ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA
Vol. I (2009), Broj 1, 23-35
Pregledni članak

Teorije matematičkog obrazovanja
Prvi dio: RME - teorija

Daniel A. Romano

Odsjek za matematiku i informatiku Univerziteta u Banjoj Luci
Mladen Stojanovića 2, 78000 Banja Luka, B&H
e-mail: bato49@hotmail.com

Sažetak: U članku se opisuje, na bazi sintetizovanih informacije iz literature, teorija matematičkog obrazovanja poznata kao 'Teorija realističkog matematičkog obrazovanja'.

Abstract: In this article we describe and synthesize literature that was surveyed on the topic *realistic mathematics education (RME)*.

Ključne riječi: matematičko obrazovanje, Teorija realističkog matematičkog obrazovanja
Mathematical Subject Classification (2000): 97C50: Theoretical perspectives
The Mathematics Education Subject Classification (MESC): C30: (Cognitive processes. Learning theories)

1. Uvod

Ovaj tekst nastao je u namjeri da se čitalačkoj publici matematičkih tekstova ponudi serijal o savremenim teorijama matematičkog obrazovanja. Procjenjujući da su realizatori nastave matematike na prostorime prethodne Jugoslavije (u poslednjih petnaestak godina) bili uskraćeni u sagledavanju razvoja teorija matematičkog obrazovanja, namjera ovog serijala je - da kroz istorijski pristup, na pristupačan način, ponudi naše viđenje razvoja savremenih teorija matematičkog obrazovanja u svijetu, a posebno u Evropi, kroz sažetak dostupne literature o tim matematičkim subjektima.

Definisanje problema

Pregled literature počinje sagledavanjem definicionog problema: Kako pripremati matematička predavanja, bazirana na realističkom pristupu? Problem ovog determinisanja razdvojen je na nekoliko manjih pitanja - koja su fokusirana na po jedan poseban aspect definisanja. Za očekivati je - da objedinjenje uspješnog opisivanja pojedinačnih aspekata ovog pitanja bude više podesno za rukovanje. Ovi pojedinačni aspekti formulisani su kao pitanja:

- *Šta je realističko matematičko obrazovanje?*
- *Šta su karakteristike realističkog matematičkog obrazovanja?*
- *Kakva je veza između realističkog pristupa i konstruktivističkog pristupa?*
- *Kako pripremiti predavanja matematike baziranu na realističkom pristupu?*

Istraživački metod

Pri prikupljanju bazne literature - u cilju sagledavanja razvoja savremenih teorija matematičkog obrazovanja, korištena su dva načina. Prvi način je - pretraživanje internetom. Najvažniji rezultati mogu se naći pretražujući (internacionalne i nacionalne) konferencije o matematičkom obrazovanju, koje svoje proceedings'e stavljaju na uvid međunarodnoj matematičkoj javnosti, i pretraživanjem otvorenih časopisa koji pokrivaju matematičko obrazovanje. Pri tome, posebno izdvajamo konferencije CERME, PME i PME-NA. Sem toga, koristili smo se sljedečim izvorima informacija:

- Freudenthal Institute (aderesa na http://www.fi.ruu.nl), sadrži nekoliko on-line članaka o realističkom matematičkom obrazovanju, kao što su (na primjer) - remesa project i norma project.
- NCTM organizacija (aderesa na http://www.nctm.org) sadrži on-line časopis, kao i nacionalne standarde za podučavanje matematike Sjedinjenih Država, i
- The Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), koj je najveća i najambicioznija međunarodna studija o učeničkim uspjesima. Aderesa TIMSS centera je: http://wwwcsteep.bc.edu/timss ;
- Jedan broj on-line članaka o konstruktivističkom pristupu je takođe dostupan, na sljedećoj web-stranici:
  http://www.inform.umd.edu:8080/UMS+State/UMD-Projects/ MCTP/ WWW / Essays.html.

Drugi način istraživanja je istraživanje posredstvom biblioteka. Budući da Narodna i univerzitetska biblioteka Republike Srpske u Banjoj Luci, te Biblioteka Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Banjoj Luci - uopšte ne raspolažu bilo kakvom tekućom periodikom iz matematiökog obrazovanja (jer Ministarstvo nauke i tehnologije i Ministarstvo prosvjete i kulture Republike Srpske - ne izdvajaju sredstva za nabavku savremene literature), ovaj način bi davao skromne rezultate - pa se od njega odustalo. Biblioteke, uglavnom, raspolažu knjižnim fondom starijih izdanja (prije 1991).

2. Šta je Teorija realističkog matematičkog obrazovanja?

Teorija realističkog matematičkog obrazovanja (Realistic Mathematics Education - RME)[1] je teorija matematičkog podučavanja i učenja koja je nastala u Freudentalovom institutu u Utrechtu, u Holandiji. Ova teorije je kasnije prihvaćena u mnogim zemljema svijeta, kao što su (na primjer) Engleska, Njemačka, Danska, Španija, Portugal, Južna Afrika, Brazil, USA, Japan, Malezija (de Lange, 1996), Irska[2] i Indonezija[3, 4]. Sadašnja forma RME-teorije je uglavnom determinisana Freudentalovim gledanjem na matematiku (Freudenthal, 1991). Dva važna momenta njegovog gledanja na Matematiku su: Matematika mora biti u vezi sa realnošću, i - matematika je humana aktivnost. Dakle:

(1) Matematika mora biti bliska djeci i vezana za svakodnevne životne situacije. Međutim, termin 'realistička' - nije samo u vezi sa realnim svijetom već u vezi sa problemskim situacijama koje su realne u učeničkoj svijesti. Problem prezentovanja matematike učenicima posredstvom ove ideje – da matematika mora biti u vezi sa realnim svijetom – potrebna je, ali nije obavezna. De Lange (1996) je stanovišta da predstavljanje matematičkih problemskih situacija pri predavanjima i učenjima matematike može da bude i u vezi sa matematičkim primjenama, ili modeliranjem.

(2) Drugo, ideja da je matematika ljudska aktivnost, jako je naglašena. Matematičko obrazovanje treba biti organizovano kao proces ponovnog otkrivanja matematičkih istina, pri čemu učenici treba da stiču iskustva u procesima sličnim procesima kada su te matematičke istine otkrivane[5]. Smisao (ponovnog) otkrivanja je korak u procesu učenja pri čemu smisao nastavničkih uloženih napora je instrukciono okruženje nastavnog procesa. Na primjer, istorija matematike može biti korištena kao jedan od izvora inspiracija za dizajniranje kurseva. Čak šta više, princip ponovnog otkrivanja može takođe biti inspiracija za neformalne procedure rješavanja. Učeničke neformalne strategije često se mogu interpretirati kao naslućivanje, i uglavnom su više od formalizovanih procedura. U ovim slučajevima, process ponovnog otkrivanja se koristi konceptima matematizacije, kao vodičem.

