

Teorije u matematičkom obrazovanju: Jedna kratka studija o njihovim konceptualnim razlikama²

Luis Radford

École des sciences de l'éducation Université Laurentienne, Ontario, Canada

0. Uvod

U ovom članku ja ću tretirati pitanje tipova teorija koje se koriste u istraživanju matematičkog obrazovanja. Moja nastojanja su usmjerena ka objašnjavanju jedne ili dvije centralne teme kojima se bavio 'Survez Team'. Naime, nastojaću istražiti pojam teorije u istraživanjima matematičkog obrazovanja kao što je to poentirano u pozivnom oficijelnom pismu za ovu konferenciju. Kako ću preći na stvar koja nas zanima? Trebalo bi pristupiti poslu tako da se da jedna definicija, T, terma „teorija“ te da izaberemo neke diferencirajuće kriterije c_1, c_2, \dots . Teorije, tada, treba razlikovati u terminima da li ili ne uključuju te kriterije c_1, c_2, \dots (vidjeti: Radford, 2008a). Iako se ovo čini interesantnim, ja ću izabrati drugačiji put. U prvom dijelu ovog članka, usredsrediću se na nekoliko „dobro poznatih“ teorija u Matematičkom obrazovanju i nastojati istaći njihove razlike na teorijskom nivou tako što ću govoriti o tim razlikama u terminima njihovih teorijskih pozicija. U posljednjem dijelu, komentarisaću savremene trendove.

Moj izbor teorija bio je uslovljen mogućim naznačavanjem njihovog „istorijskog uticaja“ u području matematičkog obrazovanja kao jednog istraživačkog prostora. Pod „istorijskim uticajem“ ja ne mislim na znatan broj rezultata koji je proizvela neka teorija u nekom kraćem vremenskom periodu. Neumanjujući važnost toga, ono što ja imam na umu je nešto što radije vežem za fundamentalne principe te konkretne teorije. Fundamentalni principi neke teorije oprijedjeljuju istraživačka pitanja kao i način njihovog savladavanja unutar jednog istraživačkog područja, pomažući tako u formiranju oblika i determinisanju sadržaja specifičnog istraživačkog polja.

Sada, tragati za pitanjem o tipu teorija u ovom polju je traganje za njihovim razlikama i, još važnije, traženje za načinama kako ćemo tretirati te razlike. Moja oprijedjeljenost u ovome zasnovana je na usvajenoj pretpostavci da se te razlike mogu bolje razumijeti u terminima teorijskih pozicija. Sriraman i English (2006) su saglasni da mnogostrukost okosnica u matematičkom obrazovanju je u direktnoj vezi sa razlikama u njihovim epistemološkim perspektivama. I, naravno, ja nastojim da istaknem da, unutar odgovarajućih epistemologija, razlike mogu bolje sagledane uzimanjem u obzir kognitivne i ontološke principe koje se uvažavaju u matematičkom obrazovanju.

Naravno, nemam namjeru predstaviti višestrukost teorija u matematičkom obrazovanju niti ulaziti u dubinu kompleksnosti bilo koje od njih. Nadam se, ipak, da ćemo usredsredivši se na manji broj teorija, ističući njihove teorijske pozicije, doći do smisla njihovih razlika i zato bolje razumjeti pojam i tipove teorija u njihovom prostoru.

Zbog ograničenosti prostora, pozabavićemo se sa tri teorije. Iako je moguć i drugačiji izbor, u ovom tekstu bavićemo se Konstruktivizmom, Teorijom didaktičkih situacija i Socio-kulturnom teorijom

1. Konstruktivizam

1.1 Teorijski principi

U periodu od 1980 do 2000 godine, konstruktivisti su interpretirali svoju filozofiju baziranu na sljedeća dva principa:

¹ Uz dopuštenje autora tekst preveli Ognjen D. Romano i Daniel A. Romano.

² Publikovano u Proceedings of ICMI (2008).

