ISSN 1986-518X *ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA*

Vol. II (2010), Broj 2, 21-25
Prevod sa Engleskog jezika[1]

PORIJEKLO MATEMATIČKOG MIŠLJENJA[2]

Uri Leron

Sažetak: U ovom radu sisntetizovana su istraživanja u više različitih disciplina koje se odnose na kognitivno, sociološko i biološko porijeklu matematičkog mišljenja U namjeri da savremena stajališta o ovom fenomenu smjestimo u jedan koherentan okvir, u svom poznatnom članku iz 2003. godine, Uri Leron razlikuje tri nivoa matematike, svaki sa svojim specifičnim mehanizmima mišljenja. Prvi se odnosi na sposobnost razumjevanja i rada u tzv. *Rudimentalnu aritmetiku* koja je snažno utisnuta u mozak svakog ljudskog bića a odnosi se na sposobnost procesuiranja smisla brojeva i brojanja. Drugo je tzv. *Neformalna matematika* koja se odnosi na procesuiranje onih istih mehanizama kojima se služimo u svakodnevnom sazanvanju, kao što su simbolićki opisi, prirodni jezik, misaoni eksperimenti, socijalna kognicija i metofore. Treći nivo Uri Leron je nazvao *Formalna matematika*. Postoje više indicija da mišljenje na ovom nivou saznanja i razumjevanja matematike jeste u konfliktu sa standardnim poimanjem tzv. 'prirodnih' kognitivnih mehanizama

Abstract This paper synthesizes recent research from several disciplines, concerning the cognitive, social and biological origins of mathematical thinking. In order to put the emerging views into a coherent framework, Uri Leron distinguishes three levels of mathematics, each with its own thinking mechanism. First, the ability to do *Rudimentary Arithmetic* is hard-wired in the brain and is processed by a "number sense", just as colors are processed by a "color sense". Second, *Informal Mathematics* is processed by the same mechanisms that make up our everyday cognition, such as imagery, natural language, thought experiment, social cognition and metaphor. Third, there is some evidence that thinking at the level of *Formal Mathematics* may actually conflict with some of our mind's "natural" cognitive mechanisms.

Uvod

U ovom radu razmatrano je sljedeće pitanja: Da li je matematičko mišljenje prirodno ekstenzija zdravog razuma ili je to potpuno različita vrsta mišljenja?

Mogući odgovori na ovo pitanje su od velikog značaja iz teorijskih i praktičnih razloga. Teorijski, ovo je važan slučaj generalnog pitanja kako naš mozak radi. U praksi, odgovor na ovo pitanje ima važnu obrazvonu implikaciju. Nedavno, nekoliko knjiga i istraživačkih papira su se pojavili, koji se zasnivaju na ovom pitanju, tako da mogući odgovori, su daleko od toga da su precizni, i manje su jasni nego što su prije bili. Ova nova istraživanja uključuju spoznajne i biološke dijelove matematičkog mišljenja i došle su iz istraživačkih disciplina označenih kao neuronauka, spoznajna nauka, spoznajna psihologija, razvojna psihologija, antropologija, lingvistika i etnologija; njihovi predmeti su bili normalni odrasli ljudi, dojenčadi, životinje i pacijenti s oštećenjem mozga. Ova tijela istraživanja nsiu dobro poznata u matematičkom obrazovnom društvu, osim njihove relevantnosti i važnosti, sledeće svrha ovog papira je da da kratak pogled glavnih metoda i rezultata. Zaključci mnoštva istraživanja na prvi pogled djeluju kontradiktorno: Aspekti matematičkog spoznavanja opisani su kao ništa od utjelovljenja koja su zasnovana na generalnom mehanizmu do razmišljanja za šta je naš mozak bio „napravljen" da uradi normalnom selekcijom preko milion godina. Međutim, ove različitosti isčezuju

---

[1] Uz dozvolu autora tekst preveli Ognjen Romano i Daniel A. Romano.

[2] U. Leron: *Origins of Mathematical Thinking: A Synthesis*, Proceeding CERME 3 (2003), TG 1, pp. 1-8.

kada shvatimo da „matematika“ znači drugačije različitim ljudima, nekada čak i istoj osobi u različitim prilikama. U osnovi, glavni cilj ovog papira je da pokaže da sva istraživanja od različitih ljudi, koji dolaze iz različitih disciplina, mogu biti organizovana u šemu kada više izvježbamo našu izričitost i terminologiju.