Dva tipa matematizacije (eksplicitno formulisani Treffers'om (1987)), su - horizontalna i verzikalna matematizacija. U horizontalnoj matematizaciji, učenici se koriste matematičkim alatima

[1] Treba priznati da ime "Realističko matematičko obrazovanje (Realistic Mathematics Education) " ponekad proizvodi konfuziju. Razlozi zbog kojih je reforma matematičkog obrazovanja u Holandiji nazana „realističkom" - nije samo u tome što nastava matematike ima veze sa realnim životom već zbog naglaska da RME teorijski pristup nastavi matematike nudi učenicima problemske situacije, koje oni mogu zamisliti.

[2] *NCCA Review of Mathematics in Post-Primary Education*; Irish Math. Soc. Bulletin 57 (2006), 11–20

[3] Vrlo interesantno i korisno je pogledati doktorsku disertaciju: Ahmad Fauzan (2002) *Appliyng Realistic Mathematics Education (RME) in Teaching Geometry in Indonesia Primary Schools*; Ph.D. Thesis University of Twente, 1-362

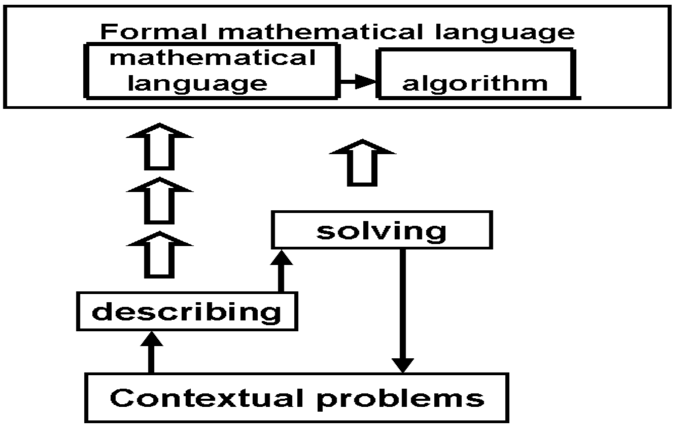
[4] Robert K. Sembiring , Sutarto Hadi and Maarten Dolk: *Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME*; ZDM Mathematics Education 40(2008), 927–939

[5] U našoj nastavnoj praksi takva tehnologija se naziva 'učenje otkrivanjem'.

koji im omogućavaju da organizuju i razriješe neki problem, smješten u realnu situaciju. Sljedeće aktivnosti su primjeri horizontalne matematizacije: identifikacija ili opis posebne matematike u nekom opštem kontekstu; šematizacija, formulacija i vizualizacija problema sa različitih aspekata; otkrivanje regularnosti, prepoznavanje izomorfnih aspekata u različitim problemima; transformacija realnog problema u matematički problem, kao i transformacija realnog problema u poznati matematički problem. S druge strane, vertikalna matematizacija je process njegove reorganizacije unutar jednog matematičkog sistema. Sljedeće aktivnosti su primjeri vertikalne matematizacije: predstavljanje relacija formulama, dokazivanje regulariteta, profinjenje i sređivanje modela, korištenje različitih modela, kombinovanje i integracija modela, formulisanje jednog matematičkog modela, i generalizacija.

Freudenthal (1991) tvrdi - da "horizontalna matematizacija involvira kretanje iz svijeta života u svijet simbola, dok „vertikalna matematizacija" znači kretanje unutar svijeta simbola". Ali, dodaje - da razliku između ova dva tipa nije uvijek lako moguće uočiti.

Ilustracija 1 (na slikovit način) prikazuje proces ponovnog otkrivanja. Ona pokazuje da obje matematizacije (i vertikalna i horizontalna) uzimaju učešća u razvoju baznog koncepta matematike ili formalnog matematičkog jezika.



Ilustracija 1: Model uputstva za ponovno otkrivanje (Gravenmeijer, 1994)

Proces učenja počinje kontekstualnim problemima. Koristeći aktivnosti horizontalne matematizacije, na primjer, učenik dobija jedan neformalni ili formalni matematički model. Inplementacijom aktivnosti, kao što su rješavanje, upoređivanje, sagledavanje kompleksnosti, učenik - u skladu sa vertikalnom matematizacijom, dolazi do matematičkog rješenja. Tada, učenik interpretira rješenje, kao i strategije koje je koristio u nekim (sličnim) kontekstualnim problemima. Na kraju, poslije ovoga, učenik raspolaže matematičkim znanjem.

Treffers klasifikuje matematičko obrazovanje u četri tipa - u vezi sa horizontalnom i vertikalnom matematizacijom (Ilustracija 2). Ovu klasifikaciju je detaljnije opisao Freudenthal (1991):

- *Mehanistički*, ili 'tradicionalni pristup', je zasnovan na drill-praksi i učenju šablona, pri čemu se individualnost osobe učenika tretira kao kompjuter ili mašina. Učeničke aktivnosti u ovom pristupu se baziraju na memorisanju šabloma ili algoritama. Greške se pojavljuju ako učenik pokuša da memorisani postupak primijeni na neki drugi, različit problem od onog koji je memorisao. U ovakvom pristupu, ni jedan oblik matematizacije nije korišten.
- *Emprijski pristup*, u kojem se student koristi materijalom - tako što se koristi iskustvom realnog života. Ovo znači da se student suočava sa situacijama u kojima dolaze do izražaja aktivnosti horizontalne matematizacije. Međutim, učenici nisu podstaknuti da prošire situaciju - u cilju da dobiju formulu ili model. Treffers (1991) poentira - da ovaj pristup ne omogućava da se nastavni materijal (koji se podučava) prihvati kao naučeni nastavni materijal, tj. ne obezbijeđuje matematičko znanje.
- *Strukturalistički*, ili 'Novi matematički pristup' je baziran na Teoriji skupova, dijagramima toka, i igrama - koji su vrsta horizontalne matematizacije. Ali, ovaj postupak pretpostavlja 'ad hoc' kreiranje svijeta, koji nema gotovo ništa zajedničko sa učeničkim životom.
- *Realistički pristup*, u kojem se realne stuacije ili kontekstualni problemi uzimaju kao polazna tačka podučavanja i učenja matematike. Ovaj pristup se koristi aktivnostima horizontalne matematizacije.

Ovo znači - da učenik organizuje problem, pokušava da identifikuje matematički aspekt problema, ustanovi pravilnosti i relacije. Tada, koristeći se aktivnostima vertikalne matematizacije, učenik razvija matematički koncept.