P1: znanje se ne dobija pasivno, već u njegovoj izgradnji učestvuje i osoba koja uči;

P2: funkcija saznanja je prilagodljiva i odnosi se na organizaciju iskustvenog svijeta a ne na otkrivanje ontologije realnosti (vidjeti: von Glasersfeld, 1995, p. 18)

Princip P1 naglašava suprotnu poziciju konstruktivizma na podučavanje tranzicijom (podučavanje prenošenjem znanja). Konstruktivizam se, zaista, pojavio kao opcija nasuprot bihevizma i njegove pedagogije direktnim podučavanjem. Podsjetimo se, šta je u vezi sa ovim, dvadeset godina ranije, rekao Paul Cobb: „Veliki broj istraživanja upućuje na to da učenici rutinski koriste prepisane metode rješavanja jednog broja zadataka na način kako su dobili instrukcije bez da su pri tome zadovoljavali svoju žed za konceptualnim znanjem. (Cobb, 1988, p. 90). Međutim, kako se pokazalo, stvarna novina konstruktivističkog gledišta ne proizilazi iz prvog principa. To proizilazi, kako je von Glasersfeld utvrdio, iz epistemološkog i ontološkog stanovišta zasnovanom na drugom principu i konceptu znanja koji proizilazi iz njega. Bez neophodnog poricanja / izostavljanja postojanja pre-egzistirajuće realnosti, a u saglasnosti sa Kantovom teorijom saznanja, konstruktivisti ne tvrde da je znanje koje izgrađuje subjekt koji saznanje u korespondenciji sa jednom takvom realnošću, njihova epistemologija proizilazi na odricanju mogućnosti bilo kakvog pouzdanog znanja realnosti (Ernest, 1991).

U početku, konstruktivisti su predviđali ciljeve matematičkih instrukcija u saglasnosti sa Piaget'ovom epistemologijom. Krajem osamdesetih godina prošlog vijeka, Cobb je iznio stanovište da cilj instrukcija je, ili bi bar to trebalo da bude, pomoć učenicima da izgrade (mentalne) strukture koje bi bile više kompleksnije, snažnije i više apstraktne od onih koje su imali prije nego je podučavanje počelo. (Cobb, 1988, p. 89). Dakle, pedagoški problem je bio kreirati nastavne uslove za razvoj kompleksnih i snažnih mentalnih konstrukcija.

Konstruktivistički istraživači bili su orijentisani ka velikom proširenju izučavanja razvoja učeničke mentalne aritmetike i drugih matematičkih struktura kao i istraživanju učeničkih poteškoća u sagledavanju razvoja tih struktura. Posebna pažnja posvećivana je tipovima sagledavanja računanja kao i konstrukcija aritmetičkih posebnosti (vidjeti, na primjer, Cobb, 1985; Steffe and von Glasersfeld, 1983; Steffe, von Glasersfeld, Richards, and Cobb, 1983). Kreiranje nastavnih situacija u cilju razvoja mentalnih struktura dovelo je do neizbježnog pitanja o ulozi nastavnika. Cobb je rekao: “Nastavnička uloga nije samo da prenosi učenicima informacije o matematici. Jedan od primarnih nastavničkih odgovornosti je facilitacija dubinskog sazajnog restrukturiranja i konceptualnog reorganizovanja” (Cobb, 1988, p. 89).

Jedno istraživanje uloge konstruktivistički nastrojenog nastavnika je pokazalo da su konstruktivistički epistemološki i ontološki principi bili dobro pogođeni opštim konceptom sazajnog subjekta u kom je precizno determinisana specifična uloga kako učenika tako i nastavnika. U konstruktivističkom pristupu epistemološki i ontološki principi P1 i P2 imaju značaja samo u kontekstu da sazajni subjekt autonomno konstruiše svoje vlastito znanje. Ako izostavimo 'princip autonomnosti' konstruktivizam prosto postaje varijanta poznatog socio-kulturalnog pristupa. Treći princip može se formulirati u obliku:

P3: subjekt koji saznanje ne samo da konstruiše svoje vlastito znanje već to čini na svojstven način.

