidi);
- zna iskazati prihvatljivu skoro-definiciju kružnice i kruga;
- zna prepoznati i riječima iskazati elemente tih geometrijskih likova; i
- zna iskazati međusobne odnose elemenata kruga i kružnice.

Međutim, od učenika se u drugom razredu osnovne škole ne zahtijeva znanje i razumijevanje na nivou 1 već samo na nivou 0. Tek se u četvrtom razredu osnovne škole od učenika zahtijeva poznavanje definicije kružnice, ali, na žalost, ni tada se ne traži da učenici prepoznaju sve elemente tih figura.

Radi ilustracije, navodimo povratne informacije pri intervjuisanju / testiranju studenata (prazna mjesta u tabeli znače da studenti uopšte nisu odgovarali na postavljeno pitanje). One najbolje ilustruju odnos između školske matematike i matematičkih znanja neophodnih realizatorima nastave matematike.

Student / Pitanje	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
1	2.5	2.5		2.5		2		2.5			12.5
2	2.5	2.5			2.5	2.5	2.5	2	2	2	18.5
3	2.5	2	0				2	2.5	2.5	2.5	13
4	0	2.5	0		0	0	1	2.5	2.5	2	10.5
5	0	2	1.5	0		2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	16
6	0	0				0	0	0		0	0
7	2	0.5		0	0	2	2				6.5
8		2			0			1	1.5	1.5	6
9		2						1	2	2	7

10												0
11												0
12												0
13												0
14												0
15												0
16												0
17												0
18												0
20												0
21												0
22												0

Procjenjuje se da je van Hieleova teorija u potpunosti primjerena za opis onog što bi trebalo podučavati u osnovnoj školi, te da nivoi od 0 do 2 predstavljaju ciljeve koji bi trebalo dosegnuti. Dakle, namjera je da studenti prihvate zahtijev: Likovi se mogu prepoznati na osnovu svojih osobina. Pokazuje se da su te osobine fiksne ukoliko ih poredimo sa osobinama drugih likova. Na tom nivou učenici su u stanju da prepoznaju karakteristike likova koji su mu poznati. Međutim, njihova svojstva još uvijek ne može povezati. U ovoj fazi, na primjer, kvadrat još uvijek nije prepoznat kao poseban pravougaonik, ili romb (i/ili romboid).

U stvarnoj nastavnoj praksi, sudeći po iskustvu višegodišnjeg posmatranja studenata treće i četvrte godine studijskih programa za obrazovanje profesora razredne nastave (učitelja), kod istraživača je formirana slutnja koju izražavamo u obliku pitanja:

- *Koja su to školska znanja matematike studenti stekli pohađanjem srednje škole?* Čini se da geometrijske kompetencije ove populacije nisu dosegnule nivo 1 (prema van Hieleovoj teoriji razumijevanja geometrije).

- *Da li je moguće da svršeni učenici srednje škole (statistička velika većina) na geometriju gleda kao na fizički prostor - kad vidi geometrijske oblike prepozna ih (ali počesto ne može da se sjeti imena tih oblika)?*

4. Sinteza

U posljednjih dvadesetak godina, više autora je isticalo kompleksnu prirodu sistema Metodike nastave matematike kao jednog istraživačkog polja i njenu povezanost sa više različitih domena kao što su, na primjer, matematika, obrazovne nauke, epistemologija, istorija, psihologija, semiotika, sociologija (Steiner 1985, Biehler, Scholz, Straesser & Winkelmann 1994, Wittmann, 1995, Godino & Batanero 1997). Podsjećamo da je, na primjer, posledni ovdje pomenuti autor snažno sugerisao razlike između 'Didaktike matematike'⁵ definisane kao 'naučno i školsko polje istraživanja čiji su ciljevi identifikacija, karakterizacija, razumijevanje fenomena i procesa koji uslovljavaju podučavanje i učenje matematike' i domena pokrivenog kolokvijalnom sintagmom 'problematika matematičkog obrazovanja'. Prema ovoj determinaciji, domen 'problematike matematičkog obrazovanja' uključuje Metodiku matematike kao jedan podsistem. Takva distinkcija je plodonosna jer ističe neke razlikovne karakteristike teorijskih istraživanja u Didaktici matematike i njihov uticaj na matematičko obrazovanje. Potpuno prihvatljivo je da su istraživanja u Didaktici matematike interesantna najviše u onim posebnim studijama koje su egzaktno vezane za matematiku i/ili za matematičko obrazovanje, tj. za epistemologiju matematike, istoriju matematike i/ili matematičkog obrazovanja, psihologiju matematike i/ili matematičkog obrazovanja, sociologiju matematike i/ili matematičkog obrazovanja. Međutim, svaki od ovdje navedenih polja ima svoje škole, sisteme i specijalnosti. Znatno broj istraživača je duboko uronjen u istraživanje problema unutar ovih domena uz uvažavanje njihovih vlastitih metodologija. Na žalost, do otvorenih i svrsishodnih dijaloga između njih, s jedne strane, i istraživača matematičkog obrazovanja još uvijek ne dolazi.