Tip Pristupa	Horizontalna matematizacija	Vertikalna matematizacija
Mehanistički	-	-
Empirijski	+	-
Strukturalistički	-	+
Realistički	+	+

Islustracija 2: Četri tipa matematičkog obrazovanja (Freudenthal, 1991)

U literaturi se može naći više afirmativnih izvještaja o primjeni RME-teorije Na primjer, u Sjedinjenim Državama, ova teorija je adaptirana u 'Matematika u kontekstu' u udžbenicima od 5 do 8 razreda. Poslije primjene ovih udžbenika u nekoliko škola u više saveznih država u Sjedinjenim Državama, preliminarni izvještaji su pokazali da je učenička uspješnost na nacionalnim testiranjima iz matematike - visoko porasla. (Romberg & de Lange, 1998). Dalje, u Holandiji postoje takođe pozitivni izvještaji koji se mogu tretirati kao indikatori uspješne primejne RME teorije u reformi matematičkog obrazovanja. Takođe, rezultati the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) pokazuju da učenici u Holandiji postižu više uspjeha u matematici (Mullis, Martin, Beaton, Gonzalez, Kelly & Smith, 1997).

3. Koje su karakteristike RME?

Istorijski, karakteristike RME teorije su u vezi sa poznatim van Hiele'ovim nivoima razumijevanja geometrije[6]. Prema van Hiele'u (de Lange, 1996) process učenja prolazi kroz tri faze: (1) učenik dostiže do prvog nivoa mišljenja čim može manipulisati poznatim karakteristikama šema tako da postane familijaran sa njima; (2) ako dosegne do mogućnosti da manipuliše sa međuodnosima karakteristika šema, učenik je dosegnuo drugi nivo; (3) učenik je dosegnuo treći nivo mišljenja kada je u mogućnosti da počne da manipuliše sa suštinskim karakteristikama međuodnosa posmatrane šeme.[7]

Tradicionalni način podučavanja startuje uz pretpostavku da učenici raspolažu sposobnostima kojima se identifikuje drugi, ili čak i treći nivo, dok realistički pristup obavezno počinje uz prihvatanje pretpostavke da su učenici dosegnuli i ovladali samo prvim nivoom mišljenja. Tada, startujući sa prvog nivoa, a u namjeri da se dosegne drugi nivo, počinje se sa fenomenima sa kojima je učenik familijaran, tj. koji su bliski učeniku. Slijedeći postavke Freudenthal'ove didaktičke fenomenologije, podučavanje treba početi sa kontekstualnim problemima. U daljem, koristeći se postupkom ponovnog otkrivanja i procesima progresivne matematizacije, učenik se uspješno razvija pod vođstvom nastavnika, postižući uspješan prelaz sa prvog na drugi nivo, ovladavši sposobnostima kojima se identifikuje taj viši nivo.

Kombinujući ova tri van Hiele'ova nivoa, Freudenthal'ova didaktička fenomenologija i Treffers'ova progresivna matematiazacija – rezultiraju sa sljedećih pet baznih karakteristika realitičkog matematičkog obrazovanja:

- *Fenomenološko istraživanje ili iskorištavanje konteksta;*
- *Upotreba modela i/ili premoštavanje vertikalnih instrumenata*;

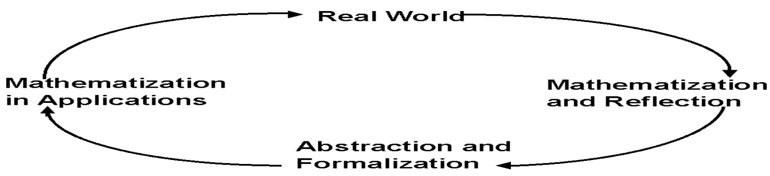
[6] O van Hiele'ovim nivoima razumijevanja geometrije čitalac može vidjeti, na primjer, u članku: Danijele Bilbija, Jovanke Milanković, Nikole Runjić i Daniela A. Romano, *Teorija van Hiele-ovih o razumjevanju geometrije*, MAT-KOL (Banja Luka), XV(2)(2009), 5-17

[7] O geometrijskom mišljenju treba pogledati članak ovog autora: Daniel A. Romano: *O geometrijskom mišljenju*; Nastava matematike (Beograd), LIII(3-4)(2009),

- *Upotreba učeničkog rada i njihovih konstrukcija*;
- *Interaktivni karakter procesa nastave, i*
- *Međusobno prožimanje više postupaka učenja i/ili tema (nastavnih jedinica)*

Ove karakteristike mogu se elaborirati na sljedeći način:

(1) ***Fenomenološko istraživanje i/ili korištenje konteksta***

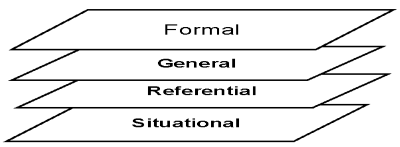


Ilustracija 3: Koncept i primejna matematizacije (De Lange, 1996)

U RME teoriji, polazna tačka nastavne treba za učenike da bude realna situacija (te im u skladu sa njom) odmah treba omogućavati da u nastavnom procesu budu u realnim situacijama. Ovo znači da nastavu ne treba započinjati deskripcijama formalnih sistema - kao okruženja za rad. Koncept korištenja prirodnih pojava u realnim okruženjima treba da bude osnova radne sutuacije u nastavnoj praksi. Proces ekstrakcije zaključaka iz realnih situacija, označen kao 'konceptualna matematizacija', po De Lange'u (1987), je radna situacija u kojoj treba da se nalaze nastavnik i učenici. Ovaj proces trebalo bi da stimuliše učenike da, koristeći se realnim okruženjima, pronalaze i identifikuju relevantnu matematiku, da ustanovljavaju postojanje šema, da vizuelizacijom dolaze do regulariteta, da razvijaju 'model' kao rezultat ovog matematičkog koncepta. Procesima refleskije i generalizacije učenici su u mogućnosti da razvijaju kompleksniji koncept. Potom, učenici mogu primjenjivati matematičke koncepte na nova područja realnog svijeta i, čineći to, snažiti svoje razumjevanje tih koncepata. Ovaj proces se naziva primjenjena matematizacija (Ilustracija 3).

(2) ***Upotreba modela i/ili premoštavanje vertikalnih instrumenata***

Termin 'model' odnosi se na situacione modele i matematičke modele, koje učenici izgrađuju. Ovo znači da učenici razviju modele u postupku rješavanja problema. Kao prvo, termin 'model' pokriva pojam situacionog modela - sa kojim su učenici familijarni. U procesu generalizacije i formalizacije, model može postati jedan entitet, sam po sebi. U tom slučaju, taj model može da se koristi kao model za matematičko zaključivanje. Četri nivoa modela u RME teoriji ilustrovani su niže (Ilustracija 4):



Ilustracija 4: Nivoi u RME - modelu (Gravenmejer, 1994)

- *Situacioni nivo,* gdje se specifičan domen - poznavanje situacije i konkretne strategije, koristi unutar konteksta date situacije;
- *Referentni nivo, ili ' level model of'*, pri čemu se modeli i strategije odnose na situaciju opisanu u datom problemu;
- *Opšti nivo, ili nivo 'model for',* pri čemu je matematički fokus na strategije dominantniji nad refernecama iz konteksta; i
- *Nivo formalne matematike,* pri čemu se radi sa konvencionalno usvojenim procedurama i notacijama.