Intelektualna autonomija je u stvari jedna od dva opšta cilja identifikovana u konstruktivizmu izvana: Podučavanje naturanjem (drilom) je nekompatibilno sa dva opšta cilja matematičkih instrukcija koji slijede iz konstruktivističkog pristupa podučavanju, izgradnji narastajuće moći konceptualnih struktura i razvoju intelektualne autonomije (Cobb, 1988, p. 100).

Kako što sam isticao (Radford, 2008b), ideja o autonomnom subjektu saznavanja, koju su preuzeli konstruktivisti, nije novina u obrazovanju. U stvari, kao ideja bila je u središtu koncepta specifične pojave Zapadne moderne – kao ideja pojavila se kao suština Kant'ove teorije saznanja i odgovarajućeg epistemološkog subjekta. Kantov epistemološki subjekt nije neko ko prima znanje, već neko ko ga proizvodi. To je jedan konstruktor, koji na najbolji mogući način prezentuje ideju čovjeka kao 'homo faber'. Međutim, kao što ćemo vidjeti kasnije, povodeći se svrshishodnošću sa istorijskog aspekta, ovaj epistemološki koncept subjekta koji saznanje, kao jedan autonomni konstruktor njegovog vlastitog znanja,

je sagledavan suviše restriktivno kada se govori o konkretnim procesima podučavanja u učionici i, sem toga, proizvodi mjesta gdje se razdvajaju teorije matematičkog obrazovanja.

1.2 Ontologija konstruktivizma

Konstruktivističko neprihvatanje mogućnosti saznanja realnosti nije čista izmišljena sklonost, ili ekstravagantna ontološka pozicija. To je prije jedna od posljedica jedinstvenog subjektivizma, u koji je konstruktivizam ukorijenjen od samog početka. Saznajni subjekt moderne našao se ispred jednog svijeta koji više nije siguran u nasleđe, i koji ne treba razumijevati onako kako to nudi religija. Razumijevanje svijeta bi trebalo da proizilazi samo iz onoga što saznajni subjekt može obaviti posredstvom svog senzualnog tijela i njegovog vlastitog intelekta. Startajući od smisla, kao bazne strukture saznanja, David Hume je raspravljao, još u osamnaestom stoljeću, o tome da ustanovljenje logičke neophodnosti nije moguće ustanoviti za sve stvari za koje možemo posvjedočiti da su veze između pojava. Hume je možda bio prvi mislilac koji je na potpuno jasan način iskazao ograničenost ljudskih uslova koje rezultira iz subjektivizma, a koji su počeli da se uzdiže iz doba Renesanse a jasno artikulirani od strane filozofa u doba Prosvjetiteljstva. Dugi period koji je slijedio poslije Kantove Inauguracione Disertacije (1770) do prve kritike (*Critique of Pure Reason*, 1781), tzv. decenija tišine, objašnjena je intenzivnim promišljanjima koja su dovela do Kantovog viđenja rješenja Hume'ovog problema. Ova dekada intenzivnog promišljanja dovala je Kanta do razvoja njegove ontologije (Goldmann, 1971), jedne „neutralne ontologije“ čija je glavna karakteristika, kako je to istako von Glasersfeld, napuštanje tvrdnje o saznavanju realnosti – na primjer, jedne ontologije koja ne prihvata da je znanje o realnosti, niti da nije.

Međutim, Kantova „neutralna ontologija“ imala je jedan izuzetak: Kantova „neutralna ontologija“ nije primjenljiva na matematičko znanje. Za Kanta, matematika je bila paradigmatski primjer posebnog znanja. Ono što je Kant mislio je apriorni status matematike, status koji stavlja matematičke objekte (nasuprot fenomenoloških objekata kao što su stolice i psi) unutar jednog područja koje je moguće saznati. Kantova ontologija počiva na jednoj formi apriorizma koju Piaget nije prihvatio. Za Piaget-a i njegov konstruktivizam u obrazovanju, znanje (matematičko ili neko drugo) mora biti konstruisano. Budući da ne postoji način za provjeravanje korespondencije između subjektivnih konstrukcija proizvedenih od strane subjekta koji saznaje, s jedne strane, i realnosti, s druge strane, von Glasersfeld je iznosi mišljenje da znanje nije o sigurnosti (specifičnosti) već o održivosti (životnosti). Dio znanja je sačuvan od strane saznavajućeg subjekta sve dok se upotrebljava. Svo znanje je hipotetsko. Ovaj koncept znanja ima interesantne posljedice. Jedna od njih je da nikad nismo sigurni da govorimo o istim stvarima, budući da svako konstruiše svoje znanje.