Na kraju, izdvojiću tri niza matematike, zvanu Rudimentalna aritmetiku, Informalna matematika i Formalna matematika, svaka sa različitim metodama mišljenja. Bez ovog okvira rada, istraživački zadaci pokazuju da su jedni elementi matematike teški, a drugi laki za naučiti- naravno napredniji aspekti matematike – formalni jezik, oduzimanje i dokaz – mogu biti u konfliktu s našim „prirodnim“ mišljenjem.

Zbog ograničenja prostora, ne mogu ni da počnem da sprovodim pravdu nad mnogim tvrdnjama i podnaslovima ovog nevjerovatnog istraživanja. Mogu samo dati kratak pogled na ovu bogatu oblast, takođe odavajući preporuke glavnim izvorima. Za potpunije znanje, čitalac može pronaći informacije i pune preporuke u Dehaene (1997) i Butterworth (1999) za fazu 1; Lakoff & Nunez (2000) i Devlin (2000) za fazu 1 i 2; Cosmides & Tooby (1992, 1997) za fazu 3.

Glavni dio

Faza 1: Rudimentalna aritmetika

Rudimentalna aritmetika se sastoji od jedostranih operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, dijeljenja, upoređivanja, zasnovana na malom broju konkretnih predmeta. Istraživanja na dojenčadima i životinjama, kao i moždanim istraživanjima, pokazuje da sposobnost rađenja matematike na ovom nivou duboka – žica u mozgu i pokreće se pomoću „smisla za brojeve“, kao i što se boje pokreću pomoću „smisla za boje“. Odlične sinteze ovog istraživanja su Dehaene (1997) i Butterworth (1999). Teško je dokazati da je neka osobina „usvojeno“, prenijeta preko evolucijeske prirodne selekcije, ali jak dokaz se dobija zbog tri ispunjena uslova. Prvo, osobine u pitanju mogu potvrditi istraživačke predosti nasih lovačkih nastrojenih predaka; drugo, neka verzija ovih osobina postoji u našim neljudskim precima; treće, bebe već imaju ovu osobinu, čak i prije nego što imaju šansu da je nauče od psihičke i društvene sredine. U suštini, lako je shvatiti kako je Rudimetrijska aritmetika pomogla našim precima u preživljavanju: u održavanju broja pozicija i procjenjivanja broja voća (idenje na drvo s više voća) i broja neprijatelja.

Postoje mnogi eksperimenti koji pokazuju da neke životinje (šimpanze, pacovi i svinje) imaju „smisao za brojeve“. Očit primjer je eksperiment Karen McComb i njenih kolega pokazuje da kada lavica u Serengeti Nacionalnom parku u Tanzaniji spazi krdo nepoznatih lavova koji dolaze na njenu teritoriju, odlučiće da ih napadne samo ako je broj njenih sestara približno na teritoriji veći od broja pridošlica. Ovo je sve više zadivljujuće zato što izgleda da ona upoređuje dva broja pomoću osjećaja: ona čuje uljeze ali vidi (ili pamti) svoje sestre. „Mora da uporedi broj uljeza i sestara, zatim formira osjećaj u kojima su doživljeni i onda upoređuje ove oduzete brojeve.“

Isprva djeluje nemoguće procijeniti koje matematičke tvrdnje veoma mlada beba poznaje, ali su psiholozi koristeći nevjerovatne metode dobili rezultate. See Dehaene (1997) za razumljivo pregledanje i preporuku za originalnu istraživačku literaturu. Sljedeća tvrdnja je uzeta iz Lakoff & Nunez (2000, pp 15 – 16)

1. Sa tri ili četiri dana, beba pravi razliku između dva ili tri predmeta.
2. Sa četiri i po mjeseca beba „može reći“ da je 1+1=2 i 2-1=1
3. Ove sposobnosti nisu ograničene vizuelnim redom. Bebe mogu razlikovati broj zvukova. Od tri do četiri dana, beba može praviti razliku između dva ili tri brojna sloga.
4. Od oko 7 mjeseci, bebe mogu prepoznati brojnu jednakost između reda objekata i lupanja bubnja istog broja.

Ima previše detalja i varijacija da se sprovede pravda na istraživanje, ali ćitač može dobiti ideju iz kratkog opisa od jednakih do glavnih metoda koje se koriste: štopanje bebinog buljenja i povrede očekivanja istraživačkog paradigma. Kada beba neko vrijeme gleda ponavljanje jedva očekivane scene, postaće joj dosadno i gledaće sve kraće i kraće. Kada se prizor iznenada promjeni, ili se nešto neočekivano desi, bebino buljenje će postati duže. Istraživači su pokretali iza ekrana ispred bebinih ociju, jednog, onda dva kučeta i onda skolinili ekran da bi pokazali šta je iza. Bebe su tipično gledale duže kada su vidjele jedan ili tri kučeta, iza ekrana i uporedili ih sa dva. Ovaj eksperiment je ponavljan s brojnim izmjenama, s neizbiježnim zaključkom da su bebe rođene sa znanjem da je 1+1=2.