(3) ***Upotreba učeničkog rada i njihovih konstrukcija***

Od učenika ze zahtijeva - da 'proizvode' više konkretnih stvari. De Lange (1995) iznosi mišljenje da zahtijevajući od učenika 'slobodnu produkciju', nastavnik podstiče njihovu vlastitu refleksiju na tu produkciju, što, naravno, stimulativno utiče na proces učenja, i, sem toga, podstiče ih da nastavljaju sa procesom traženja odgovora. U ovom procesu, nastavnikova uloga je uloga facilitatora (i uz blago i neprimjetno vođenje) - usmjerivača. Slobodno iznošenje stavova može formirati suštinski važan dio procjene uspješnosti kako nastavnika tako i učenika. Na primjer, od učenika se može tražiti da napišu esej, da naprave eksperiment, da prikupe (neke) podatke, i, na osnovu njih, pokušaju izvesti (neke) zaključke, da aranžiraju i druge učenike.

(4) ***Interaktivni karakter procesa nastave***

Interakcija između učenika, i između učenika i nastavnika, jedan je od važnijih dijelova RME-teorije (de Lange, 1996; Gravenmeijer, 1994). Konkretni razgovori, nastavničke intervencije, saradnja (pa čak i ćaskanje o tretiranom problemu) - su esencijalni elementi u konstrukciji procesa učenja. Pri tome, naravno, učenici koriste neformalne metode, kao polugu za dosezanje formalnog nivoa razumjevanja tretiranog problema. U ovom interaktivnom procesu, učenici se podstiču da daju objašnjenja, prave procjene, odlučuju da li su saglasni, ili ne, sa već izloženim stavovima, i, naravno, omogućava im se da postavljaju alternativna pitanja, te da iznose svoje refleksije na tok i rezultate konkretnog rada.

(5) ***Međusobno prožimanje više postupaka učenja i/ili tema (nastavnih jedinica)***

U RME-teoriji (de Lange, 1996; Gravenmeijer, 1994), međusobno prožimanje postupaka učenja i objedinjavanje nastavnih jedinica - je dosta važno. To se često naziva holistički pristup. Pri tome se misli da inkorporiranje primjena ovih tehnologija u nastavni proces implicira da se postiže jedan od dosta važnih poželjnih ishoda nastave – sagledavanje cijeline teme, te da nastavne jedinice ne treba tretirati kao neko izolovano znanje. Naprotiv, primjenom pomenute tehnologije – tehnologije ukrupnjavanja didaktičkih jedinica (S.Crvenković, B. Praštalo i D.A.Romano (2007)) – sigurno je da se postiže više vrijedan cilj nastave, posebno pri rješavanju problema. Procjenjuje se da je jedan od razloga što učenici sa poteškoćama primjenjuju stečena znanja, postupak kada se matematika uči 'vertikalno', pri čemu se o znatnom broju matematičkih objekata uči separatno, zanemarujući njihovo međusobno prožimanje. Sposobnost primjene stečenih zananja i vještina - je potrebnije nego znanja same algebre ili znanja same geometrije[8].

Niže su navedena dva primjera kontekstualnih problema, koji mogu (pri njihovom rješavanju) poslužiti za ilustraciju karakteristika ove teorije:

Primjer 1: *Crveni mrav i gusjenica*. Crveni mrav i gusjenica žive u simbiotičkoj zajednici u prirodi, jer crveni mrav štiti gusjenicu od predatora, dok (s druge strane) gusjenica ispušta kaplju meda za crvenog mrava. Predpostavimo, sada, da su crveni mrav i gusjenica daleko jedan od stabla drveta. Oni oba se sporo kreću jedan pored drugog. Crveni mrav brzinom 1.5 cm/s, a gusjenica 0.3 cm/s. Poslije koliko sekundi će se susresti. Predpostavimo da je bogomoljka 30 cm daleko od gusjenice, i da joj se približava brzinom od 5cm/s. Da li će bogomoljka dosegnuti do gusjenice prije nego crveni mrav?

Primjer 2: *Kijang and Colt L-300*. Studenti poslediplomske škole *SLTP Realita* se spremaju da pođu na kampovanje. Ima 96 osoba uključujući nastavnike i studente. Njihov prtljag, oprema, i potrebštine su spakovane u 64 kutije jednakih dimenzija. Organizaror želi da iznajmi dovoljan broj automobila - da svi ljudi i sve stvari mogu da se prebace do mjesta za kamp. Imaju mogućnost da biraju između dva tipa vozila: Kijang (šest sjedišta, prostor za pet kutija) i Colt L-300 (8 sjedišta i prostor za 4 kutije)

1. Kakvu kombinaciju automobila bi vi sugerisali organizatoru? (Koristeći formalne i neformalne matematičke procedure).
2. Koji matematički koncept može objasniti korištenje gornjeg konteksta? Objasniti svoj odgovor (do u detalje).
3. Pokušajte prepoznati karakteristike RME pristupa u ovom problemu.

[8] O geometrijskom mišljenju, pogledati sugestiju u fusnoti 7, a o algebarskom mišljenju pogledati članak: Daniel A. Romano: *Šta je algebarsko mišljenje?* MAT-KOL (Banja Luka), XV(2)(2009), 19-29

Razlika između tradicionalnog i RME pristupa strukturi nastavnog sata može se ilustrovati na sljedeći način:

Tradicionalna nastavna praksa	**Uvodni dio časa** Uvod u nastavni jedinicu, Pregled domaće zadaće	**Postavljanje problema** Nastavnik daje definiciju i terminologiju, te nastavlja sa dva ili tri problema, pozivajući sve učenike da rješe probleme	**Rješavanje zadataka** Učenici pokušavaju da riješe postavljene probleme / zadatke uzete iz obaveznog udžbenika, koristeći se naučenom terminologijom	**Završni dio časa** Nastavnik ističe nekoliko problema iz obaveznog udžbenika, i zahtijeva da ih učenici urede kao domaću zadaću
RME-pristup	**Uvodni dio časa** Uvod u nastavnu jedinicu	**Učenički rad** Učenici rade individualno i u parovima elaboriraju njihova vlastita rješenja problema	**Diskusija** Nastavnik predstavlja novi kontekstualni problem, učenici rade u grupama, nastavnik organizuje razgovor o temi koja je pokrivena problemima	**Završni dio časa** Nastavnik predstavlja zključke na postavljena pitanja, nastavnik i učenici razgovaraju o zaključcima

4. Kakva je veza između realističkog pristupa i konstruktivističkog pristupa?

Zbog značajnog broja sličnosti sa RME-teorijom, teorija matematičkog obrazovanja „Konstruktivizam u matematičkom obrazovanju“ - uključena je u ovaj pregled. Neke razlike biće istaknute. Uopšteno govoreći, pod konstruktivizmom u obrazovanju podrazumijeva se da program podučavanja počinje filozofijom - da učenicima treba davati slobodu da se koriste svojim vlastitim konstrukcijama i/ili rekonstrukcijama. Tri tipa konstruktivizma koji se koriste u matematičkom obrazovanju su poznati kao:

- **radikalni konstruktivizam**: *znanje ne može jednostavnio biti prebačeno kao konfekcijski proizvod od roditelja djeci, ili od učitelja / nastavnika učenicima, već mora biti aktivno izgrađeno u njihovom vlastitom umu* (Glasersfeld, 1992). Ovdje učenici, na uobičajeni način, obrađuju značenja i, kada školski programi propuste da razviju neka značenja, učenici ih sami kreiraju. Ernest (1991) iznosi nedostatak ovog tipa konstruktivizma, tvrdeći - da u ovom nastavnom procesu, dolazi do izražaja socijalna dimenzija - koju stvara okruženje, tako da učenici stiču znanja i sposobnosti, i ovladavaju vještinama u zavisnosti od civilizacijskih, kulturoloških i političkih opredjeljenja socijalnog miljea.
- **socijalni konstruktivizam**: Ernest (1991) je kreirao novi tip konstruktivizma, nazvanog socijalni konstruktivizam, koji *na matematiku gleda kao na jednu socijalnu konstrukciju - što podrazumijeva: da će učenici moći bolje konstruisati svoje vlastito znanje kada je to znanje utopljeno u tekuće socijalne procese* (Ernest, 1991); i
- **socio-konstruktivizam**: Ovaj tip socijalnog konstruktivizma razvijen je samo kao jedan matematički obrazovni sistem. Karakteristike ovog tipa matematičkog obrazovanja su vrlo slične karakteristikama RME-teorije. Ova teorija sugeriše da matematiku treba podučavati i učiti tako da, pri rješavanju zadataka i matematičkih problema, učenici treba da su u interakciji - kako sa nastavnikom tako i sa ostalim učenicima, te da se učenici stimulišu da nastavne ciljeve dosežu na bazi razvoja njihovih vlastitih strategija (Cobb, Yackel & Wood , 1992).

Na činjenicu da je socio-konstruktivizam jako blizu teoriji RME ukazivali su Gravenmeijer (1994) i de Lange (1996). Postoje dva glavna momenta po kojima se procjenjuje bliskost ovih teorija (de Lange, 1996). Prvi - obje teorije, i socio-konstruktivizm i teorija realitičkog matematičkog obrazovanja, razvijene su nezavisno od konstruktivizma. Drugo, u oba pristupa, učenici se koriste pogodnostima što mogu da dijele svoja iskustva sa drugima. U stvari, de Lange (1996) iznosi tvrdnju o kompatibilnosti većeg dijela istih ili vrlo sličnih pogleda socio-konstruktivizma i RME-teorije na karakteristike kako same matematike tako i matematičkog obrazovanja (podučavanja i učenja). Oni se ogledaju u sljedećem: (1) obje protežiraju ideju da je matematika jedna ljudska aktivnost; (2) da se matematičko učenje dešava kad učenici pronalaze i razvijaju efektivne puteve rješavanja zadataka / problema (Streefland, 1991; Treffers, 1987); i (3) obje imaju za cilj - da matematičko djelovanje transformišu u matematičke objekte (Freudenthal, 1991).

Glavna razlika između RME pristupa i konstruktivističkog pristupa je u tome - da je (u suštini) RME-teorija razvijena samo sa ciljem da se primjenjuje na matematičko obrazovanje, dok je konstruktivizam opšta teorija obrazovanja, i može se koristiti u mnogim subjektima (de Lange, 1996). Međutim, Gravenmeijer (1994, p.81) ističe da je "razlika između socio-konstruktivizma i realističkog pristupa matematičkom obrazovanju i u tome što socio-konstruktivizam ne nudi postupak (ponovnog) otkrivanja, kao nastavnu tehnologiju u razvoju učenika.“ Drugim riječima, u socio-konstruktivističkom priostupu, nastavnik se ne mora koristiti heurističkom tehnologijom, već se upotrebljava ranije stečeno iskustvo, kao i istraživački praktični putevi u rješavanju zadataka / problema, kao tehnologije učenja. Međutim, podsjetimo - da je, u RME pristupu, ova tehnologije važna i poznata je kao postupak (ponovnog) otkrivanja.

5. Kako pripremiti predavanja matematike, bazirana na realističkom pristupu?

Streefland (1991) je pripremio predavanja - bazirana na realističkom pristupu u matematičkom obrazovanju – predavanja o razlomcima u osnovnoj školi – bazirajući se na konstruktivistički princip ’tri nivoa’: (1) lokalno, ili osnovnoškolski nivo, (2) globalno, ili akademski nivo, i (3) teorijski nivo.

(1) *Školski osnovni nivoi*

Na ovom nivou, predavanja su oblikovana vodeći računa o svim karakteristikama RME–teorije, i potpuno su fokusirana na to da konstrukcije koje pri tome budu realizovane budu unutar koncepta horizontalne matematizacije. Prvo, jedan otvoreni materijal je uveden u nastavnu situaciju i (na taj način) ostvarena mogućnost da se nastavni proces odvija primjenom metode ’slobodnih konstrukcija’ – metodim otkrivanja. Dakle, RME-karakteristike se u procesu podučavanja realizuju tako: (1) radne situacuacije u uvedenom materijalu su realne, i, kao takve, mogu poslužiti i kao izvor inspiracija, ali i prostor primjena,koristeći se pri tom smislenim kontekstima koje imaji mogućnost matematizacije materijala; (2) dovođenje u vezu sa sadržajima drugih nastavih jedinica, i (3) pravljenje kolekcije postupaka tokom nastavnog procesa - u formi simbola, dijagrama, nastavnih situacija ili modela; na kraju, (4) - učenje na bazi učeničkih sagledavanja argumentacije za izgrađene konstrukcije, poredstvom postupaka kao što su međusobna interakcija, razgovori, rasprave i usaglašavanje. Dakle, ovo je situacija u kojoj obrazovni princip interakcije dolazi do izražaja. Ovo znači da je učenički doprinos u njihovom vlastitom učenju zagarantovan. Učenik može biti ohrabrivan da slijedi ovu vrstu konstrukcionih aktivnosti, dajući mu zadatak da bude lider u ovom procesu.

(2) *Akademski nivo*

Materijal pripremljen na školskom nivou se sada koristi u skladu sa njegovim matematičkim i didaktičkim bitnostima - u cilju realizacije opštih namjera programa kursa. Ovo znači da uspjeh - koji je postignut na osnovnom nivou, mora biti nastavljen i na ovom višem nivou.

(3) *Teorijski nivo*

Sve aktivnosti, koje su našle mjesto u prethodna dva nivoa, kao što su (na primjer) dizajniranje i razvoj, didaktička odmjerenost, isprobavanje u učionici, - formira klasu izvora za teorijsku produkciju, i može poslužiti kao generativni materijal za ovaj nivo. Dakle, može poslužiti u cilju osmišljavanja forme jedne teorije, na lokalnom nivou jednog posebnog područja učenja. Koristeći se metodom razvojnog istraživanja, ova lokalna teorija se testira u učionici, a potom revidira, i ponovo testira u sljedećem razvojnom ciklusu.