Možemo jednostavno pretpostaviti ili se pretvarati da nešto zajedničko dijelimo. Za konstruktiviste, prihvatamo znanje i značenja kao međusobnu razmjenu. Prirodno, jedno pitanje se pojavljuje u odnosu na je li ili ne subjektivistička ideja znanja i značenja, koja odgovara konstruktivizmu, jedna forma solipsizma³. Konstruktivisti odgovaraju negativno, ističući ulogu društvene interakcije konstrukcija održivog znanja subjekta koji saznaje.

1.3 Socijalno znanje u Konstruktivizmu

Iako su neki realizatori nastave matematike 'hofirali' sa ekstremnim relativizmom Kantianskog konstruktivizma „neutralnom epistemologijom“ (vidjeti, na primjer, Goldin, 1990), čini se da su se ontološka pitanja povlačila u podzemlje (osnove) budući da su konstruktivistički nastavnici i istraživači radije bili preokupirani razumjevanjem dobre prakse u cilju da učenici razvijaju mentalne strukture. Prirodno, potraga za rješenjima bila je uokvirena konstruktivističkim principima. Posebno, problem je u osmišljavanju pedagoških aktivnosti, koherentnih sa idejom odustajanja od podučavanja davanjem direktnih odgovora ali utičući na učeničko razumjevanje. U kraćem, pitanje je kako podučavati bez neovlaštenog ulaženja u domen učeničkog samoodređenja. Rješenje koje se traži je u ideji nastavne prakse kao prostora „pregovaranja o značenjima“.

³ Solipsizam (lat.) je subjektivni idealizam, dosljedno izveden do krajnjih zaključaka; priznavanje vlastite spoznaje jednom realnošću (primjedba prevodioca)

Ova ideja dalje razvijena je kasnije kao jedan mogući rezultat dijaloga između konstruktivista i Njemačkih interakcionista (Bauersfeld, 1980; Voigt, 1985; etc.). Otad, u ranim devedesetim godinama, konstruktivisti su na process podučavanja-učenja gledali kao na kao jedan proces koji je po svojoj prirodi interaktivan i koji involvira implicitno i eksplicitno razgovore o matematičkim značenjima. U skladu sa ovim razgovorima, nastavnik i učenik elaboriraju ('the *taken-as shared*') matematičku realnost tako da konstituišu osnovu za njihovu neprekidnu komunikaciju (Cobb, Yackel, Wood, 1992, p. 10).

Mada ubačena ideja matematike kao društvene prakse, i nastavni proces kao jednog prostora za razgovora o značenjima, jeste novina, konstruktivizam ide dalje jednim novim pravcem. U jednom članku, publikovanom 1994. godine, Cobb je opisao dvije različite konstruktivističke istraživačke linije. Prva se koncentriše na istraživanje kako učenici razvijaju mentalne konstrukcije. Druga je više fokusirana na evoluciju značenja tokom učeničkih interakcija u nastavnom procesu. (Cobb, 1994).