Sva istraživanja u obrazovanju sa matematikom bave se pitanjima koja su u vezi sa matematikom: „matematička značenja“, „matematičke aktivnosti“, „matematički rezultati“ (učenika, nastavnika, zajednice, itd). Međutim, matematika u ovim izrazima i dalje je prilično nedefinisana i teško može opravdati zašto će značenje, aktivnost ili ishod biti okarakterisani kao matematika. Školska matematike se razlikuje od matematike eksperta, jer se dešava proces transformacije iz jednog tipa u drugi, iz znanja

⁵ Njemački sinonim za sintagmu 'Metodika matematike'.

eksperata do znanja za nastavu i iz znanja za nastavu da znanje neophodnom realizatorima nastave matematike. Sa druge strane, to je takođe priznanje da postoje sličnosti između školske matematike i matematičke nauke (na primer, koncepti, procedure, struktura, itd.). Odnos između nastavnih predmeta i odgovarajućih matematičkih objekata je prilično nejasan. Zato što su matematički objekti i pristupi različiti oblici u istoriji njihovog razvoja. Drugo, u većini škola matematike teme više nisu dio akademske matematike. Bilo kao lične ili kao društvene konstrukcije, materijalizovane u različitim kontekstima i na različite načine (na primer, u socijalne interakcije), školskog znanja iz matematike treba da je dogovor na ono što je lično ili društveno konstruisano, jeste ili nije matematika. Studije nastave i učenja matematičkih pojava u učionici i, posebno, studija aktivnosti za djecu, pod perspektivom razvoja matematičkog značenja, moraju složiti detaljnije kriterijume u odnosu na prirodu aktuelnog konstruisanog matematičkog saznanja.

Fokusirajući se na epistemološki status onoga što se interaktivno konstruiše u nastavnom procesu, može da se identifikacija ovog statusa obezbijedi (epistemološkim) analizama izjava učenika. U toku konstruisanja znanja u učionici, pretpostavlja se da učenici aktivno (voljno ili ne) konstruišu moguće (ispravne ili ne) relacije između znakova i/ili simbola, s jedne strane, i referenci konteksta, s druge strane. Te lične konstrukcije postaju zvanična znanja, umjenja i vještine u socijalnim pregovorima u procesu procjenjivanja uspješnosti realizacije nastave matematike. Prema tome, analiza matematičkih značenja unutar saznanje perspektive tj. onog što se proizvodi u procesu identifikacije uspješnosti može da se tretira kao školska matematika. Pri tome, obavezno treba uzimati u obzir povezanost između izgradnje značajnih relacija unutar sistema školskog znanja, s jedne strane, i referenci koje je ponudio nastavnik u procesu podučavanja kao i referentne sisteme posredstvom koji je interpretirao matematičke informacije, s druge strane. Dakle, razlike između naučne matematike, školske matematike i matematičkih znanja neophodnim realizatorima nastave matematike, između ostalog, leže i u različitim tipovima referentnih konteksta na koji se oslanjaju se koriste.