U namjeri pripremanja predavanja po RME–toeriji, komponente tematskog plana treba identifikovati i povezati sa karakteristikama realističkog pristupa matematičkom obrazovanju. Te komponente su: ciljevi, sadržaj, metodologija, i poželjni ishodi.

(i) Ciljevi; De Lange (1995) je okarakterisao tri nivoa ciljeva u matematičkom obrazovanju: niski nivo, srednji nivo i viši nivo. U tradicionalnom programu, ciljevi su bili, manje ili više, jasni. Na primjer, učenik je trebalo da je sposoban riješiti linearnu jednačinu, koristeći se specifičnim metodom za to. Međutim, većina ciljeva tradicionalnog programa je sada klasifikovana kao - ciljevi nižeg nivoa, koji se mogu identifikovati kao vještine memorisanja formula i jednostavnih algoritama, te kao sposobnost ispravnog definisanja termina (terma). U realističkom pristupu matematitičkog obrazovanja, ciljevi se klasifikuju kao 'sredni' i 'viši' ciljni nivoi. Na srednjem nivou, trebalo bi da su izgrađene veze između različitih alata donjeg nivoa i koncepata, i integrirane u jednu cjelinu, iako ne mora biti jasno kojoj nastavnoj jedinici pripadaju, ali moraju se steći vještine rješavanja jednostavnih problema, čak i bez jedinstvenih strategija. Ovo znači – da, za nastavnika i učenika, planirani ciljevi nisu uvijek odmah jasni. Međutim, novi ciljevi stavljaju u prvi plan vještine rezonovanja, komunikacije, te razvoj kritičkog stanovišta. Ovo se popularno naziva vještina mišljenja 'višeg reda'. Da zaključimo, u namjeri da redizajniramo jedno predavanje zasnovano na realističkom pristupu matematičkog obrazovanja, ono mora da uključuje ova dva tipa ciljeva.

(ii) Materijali; De Lange (1996) je ukazao da materijali treba da budu asociani sa aktivnostima iz realnog života, pri čemu domen na koji se odnose, situaciona znanja kao i strategija - treba da se koriste (tako) u okvirima situacionih konteksta. Jedna posebna vrsta kontekstualnih problema treba da bude integrisana u curriculum od samog početka. Uopšteno govoreći, RME razvija potrebu poronalaženja kontekstualnih problema, koji omogućavaju široki spektar procedura rješavanja, preferirajući one koji se mogu razmatrati kroz interakciju, već ranije identifikovane kao pogodne za realizaciju nastavnog procesa posredstvom progresivne matematizacije.[9]

(iii) Aktivnosti; Uloga realizatora nastave mateamtike u učinoici (pri primjeni RME principa) je uloga fasilitatora, organizatora, vodiča, i, naravno, evaluatora (de Lange, 1996; Gravenmeijer, 1994). Oslanjajući se na proces progresivne mateamtizacije, generalno bi se moglo zaključiti da je uloga nastavnika :

- Pripremiti i dati učenicima jedan kontekstuačni problem u vezi sa - planiranom za obradu nastavnom temom, kao polaznu tačku.
- Dati učenicima putokaz, pišući na tabli, ili davajući individualne instrukcije - ako su učenici podijeljeni u grupe, ukoliko im takva pomoć treba u toku početnih aktivnosti.
- Stimulisati učenika da, kroz međusobnu vođenu (i kontrolisanu) komunikaciju, upoređuju njihove rezultate. Podsticati diskusiju - u cilju interpretacije situacionih pristupa datog kontekstualnog problema, uz fokusiranje adekvatnosti i efikasnosti ponuđenih različitih procedura rješenja problema.
- Predpostavimo, sada, da su učenici našli neko rješenje problema. To znači da su učenici slobodni da obave istraživanje na njihovom vlastitom nivou, izgrađujući tako svoje vlastito iskustveno znanje i nalazeći skraćeni put, na njihov specifičan način.
- Dati još jedan (ranije pripremljen) problem, unutar istog konteksta. .

Drugim riječima, uloga učenika u nastavnom procesu RME tipa je uglavnom njihov individualni rad, ili rad u grupama. Njihovo učešće znatno zavisi od njih samih. Oni ne treba da očekuju od nastavnika da procjenjuje njihove odgovore, ili da ih vodi do nekih standardnih procedura rješavanja problema. Treba ih stimulisati da slobodno nude svoja rješenja problema.[10]

[9] Radi ilustracije, može se pogledati članak - Bojan Kovačević, Daniela Kreća i Daniel A. Romano**:** *Metodska obrada teme za VIII razred osnovne škole „Linearne funkcije i linearne jednačine“*, MAT-KOL (Banja Luka), XIV(3)(2008), 33-68

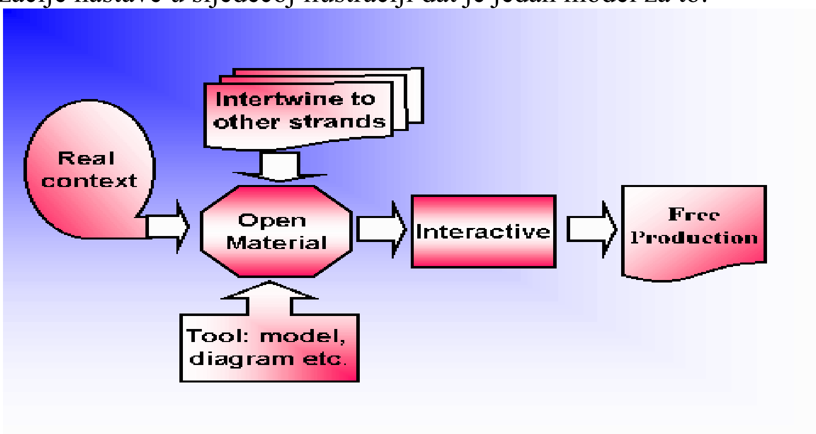
[10] Radi ilustracije šta se misli kada se govori o inventivnosti, treba pogledati anegdotu u aneksu ovog teksta (koju sam dobio zahvaljujući ljubaznosti Tomislava Đurina, mog prijatelja)

(iv) Procjenjivanje uspješnosti; U Holandiji, odavno vrše istraživanja u cilju procjene uspješnosti realizacije nastavne prakse, bazirane na RME gledištima. Tamo su odavno osmišljeni neki ključevi koji im omogućavaju procjenu uspješnosti (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). U stvari, praveći procjene u samoj nastavi, nastavnik može tražiti od učenika - da napisu eseje, kao eksperiment, sumirajući podatke, da sami dizajniraju vježbe - koje bi se mogle koristiti u procesu testiranja, ili da dizajniraju test za druge učenike. Procjene uspješnosti mogu biti nastavljene - davanjem i kontrolom urađenih domaćih zadataka. Ali, u zavisnosti od nacionalnih nastavnih standardizovanih testova, procjene uspješnosti primjenjivanih procedura bi trebalo da se reflektuju kroz ciljeve nastave matematike, posredstvom izmjena i curriculuma.