Jedan od izazova za ovu drugu liniju bila je ideja međusobnih interakcija uz suzdržavanje nametnuto posredstvom njegova tri basna principa. Operacionalizacija socijalne dimenzije znanja mogla se napraviti zbog jasne distinkcije između: (1) učeničkih psiholoških procesa, s jedne strane, i (2) socijalnih procesa u nastavnom procesu, s druge strane. Dok je istraživanje učeničkih psiholoških procesa išlo u skladu sa Piaget-ovim konceptom refleksivnih apstrakcija, društveni procesi su bili u vezi sa idejom „kolektivne refleksije učionice“. Svakako, razvoj novih istraživačkih linija nije tekao lako. Uzimane su u obzir socijalne interakcije u kontekstu pri čemu, kao jedan rezultat teorijskih principa, konstruktivizam je našao samog sebe bez mnogo ostatka. Zaista, interakcija je morala biti razvijena na takav način da uključivanje drugog u akt znanja subjekta koji saznaje ne ostavlja mjesta za uplitanje sa konstruktivističkim subjektom koji saznaje. Od samog početka, postoji očigledna tenzija između učeničkih matematičkih značenja i onih koje ima nastavnik: „Nastavnička uloga u pokretanju i vođenju matematičkih pregovora je jedna visoko kompleksna aktivnost koja uključuje ...implicitnu legitimizaciju izabranig aspekata doprinosa.“ (Cobb, Wood, Yackel, Wheatley, Trigatti, & Perlwitz, 1991, p. 7). Eksplicitno legitimisanje studenata izabranih doprinosa bi ugrozilo, zaista, konstruktivistički projekt i njegov princip da je konstruisanje znanja lična i samo-odlučujuća stvar. Račvanje, koje konstruktivizam uzdiže između svojih kulturološko odvojenih autonomnih subjekata koji saznaju, i socio-kulturološke istorijske tradicije u kojoj ovaj subjekt koji saznaje misli i postupa, ispostavlja se da je, kako mnogi misle, nezadovoljavajuće rješenje. Prema tome, dati teorijski principi, prihvaćeni od konstruktivizma, Waschescio (1998) razmatra kao definitivno izgublenu vezu između individualnog i kulturološkog domena. Kako Lerman tvrdi, takvu vezu je nemoguće naći (Lerman, 1996).

Saberimo, Konstruktivizam je teorija sa učenikom u centru. Njen uticaj na obrazovanje je bio veoma impresivan, ne samo u Sjevernoj Americi već i svudu u Svijetu. Detaljnije analize o interakciji u nastavničkom procesu i sofisticiranih metodologija dizajniranih da pažljivo ispituju rasprave o značenjima, koja učenici nabadaju tokom svog usavršavanja, pomažu zajednici nastavnika matematike da postanu svjesni o raznolikosti značenja koje studenti mobilisu u savladavanju matematičkih problema. Konstruktivizam je, očigledno, pomogao da bolje razumijemo kompleksnosti koje okružuju učenički proces učenja.

2. Teorija didaktičkih situacija

Teorija didaktičkih situacija (The Theory of Didactical Situations (TDS)) nastoji da ponudi model, inspirisan matematičkom teorijom igara u kojem bi istraživala, u naučnom smislu, probleme vezane za podučavanje matematike i da ih rješava. U početku, termin – „situacija“ se odnosio na učeničko okruženje kojim upravlja nastavnik i od koga se to okruženje pojavljuje kao jedan alat u procesu podučavanja. Kasnije, termin 'situacija' je proširen u namjeri da uključiti nastavnika samog i čak i obrazovni sistem u cijelom (Brousseau, 1997a).

Kao i svaka teorija, TDS funkcioniše na bazi jednog skupa principa od kojih su neki sljedeći:

P1: *znanje rezultira kao 'optimalno' rješenje neke situacije ili problema.*

P2: *učenje je, prema upustvima Piaget'ove genetičke epistemologije, oblik kognitivne adaptacija.*

Kao i u slučaju konstruktivizma, ovi principi su suplementni koncepciji uloge koju treba da igraju nastavnik i učenik u nastavnom procesu.

2.1 Uloga nastavnika

Esencijalna uloga nastavnika nije da pokaže učenicima kako treba da riješavaju probleme već, prije svega, kako da se nose sa njima u smislu da „Raditi matematiku se znači samo primati, učiti i slati korektne, relevantne (odgovarajuće) matematičke poruke“ (Brousseau, 1997b, p. 15). Kao i konstruktivizam, TDS teorija je na pozicijama suprotnim od direktnog podučavanja. Nastavnička uloga je više u tome da pronalazi takve probleme ili situacije, koje će stavljati pred učenike, i kojima će provocirati očekujuće učenje.