Faza 2: Neformalna matematika

Ovo je vrsta matematike, poznata svakom iskusnom nastavniku više matematike, koja se pokazuje učenicima u situacijama kada bi matematika u svojoj najformalnoj i najrigoroznijoj formi bila nedolična. Može da sadrži teme iz svih matematičkih oblasti i svih uzrasta, ali bi sadržala „teške eksperimente" (Cf. Lakatos, 1978; Tall, 2001; Reiner & Leron, 2001), iznesene pomoću figura, dijagrama, sličnosti iz svakodnevnog života, „tipičnih" primjera, i prethodnih učeničkih iskustava. Na prijmer, kada predaju grupnu teoriju, brojni instruktori koriste formalnu prezentaciju proporcije $(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$ uz sljedeću analogiju: Recimo da prvo obujete čarape a zatim cipele. Ako želite da ponovo izvršite ovu operaciju, morate prvo izuti cipele pa onda čarape. Da bi sta pronašli obrnutost kombinovanih operacija, morate kombinovati obrnutost u prevrnutom redu.

Nedavna istraživanja, kao i iskustva u učionici, pokazuju da je informalna matematika širina opšteg mišljenja, i ustvari se pokreće pomoću mehanizma koji čini naše svakodnevno saznanje kao prirodni jezik, teški eksperimenti, društveno stanje i metafora. To matematičko mišljenje je „otelo", starije i više opšti saznajni mehanizam u osnovi samo da bude očekivan uzeći u računanje da je matematika, osim Rudimetrijske aritmtike bila tu na oko 2500 godina-tek treptaj oka u evolucijskom pogledu.

Dvije knjige – Lakoff & Nunez (2000) i Devlin (2000) – pokazuju potpunu teoriju da bi pokazali kako je sposobnost rođenja matematike zasnovana drugim mehanizmom ljudskog poznavanja. Značajno za teze ovdje prezentovane je: obje teorije žele da objasne mislilački proces uključen u fazu dva matematike, tako da njihovi zaključci ne mogu da se prijave za fazu tri. Ustvari, kao što ću objasniti u sljedećem dijelu, ima razloga da se vjeruje da se njiovi zaključci ne prijave, (što se populacije tiče) za fazu tri matematičkog mišljenja.

Lakoff i njegove kolege su se mnogo godina raspravljali ubjeđujući slučaj metafore kao jasnog mehanizma ljudskog mišljenja. Nedavno, Lakoff & Nunez (2000) su protegli ovu raspravu na detaljan opis, kako je matematičko spoznavanje prvo ukorijenjeno u naše tijelo preko utjelovite metafore, onda istegnut na više apstraktno područje preko „konceptne metafore", održavanjem puta između izvornog domena i metnog domena, gdje je raniji vjerovatno više konkretan i bolje poznat nego kasniji. U njihovom proračunu, na taj način pokazuju kako se matematičko spoznanje gradi istim mehanizmom naše generalne lingivistike spoznajnog sistema.

Po ovo teoriji, naš konceptni sistem je više građen „od dna ka gore", počinjući od našeg utjelovitog znanja i gradi se na više apstraktnih koncepata. Bilo kako bilo, jedan zanimljiv okret na ovu sliku je predložio Tall (2001). Od kad mnogi dijelovi moderne matematike idu jako protiv naših „prirodnih" intuicija, teško je sagraditi povoljna razumijevanja za njih isključivo preko metaforičkog stepena učeničkog postojećeg kongitivnog sistema. Kako Tall pokazuje, moramo takođe uzeti u obzir proces koji ide u suprotnom pravcu. Neki rezultati formalne aksiomatičke teorije mogu se povratiti da bi proizvele više prečišćene intuicije od uključenog koncepta.

Devlin (2000) daje drugačiji proračun nego Lakoff & Nunez, ali opet jedan upućujući na pokazivanje kako matematičko mišljenje „otima" postojeći kongitivni mehanizam. Njegova tvrdnja je da metaforički „gen za matematiku" – naša urođena sposobnost da učimo i radimo matematiku – dolazi iz istog mjesta kao i naša lingvistička sposobnost, imanovana kao naša sposobnost „ izvan dometa" (rađenje teških eksperimenata). Devlin u zaklućku daje detaljan evolucijski proračun kako sve ove sposobnosti mogu biti uključene. Njegov proračun odgovara situaciji kada ljudi rade matematiku praveći mentalnu strukturu, i onda upravljaju bez ove strukture, ali ne u situacijama kada su ove struktore nedostupne učeniku. Na primjer, teško je razmisliti neku „konkertnu strukturu"koja će formirati iskren model jednolične nastavljajuće funkcije ili sporazum topologičnog prostora.