U vezi sa procjenama uspješnosti primjene RME –teorije u nastavnoj praksi, De Lange (1995) je formulisao sljedeće principe za procjenu, koji mogu poslužiti kao vodić za izvršenje procjenjivanja uspješnosti.:

(1) Primarna svrha testiranja je podizanje kvaliteta podučavanja i učenja. Ovo znači da mjerenje uspješnost nastavnika i učenika treba vršiti tokom nastavnog procesa, i planirati ih kao jedan od ciljena nastave, tj. tretirati ih kao jedan od obaveznih elementata planiranja.
(2) Metode za procjenu trebalo bi da omogućuju - da učenici pokažu šta oni znaju više od onog šta manje znaju. To bi trebalo da se uradi posredstvom rješavanja problema / zadataka - koji imaju više od jednog rješenja i, sem toga, ta se rješenja mogu dobiti raličitim strategijama.
(3) Procjenjivanje bi trebalo operacionalizovati kroz sve ciljeve nastave matematike - na svim nivoima obrazovanja, sva tri nivoa osnovne škole, i u srednjoj školi.
(4) Kvalitet mateamtičke uspješnosti nije determinisan posredstvom nekih dostupnih objektiviziranih pokazatelja. U ovom slučaju, objektivni test i mehanički test trebalo bi da budu reducirani na sakupljanje onih pokazatelja, posredstvom koji bi bilu u situaciji da stvarno vidimo - da li učenici razumiju rješavani problem.
(5) Alati za procjenjivanje bi trebalo da budu praktični, primjenljivi u školi, te dostupni vanjskim izvorima.

Za sagledavanje međuzavisnosti komponenata ovog izvještaja - koji se odnosi na sugestiju planiranja i realizacije nastave u sljedećoj ilustraciji dat je jedan model za to:



Ilustracija 5: Jedan model za RME organizacuiju priprema predavanja

Proces dizajniranja počinje formiranjem 'otvorenog materijala', koji ima pogodnosti da proizvodi tzv. 'slobodne produkcije'. Tada, karakteristike RME-teorije se mogu uočavati u realizaciji nastave ako se pripreme naprave, uvažavanjem sljedećeg:

- Postavljajući namijenjeni materijal u realnost, polazeći of značajnih konteksta koji imaju potencijal da proizvode matematički materijal; i
- Uklapajući druge didaktičke jedinice, i
- Proizvodeći alate u simboličkim formama, dijagramima i situacijama ili kontekstualnim modelima tokom procesa učenja uz kolektivni napor;
- U dijelu predviđenom za aktivno učešće sudionika, u skladu sa nastavnim planom, obezbijediti aktivno učešće učenika kroz komunikaciju sa nastavnikom ali i među učenicima, posredstvom otvorenih diskusija, razgovora, i kroz saradnju. U ovoj situaciji učenicima se otvara mogućnost da rade sa matematikom ili da rade matematiku, da razgovaraju o matematici i tome slično, i

- Procjenjivanje materijala može biti razvijeno u formi otvorenih pitanja, koji bi vodili učenike u procesu stvaranja 'slobodnih proizvoda'. Sa procjena uspješnosti trebalo bi da učenici budu upoznati tokom, ili nakon nastavnog procesa, ili bi te informacije trebalo da dobiju posredstvom domaće zadaće.

6. Zaključci

U ovom dijelu, podsjetićemo se odgovora na sva postavljena pitanja:

1. Šta je teorija realističkog matematičkog obrazovanja?

Teorija realističkog matematičkog obrazovanja je jedna od teorija matematičkog obrazovanja, originalno razvijena u Holandiji. U toj teoriji, podrazumjeva se da je matematika ljudska aktivnost, te da mora biti u konekciji sa realnošću: učenici koriste realne situacije iz stvarnog svijeta, kao izvora koncepta razvoja, ali i kao prostor za primjene - posredstvom horizontalne i vertikalne matematizacije.

2. Koje su karakteristike realističkog matematičkog obrazovanja?

Realističko matematičko obrazovanje ima pet karakteristika: (1) korištenje životno realnih konteksa, kao startnih pozicija za podučavanje i učenje; (2) korištenje modela kao mosta između apstrakcije i realnosti, koji pomažu učenicima kod učenja mateamtike - na različitim nivoima apstrakcije; (3) korištenje aktivnog učeničkog učešća u nastavnom procesu, kroz njihovu slobodno iskazivanje mišljenja, ili kroz tzv. proces učenja (ponovnim) otkrivanjem, kao rezultat njihovog ličnog bavljenja matematikom; (4) interakcija između učenika i nastavnika, kao i između samih učenika, je esencijalna za podučavanje i učenje matematike; i (5) postupci objedinjavanja didaktičkih jedinica, kao i veze matematike sa drugim disciplinnama, te intelektualni izazovi iz realnog svijeta su važna karakteristika RME-teorije.

3. Kakva je veza između realističkog pristupa i konstruktivističkog pristupa?

Realistički pristup podučavanju i učenju matematike je dosta sličan socio-konstruktivističkom pristupu podučavanja mateamtike, osim što ovaj poslednji pristup obavezno ne koristi procedure učenja otkrivanjem. Drugim riječima, u socio-konstruktivističkom pristupu, nastavnik se ne mora (kao obaveznom) korititi heurističkom metodom, niti metodom rješavanja problema - po ugledu na stečena iskustva i istraživanja praktičnih puteva pronalaženja rješenja.

4. Kako pripremiti predavanja matematike bazirana na realističkom pristupu?

Predavanja iz matematike bi trebalo tako pripremati da u pripremljenom materijalu do izražaja dođu sve karakteristike RME-teorije. Način koji se sugeriše kao jedan od puteva pripreme nastavnih materijala, uz uvažavanje pomenutih načela ove teorije, dosta dobro može se vidjeti na ponudjenim primjerima u velikom broju publikovanih članka.

Literatura

Konsultovana i korištena pri pisanju ovog teksta:

[1] Hayley Barnes (2005): *The theory of Realistic Mathematics Education as a theoretical framework for teaching low attainers in mathematics*; Pythagoras 61 (June), 42 – 57

[2] Cobb, P.,E. Yackel, and T.Wood (1992). *A Contructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics education*. Journal for Research in Mathematics Education, 23(1), 2-33.

[3] S.Crvenković, B. Praštalo i D.A.Romano (2007): *Principi nastavne tehnologije ukrupnjavanja didaktičkih jedinica;* Mat-Kol (Banja Luka), XIII (1), 5-15

[4] Paul Dickinson and Frank Eade (2005): *Trialling Realistic mathematics Education (RME) in English Secondary Schools*; Hewitt, D. (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics; 25(3), 1-14 pp

[5] Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* Hampshire: The Falmer Press.