2.2 Uloga učenika

Učenik, o kojem govori TDS teorija, je jedan epistemološki subjekt, jedna vrsta idealnog modela zamišljenog kao ponašanje (ili kako bi trebalo da se ponaša) na racionalan način, vrlo blizu ponašanju matematičara. Njegova uloga je bavljenje matematičkim problemom na način koji je koherentan sa profesionalnom naučnom praksom. U cilju potpune repordukcije naučnih aktivnosti, od učenika se zahtijeva da „proizvodi, formuliše, dokazuje, i konstruiše modele, jezike, koncepte i teorije“. (Brousseau, 1997b, p. 22).

Uloge nastavnika i učenika dobro su opisane slijedećim riječima: „Moderni koncept podučavanja ... zahtijeva da nastavnik provicira poželjne adaptacije kod njegovih učenika posredstvom razboritog izbora 'problema' koje stavlja pred njih.“ Ovi problemi, izabrani na poseban način, koje učenici mogu da prihvate, moraju podsticati učenike da rade, govore, misle, te da evoluiraju pod njihovom vlastitom motivacijom.“ (Brousseau, 1997b, p. 30) Izbor razboritih problema je, naravno, jedan delikatan dio nastavnog procesa. On konkretno proizilazi iz prihvatanja sljedećeg epistemološkog prihvatanja:

P3: *za svaki dio matematičkog znanja postoji familija situacija koja ga daje na svojstven način.*

Ovu familiju nazivamo *fundamentalnim situacijama*. Za Brousseau (1997b, p. 24) potraga za fundamentalnim situacijama, i njihovo inkorporiranje u mnogo opštiji nastavni projekt podučavanja i učenja zahtijeva najmanje dva elementa: jednu dobru epistemološku teoriju (koja bi trebalo da otkriva dubinu matematičkog znanja kao i da afirmativno oboji nastavni proces), i jedan dobar didaktički inženjering (koji bi trebalo da je orijentisan ka dobrom didaktičkom inženjeringu kojim bi trebalo da se dizajniraju situacije i problemi planirani da ih učenici rješavaju).

Četvrti princip specificira koncept učenja u TDS-teoriji. Opšti epistemološki princip P2 govori nam da je učenje adaptivne prirode, da se sastoji od učeničkih adaptacija u nekom miljeu, ali ništa ne govori o socio-interakcijskim uslovima koji bi zbog toga trebalo da budu ispunjeni. Ovaj četvrti princip ispunjava ovu prazninu i daje jednu neprolaznu teorijsku konzistenciju TDS-teoriji. Naime, kao što će se vidjeti, pojavljuju se neki paradoksi.

P4: *učenička autonomija je jedan neophodan uslov za pravo prirodno istinsko učenje matematike.*

Oдавде, ako nastavni proces učenja nije obavljen autonomno u odnosu na nastavnika, učenje se neće desiti. Dakle, „ako, rješavajući neki problem, učenik proizvede svoj odgovor bez vlastitog oslanjanja na svoje blisko k tome znanje i bez razlikovanja ovog novog znanja od svog ranijeg prethodnog nedovoljnog znanja, evidencija učenoga će biti izgubljena.“ (Brousseau, 1997b, p. 41) Drugim riječima, „ako nastavnik saopštava učenicima rezultate, učenik neće saznovati svoje vlastito znanje i, prema tome, učenje matematike se neće desiti.“ (Brousseau, 1997b, pp. 41-42). Od tada, učenika očekuje stalno sukobljavanje sa nekim fundamentalnim situacijama, tipa posebne igre, i prelaženje iz jedne situacije u drugu. Ovu situaciju nazivamo *adidaktičkom* situacijom (Brousseau, 1997b, p. 30). Nju karakteriše učenička autonomija u odnosu na nastavnika. Ono što adidaktičku situaciju čini specifičnom je u tome da „je ona djelimično nezavisna od direktnih nastavničkih intervencija.“ (Brousseau, 2003, p 2). Ovo je razlog što,