Literatura

korištena i/ili konsultovana pri pisanju teksta

- [1] J. Ainley, L. Bills & K. Wilson: *Designing Task for Purposeful Algebra*; CERME 3 (2003), WG 6, 1-3
- [2] M.G.Bartolini Bussi and M.A.Mariotti: *Geometrical Reasoning in the Mathematics Classroom*. In: N. Malara, - M. Menghini, - M. Reggiani, (eds.), *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995*. Roma: Seminario Nazionale di Didattica della Matematica e CNR, 1996, 74-85.
- [3] N. Bednarz, L. Radford, B. Janvier and A. Lepage: *Aritmetical and algebraic thinking in problem-solving*; PME 16 (1992), Vol. 1, 65-72
- [4] Biehler, Scholz, Strässer and Winkelmann (Editors): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*; MA: Kluwer, Norwell, 1994.
- [5] A.J.Bishop: *Spatial abilities and mathematics achievement*; Educational Studies in mathematics, 11(2000), 257-269
- [6] D.Bilbija, J.Milanković, D.A.Romano i N.Runjić: *Teorija van Hieleovih o razumjervanju geometrije*; MAT-KOL (Banja Luka), XV(2) (2009), 5-17
- [7] W.F.Burger and J.M.Shaughnessy: *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry*. Journal for Research in Mathematics Education, 17(1986), 31-48.
- [8] L.Cannizzaro and M.Menghini: *From geometrical figures to linguistic rigor: Van Hiele's model and the growing of teachers' awareness*. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (eds) Proceedings of PME XXV (2001), Utrecht, Netherlands, I-291
- [9] E.Castelnuovo and M.Barra: *Matematica nella realtà*. Torino: Boringhieri, 2000 and 1976 .
- [10] D.H.Clements: *Major themes and recommendations*; In: *Engaging young children in mathematics standards for early childhood mathematics* (editors: D.H.Clements and J.Sarama), Mahwah, Lawrence Erlbaum Association, Inc, 2004, 7-75
- [11] D.H.Clements and M.T.Battista: *Geometry and spatial reasoning*. In: D.Grouws (ed.), Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics. New York: Macmillan, 1992, 420-464.
- [12] M. de Villiers: *The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals*. For the Learning of Mathematics, 14(1)(1994), 11-18.
- [13] L. English (editor): *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.). Routledge, New York and London: 2008.
- [14] F.Furinghetti, B.Grevholm and K.Krainer: *Teachers education between theoretical issues and practical realization*. In: J. Novotna (ed), Proceedings CERME 2, 2001, Vol. 1, 265-268.
- [15] T.Fujita and K.Jones, *Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing*; Research in Mathematics Education, 9(1-2)(2007), 3-20.

- [16] Gobert, S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- [17] Hershkowitz R., Vinner S : *Children's concepts in elementary geometry : A reflection of teachers' concepts* Proceeding of the 8th International conference of PME. Darlinghurst Australia. 1984
- [18] J.Huttenlocher, N.Newcombe and E.Sandberg: *The coding of spatial location in young children*; Cognitive Psychology, 27(1994), 115-145
- [19] Alain Kuzniak, Jean-Claude Rauscher: *On the geometrical thinking of pre-service school teachers*; CERME 4 (2005), WG 7, 738-747
- [20] Marie-Jeanne Perrin-Glorian: *Studying geometrical figures at primary schools*; CERME 3 (2003), TG7, pp.1-10.
- [21] M. Марјановић: *Нека разматрања о настави математике*; Настава математике (Београд), XLVIII (1-2)(2003), 10-16
- [22] Мирослав Марјановић: *Дидактичка анализа – план за разматрање*; Настава математике (Београд), L (4) (2005), 5-12
- [23] M. Марјановић: *Дидактичка анализа почетних геометријских појмова, I*; Настава математике (Београд), LII (1-2) (2008), 23-31
- [24] Niss M : *Dimensions of geometry and assessment*; Perspectives in the teaching of Geometry for the 21st Century Icmi Study Kluwer 1988, pp 263-274
- [25] Marie-Jeanne Perrin-Glorian: *Studying geometrical figures at primary schools*; CERME 3 (2003), TG7, pp.1-10.
- [26] D.A. Romano: *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, IMO, Vol. I(2009), 1-10
- [27] D.A.Romano: *Teorija van Hieleovih o učenju geometrije*; Metodčki obzori (Pula), Vol. IV (1-2)(2009), No. 7-8, 95-103
- [28] D.A. Romano: *O geometrijskom mišljenju*; Nastava matematike (Beograd), LIV (2-3) (2009), 1-11
- [29] D.A. Romano: *Jedno utvrđivanje matematičkih kompetencija studenata učiteljskog programa*; Nastava matematike (Beograd), (Pojavaće se)
- [30] D.A.Romano, V.Todić i M.Vinčić: *Jedno utvrđivanje geometrijskih kompetencija studenata učiteljskog programa*, IMO, Vol. II (2010), Broj 3, 33-45
- [31] Sierpiska and J. Kilpatrick (editors): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (vols. 1 & 2). Kluwer Academic Publishers: Great Britain, 1998.
- [32] J.M.Zacks, J.Mires, B.Tversky and E.Hazeltine: *Mental spatial transformations of objects and perspective*. Spatial Cognition and Computation, 2(4)(2000), 315-332.
- [33] P.M. van Hiele: *System separation and transfer*. Educational Studies in Mathematics, 5 (1974), 413-417.
- [34] P.M. van Hiele: *Structure and Insight*. New York: Academy Press, 1986.
- [35] P.M. van Hiele and D. van Hiele-Geldof: *A method of initiation into geometry at secondary schools*. In: H. Freudenthal (ed.): *Report on methods of initiation into geometry*. Groningen: J. B. Wolters, 1958, 67-80.
- [36] *Nastavni plan i program matematike za devetogodišnju osnovnu školu u Bosni i Hercegovini*; Ministarstvo prosvjete, nauke i kulture Federacije Bosne i Hercegovine, Sarajevo 2009.