Faza 3: Formalna matematika

Ovaj termin „formalna matematika“ se ne odnosi na kontekst, već na formu napredne matematičke prezentacije, s punim nizom apstrakcija, formalnog jezika, obračunavanja. Činjenica da je razumiti formalnu matematiku teško za većinu učenika je dobro poznato, ali moje pitanje ide dublje: je li to proširenje zdravog razuma, ili sve zajedno različita vrsta mišljenja? Neka istraživanja, kao i stalni neuspijesi većine kolega studenata da to prikažu, predlaže da mišljenje uključeno u formalnoj matematici nije proširenje zdravog razuma; već da se ustvari može podudarati s „prirodnim“ mišljenjem. Gledajući kroz sočiva mlade i postojeće discipline evolutivne pshilogije, ovaj dokaz predlaže da se neki dijelovi modernog matematičkog mišljenja mogu podudarati s tim kako je naš mozak napravljen prirodnim izborom da radi „prirodno“.

Cosmides i Tooby (1992, 1997) su koristili tvrdnju izborom Wason kartu (koja testira ljudsko razumijevanje „ako P onda Q“ Wason & Johnson – Laird, 1972) da bi otkrili šta se odnosi na ljudske uključene razlogne „module“. U tipičnom primjeru izbora karti, pokazan je niz od od 4 karte, A T 6 3, i rečeno je da svaka karta ima slovo na jednoj, a broj na drugoj strani. Onda je izrečeno pravilo; „Ako karta ima vokal na jednoj strani, onda ima sličan broj na drugoj“, i postavljeno im je pitanje: Koje karte sigurno moras okrenuti, da bi vidio slaže li se s ovim pravilom? Neslavni rezultati su da je preko 75% ljudi, uključujući studente u naučnim disciplinama dalo netačan odgovor. Procenat negdje zavisi od P i Q sadržilaca i na poleđine priče, (tačni odgovori su A i 3).

Cosmides i Tooby su ovo prezentovali u brojnim vrezijama s istom formom (ako P onda Q). Dok klasični rezultati Wason tvrdnje pokazuju da ih je većina ljudi slabo uradila, Cosmides i Tooby su otkrili da je njihov predmet uradili uspješno u tvrdnji koja uključuje stanja „društvene zamjene“. U društvenoj zamjeni individualac prima neke povlastice, i očekuje se da plati neku cijenu. U Wason eksperimentu rade po činjenici „ako dobiješ povlastice, onda plaćaš cijenu“ (ako ti dam 20$, ti mi daješ svoj sat). Varalica je onaj ko uzima povlastice, a ne plaća cijenu. Cosmides i Tooby objašnjavaju da Wason – ova tvrdnja uzima u obzir socijalnu promjenu; tačan odgovor znači objelodaniti izdajicu. Dok su se predmeti iznijeli tačno u ovim situacijama, Cosmides i Tooby su teorizirali da naš um sadrži razvijenu „detektovanje izdajice algoritme“.

Još preciiznije za matematičko obrazovanje, Cosmides i Tooby su testirali njihov predmet na takozvani „prebacujući ljudski ugovor“ (matematički odnos „ako F onda P“), u kom su se tačni odgovori logičke socijalne zamjene razlikovali od matematičke logike. Njihovi rezultati su bili da su njihovi predmeti izbrali pređašnji, a ne kasniji. Djeluje da kad konflikt raste, logika socijalne zamjene pretiče matematičku logiku. Ovo dodaje novu fazu podrške, predvidljivost i objašnjenje na brojna otkrića (e. g. Hazzan & Leron, 1996), da su učenici skloni zbunjivanju između matematičkih propozicija i njima suprotnim.

Zaključci

Da li je matematičko mišljenje proširenje ili zdrav razum?

Sada možemo sagledati test preciznije. Po savremenom mišljenju u spoznajnoj nauci (e. g. Lakoff & Nunez, 2000; Pinker, 1997, 2002), zdrav razum je ono što naš um radi „prirodno“. To je skup procedura kao učenje maternjeg jezika, prepoznavanje lica, svakodnevno diskutovanje, društvene situacije, i korištenje rudimetrijske aritmetike – ona su uključena prirodnom selekcijom zato što su potvrdili neke preživljačke i reporoduktivne prednosti naših lovačkih predaka iz kamenog doba.