kada se govori o adidaktičkim situacijama, posredstvom njih učenik stiče stvarno znanje (znanje adaptacijom), kako Brousseau tvrdi da „Od momenta kada učenici dobiju neki problem kao svoj vlastiti, do momenta kada pronađu odgovore na njega, nastavnik se suzdržava od miješanja i davanja sugestija učenicima“ (Brousseau, 1997b, p. 30). Unutar nekog konteksta, nastavnička misija nije samo biti u moći napraviti uspješno prenošenje fundamentalnih situacija učenicima u okvirima adidaktičkih situacija, već takođe održavanje potpune interakcije sa tako izgrađenim miljeom (tj. suprostavljeni sistem učesnicima) u jednom obuhvatnijem kontekstu koji nazivamo *didaktičkom* situacijom. Kako je Brousseau naglasio „Ova situacija ili problem koje je nastavnik izabrao je jedan esencijalan dio šireg situacije koju nastavnik traži da bi prenio na učenike adidaktičku situaciju kojom obezbijeduje što je moguće više nezavisnosti i najpotpunije interakcije u utar nje. U tom cilju, u zavisnosti od slučaja do slučaja, nastavnik ili saopštava neke informacije učenicima ili se suzdržava od saopštavanja bilo kakvih informacija, ili postavljanja pitanja, i tome slično. On je involviran u igru unutar sistema interakcija izborom problema koje je dao učenicima. Ovu igra, ovu širu situacija, nazivamo *didaktička* situacija (Brousseau, 1997b, pp. 30-31)

Evo kako je Perrin-Glorian kondezovao ovu ideju (Perrin-Glorian, 2008): „Situacioni model interakcije jednog subjekta sa jednim miljejem posredstvom jedne igre (t.j. rješavanje jednog problema) u kojem igrači moraju da donose odluke: neki stavovi ove igre se više favorizuju od drugih u cilju ostvarivanja pobjedničke strategije tako da situacija određuje dio znanja kao značenje da je subjekt dosegno ili održao favorizovani stav (u igri) u ovom miljeu.“ Međutim, u praksi ova igra ne mora teći glatko. Može se desiti da učenik promaši rješenje problema ili da se nedovoljno trudi da ga uoči. O takvoj situaciji Brousseau je kazao sljedeće: „Tada se formira odnos koji odlučuje, eksplicitno do nekog proširenja, ali uglavnom implicitno, kakva je odgovornost za svakog partnera, nastavnika i učenika, u organizovanju nastave situacije i, na ovaj ili onaj način, oni su odgovorni jedan prema drugom. Ovaj sistem uzajamnih odnosa podsjeća na ugovor. Ono što nas interesuje ovdje je *didaktički* ugovor, kako bi rekli, dio ovog ugovora je njegova specifičnost – cilj matematičkog obrazovanja.“ (Brousseau, 1997b, pp. 31-32)

Brousseau podrazumjeva da ovaj sistem međusobnih obaveza nije ekzaktna ugovor budući da nije potpuno eksplicitan. Na njega treba gledati kao na fleksibilno neprekidno pregovaranje. Međutim, ovo nije pregovor u smislu konstruktivizma. Ono o čemu se pregovara u TDS-teoriji nije niti konstruisano matematičko značenje u nastavnom procesu niti matematička forma dokazivanja, argumentacije, i tome slično. Za TDS, nasuprot konstruktivizmu, o matematičkim značenjima i matematičkim formama dokazivanja ne može se pregovarati: ono su dio ciljnog obrazovanja, osmišljenog kulturološkog znanja . Pregovara se o fluktuirajućim granicama rada u dijelu nastavnik-učenik, u smislu nastavnik prepušta fundamentalnu situaciju učenicima (koju oni treba da prihvate kao svoju), tako reći da učenici preuzimaju odgovornost za rješavanje problema koji ulazi u jednu didaktičku situaciju. Zbog specifične prirode, ovaj neizbježni rasplinuti didaktički ugovor uznemiravan je nekim paradoksima.