[6] Erik De Corte, Fien Depaepe, Peter Op 'T Eynde & Lieven Verschaffel (2005); *Comparing mathematics education traditions in four European countries: The case of the teaching of percentages in the primary school*; The Mathematics Education into the 21st Century Project Universiti Teknologi Malaysia Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education Johor Bahru, Malaysia, Nov 25th – Dec 1st 2005, 1-11 pp

[7] Ahmad Fauzan, Dick Slettenhaar and Tjeerd Plomp (2002): *Traditional Mathematics Education vs. Realistic Mathematics Education: Hoping for Changes*; In : P. Valero & O. Skovsmose (Eds.). Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference. Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics, pp. 1-4.

[8] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
[9] Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute.
[10] Lange, J. de (1996). *Using and Applying Mathematics in Education*. in: A.J. Bishop, et al. (eds). 1996. *International handbook of mathematics education, Part one. 49-97*. Kluwer academic publisher.
[11] Lange, J. de (1995). *Assessment: No Change without Problems*, In: Romberg, T.A. (eds). (1995). *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment*. New York, Sunny Press, 87-172.
[12] Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Beaton, A.E., Gonzalez, E.J., Kelly, D.L., and Smith, T.A. (1997). *Mathematics Achievement in the Primary School Years:* IEAís Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Chestnut Hill, MA: Boston College.
[13] Romberg, A. & Lange J. d (1998). *Mathematics in Context: Teacher Resource and Implementation Guide.* Britannica Mathematics system, USA.
[14] Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
[15] Streefland (ed.) (1991). *Realistic Mathematics Education in Primary School.* Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
[16] Treffers, A. (1991). *Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990.* In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School.* Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
[17] Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). *Realistic Mathematics Education, NORMA Lecture held in Kristiansand Norway*. Available on-line at http://www.fi.ruu.nl/en/rme
[18] Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University. New Theory: Realistic Mathematics Education
[19] Von Glasersfeld, E. (ed.). (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer, Academic Publisher, Dordrecht
[20] Jan Terwela, Bert van Oersa, Ivanka van Dijka and Pieter van den Eeden (2009): *Are representations to be provided or generated in primary mathematics education*? *Effects on transfer*; Educational Research and Evaluation Vol. 15, No. 1, (February 2009), 25–44
[21] Robert K. Sembiring , Sutarto Hadi and Maarten Dolk (2008): *Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME*; ZDM Mathematics Education, Vol. 40, 927–939
[22] Oh Nam Kwon: *Conceptualizing the Realistic mathematics Education Approach in the Teaching and Learning of Ordinary Differential Equations*; 1-10 pp. Preprint
[23] Jo Nelisson and Welko Tomic (1993): *Learning and Thought Processes in Realistic mathematics Instruction*; Curriculim and Theaching, 8(1), 19-37
[24] Bharath Sriraman (2006): *Theories of mathematics education: European perspectives, commentaries and viable research directions*; ZDF, Vol. 38 (1), 1-2 pp
[25] Krunoslav Vukelić (2000): *Matematika kao društvena konstrukcija. Na čemu se zasniva sociologija matematike?*; Revija za sociologiju (Zagreb), Broj. 1-2, 1-6 pp.
[26] Chan Kah Yein (2003): *Making Mathermatics Meaningful*; INTI Journal Vol. 1, No. 3, 216-222
[27] Yenni B. Widjaja and André Heck (2003): *How a Realistic Mathematics Education Approach and Microcomputer-Based Laboratory Worked in Lessons on Graphing at an Indonesian Junior High School*; Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 26(2), 1-51
[28] Erich Ch. Wittmann (2005): *Realistic Mathematics Education, past and present*; NAW 5/6 nr. 4 december 2005, 294-296

Anegdota
"Opisite kako se može izmeriti visina nebodera obicnim barometrom" - bilo je pitanje na nekom ispitu iz fizike na Univerzitetu u Kopenhagenu. Jedan od studenata je odgovorio: "Oko vrha barometra zavezete kraj podužeg kanapa i polako spustite barometar sa krova nebodera sve dok barometar ne dodirne tlo. Duzina kanapa uvećana za duzinu barometra je, u stvari, visina nebodera". Ovaj poprilicno orginalni odgovor je do te mere iznervirao profesora, da je student pao na ispitu, i bio iskljucen iz slusanja fizike na ovom univerzitetu. Student se pozvao na svoja osnovna prava, sa obrazlozenjem da je njegov odgovor neoborivo korektan, tako da je Univerzitet imenovao posebnu nezavisnu komisiju koja je trebalo da oceni ovaj slucaj. Predsednik komisije je odlucio da je odgovor zaista bio tačan, ali da nije relevantan kao dokaz poznavanja materije, u ovom slucaju fizike. Da bi rešili pat situaciju, odlučeno je da student može da istupi pred specijalnu komisiju, i da ima šest minuta da da usmeni odgovor na ovo pitanje, kako bi pokazao da poznaje osnovne principe fizike. Pet minuta je student sedeo razmišljajuci i ne progovarajući ni reč. Predsednik komisije ga je upozorio da vreme ističe i da ima još samo jedan minut da da odgovor na postavljeno pitanje. Na to je student odgovorio kako ima nekoliko izrazito relevantnih odgovora, ali da ne može da se odluci koji bi da da kao konačan odgovor. Jos jednom mu je savetovano da požuri, posle čega je student odgovorio kako sledi:

- Kao prvo, mogli bi da ponesemo barometar na vrh nebodera, bacimo ga sa ivice i izmerimo vreme koje mu treba da dotakne tlo. Visina nebodera bi u tom slucaju bila H = 0,5g×t2. Jedino sto bi se barometar u tom slučaju razbio.
- Ili, u slučaju da sija sunce, mogli bi da izmerimo duzinu barometra, izmjeriti visinu njegove senke, zatim izmeriti visinu senke nebodera i proporcionalnom aritmetikom izračunamo visinu nebodera.
- Ako baš zelite da budete naučni na visokom nivou, mogli bi zavezati kraci kanap na kraj barometra, i pustiti ga da se klati kao klatno, najpre na tlu, a onda na vrhu nebodera. Visina odgovara odstupanju gravitacione sile koja deluje na tako napravljeno klatno, T = 2p2×(l/g).
- Četvrto rešenje, a u slucaju da neboder ima stepenice za nuzdu, bilo bi i najjednostavnije: svaki sprat stepenista izmeriti u duzinama barometra i na vrhu samo sabrati tako izmerene dužine.
- A ako zelite jedno dosadno i ortodoksno rešenje, što ja pretpostavaljam da vi očekujete, mogli bi da iskoristite barometar da izmerite vazdusni pritisak na tlu, zatim na krovu, i razliku u milibarima iskoristite za izračunavanje visine zgrade.
- Elem, kako nas stalno podstičete da vežbamo nezavisnost razuma u primeni naučnih metoda, mislim da bi najjednostavnije bilo pokucati na vrata domara u tom neboderu, i reći mu: "Daću vam svoj novi barometar ako kažete koliko je visoka ova zgrada oko koje se vi brinete".