Ove procedure su prirodne u osjećaju jer su ili urođene ili lako uočljive svim živim bićima s normalnim razvićem, bezobzirnije od geografije, kulture, obrazovanja, i pola. Zbog toga što moderna matematika – kao druge činjenice moderne civilizacije kao pisanje ili vožnja – je mnogo mlada za evolucijske termine, jasno je da nemamo spoznajni sistem koji evoluira samo za matematičko mišljenje.Do te mjere da svi možemo raditi matematiku, moar biti bazirana na starijem mehanizmu koji su oteti od strane našeg uma za ovu novu svrhu.

Istraživačke ture na ovom papiru pokazuju da je ovo u suštini ono što ja nazivam Informalna matematika: pokreće se pomoću zdravog razuma, mehanizma jezika, socijalnog saznanja, mentalne mašte, teških eksperimenata i metafore. Iskustva u učionici takođe impliciraju da studenti imaju malo nevolja tražeći smisao matematike dok god je to pokazivano preko poznatih primjera i analogija. Ista iskustva, međutim, pokazuju da učenici imaju dosta poteškoća na prebacivanju na Formalnu matematiku. Djeluje kao da naš um ne sadrži spoznajni mehanizam koji se može oteti za ovu svrhu. Ovo ne znači da ne može biti urođena: posle svega, ljudi uspijevaju u takvim neprirodnim poljima kao u žongliranju deset lopti dok voze biciklo, ili sviranju Betovenove sonate. To znači da velika količina truda i vježba koja treba da se upotrebi, sadrži ogromnu količinu motivacije od strane učenika, i tada se oslobađa nevolja.

Istraživanja iz evolutivne psihologije (Cosmides & Tooby, 1992), upućuju da situacije u Formalnoj matematici mogu biti i gore od toga. Ne samo da nemamo spoznajne module koji se upotrebljavaju za ovu vrstu mišljenja; nego mogu biti u neposrednom sudaru u mišljenju koje smatramo prirodnim, kao što su rasprave o socijalnim situacijama.

Literatura

[1] J. H. Barkow, L. Cosmides, J. Tobby (1992). *The Adapted Mind: Evolutionary Psychology and the generation of Culture,* Oxford University Press.

[2] D. Bickerton (1995). *Language and Human Behavior,* Unevrsity of Washington Press.

[3] B. Butterworth (1999). *What Counts: How every Brain in Hardwired for Math,* Free Press.

[4] L. Cosmides & J. Tobby (1992). "Cognitive Adaptations for Social Exchange" in J. Barkow, L. Cosmides, J. Tooby (Eds.), *The Adapted Mind: Evolutionary Psychology and generation of Culture,* Oxford University Press, 163 – 228.

[5] L. Cosmides & J. Tobby (1997). " Evolutionary Psychology: A Primer", http://www. Psych.ucsb.edu/research/cep/primer.html

[6] S. Dehaene. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics,* Oxford University Press.

[7] K. Devlin (2000). *The Math Gene: How the Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are Like Gossip,* Basic Books.

[8] O. Hazzan & U. Leron (1996). "Students' use and misuse of mathematichal theorems: The case of Lagrange's theorem", For the learning of Mathematics 16:1, 23 – 26.

[9] I. Lakatos (1978). *Mathematics, Science, and Epistemology,* Philosophical papers Vol. 2, Edited by J. Worrall and G. Currie, Cambridge University Press.

[10] G. Lakoff & R. Nunez (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathemtatics Into Being,* Basic Books.

[11] S. Pinker (1997). *How the Mind works,* W. W. Norton.

[12] S. Pinker (2002). *The Blank Slate: The Modern Denial of Human Nature,* Viking.

[13] H. Plotkin (1998). *Evolution in the Mind: an Introduction to Evolutionary Psychology,* Harvard University Press.

[14] M. Reiner & U. Leron (2001). "*Physical Experiments, Thought Experiments, Mathematical Proofs*", Model – Based Reasoning Confrence (MBR '01), Pavia, Italy.

[15] R. Shepard (1997). " *The Genetic Basis of Human Scientific Knowledge*", in *Characteriying Human Psychological Adaptations,* CIBA Foundation 207, p 23 – 28

[16] D. Tall (2001). "*Conceptual and Formal Infinities*", Educational Studies in Mathematics, 48 (2&3), 199 – 238.

[17] Wason, P. (1966). "Reasoning", In B. M. Foss (Ed.), *New horiyons in psychology,* Penguin.

[18] Wason, P. and Johnson – Laird, P. (1972). *The psychology of reasoning: Structure and content*, Harvard University Press.