2.3 Paradoksi učenja

Nastavnik ima društvenu obavezu da učini sigurnim da će se učenje dešavati u učionici. Šta uraditi, ako učenik ne bude naučio? Učenik će tražiti od nastavnika da ga nauči. Ali, sve što nastavnik daje više odgovarajući na zahtijev učenika pokazujući mu ono šta učenik želi i pokazujući mu šta treba da uradi, to sve više umanjuje šansu da postigne učenje, što, u stvari i želi da postigne. (Brousseau, 1997b, p. 41). Brousseau ne gleda na ovaj paradoks kao na jednu kontradikciju. Paradoks pokazuje zmršenost situacije u kojoj će nastavnik često biti u učionici. Ako nastavnik odustane, postizanje učenja će biti kompromitovano: sve što nastavnik preuzme na sebe u cilju da učenici postupaju kako treba u očekivanom trendu on , u stvari, uskraćuje uslove (u kojim bi trebalo da se učenici nalaze) koji omogućavaju razumijevanje i učenje ciljnih pojmova; ako nastavnik kaže sve ono što učenici traže, tada učenici neće dobiti. (Brousseau, 1997b, p. 41)

Jedan drugi paradoks se može pojaviti ako nije moguće naći neku fundamentalnu situaciju koja je prikladna za učeničke intelektualne mogućnosti kao pouzdane tačke za razvoj učeničkog shvatanja matematičkih ideja. U tom slučaju, nastavnik odustaje od podučavanja adaptacijom . Tada treba da predaje znanje učenicima direktnim podučavanjem u skladu sa naučnim zahtijevima. Ali ova hipoteza implicira da nastavnik mora odustati od davanje značenja ovom znanju i njegovog (tog znanja) dobijanja kao odgovor

na situaciju adaptacije jer, u takvim situacijama, učenik nije spreman da ga prihvati. (Brousseau, 1997b, p. 42)

Prema Brousseau, učenik se takođe nalazi u paradoksalnoj situaciji: „on mora razumijeti i učiti; ali u cilju učenja on mora odustati od razumijevanja nekih nivoa, i, u cilju razumijevanja, on (učenik) mora preuzeti ako nauči.“ (Brousseau, 1997b, p. 43).

Za TDS-teoriju ovi (i neki drugi paradoksi) su jedan suštinski dio didaktičkih situacija. Oni su dio podučavanja matematike i prisvajanja znanja. Međutim, ovi paradoksi takođe mogu biti viđeni kao rezultat tenzija u TDS postupku podučavanja i učenja – tenzija kao rezultat jednog posebnog koncepta učenja, jedan epistemološki i ontološki racionalan pogled na matematiku i ono što klasični koncept matematike može pružiti subjektu koji saznaje.

2.4 Ideja učenja

Kako se moglo vidjeti ranije, za TDS pravo učenje može da se poavljuje samo iz individualnih ličnih djela i refleksija. To je teorijski stav o učenju koji daje smisao idejama adidaktičke situacije i prepuštanja (devolucije). Iako TDS uzima izvore iz socijalne interakcije na različitim nivoima (Kidron, Lenfant, Bikner-Ahsbahs, Artigue, and Dreyfus, 2008), znanje se stiče, na kraju, kao rezultat učeničke personalne veze sa objektima znanja. Ne postoji razlika u ovome između konstruktivizma i TDS-teorije. Razlike se pojavljuju u terminima epistemološke uloge problema: dok je ranije, u Konstruktivizmu, jedan problem mogao voditi različitim jedanko pravim održivim dijelovima znanja, sada, u TDS-teoriji, nasuprot prethodnom, dizajn didaktičke situacije treba da vodi do ciljnog kulturološkog znanja..

Kao što ćemo vidjeti u sljedećoj sekciji, put izgrađen Vygotskijanskim sociokulturalnim savremenim pristupom problemima podučavanja i učenja je drugačiji na dosta važan način. TDS-teorija je imala značajnog uticaja u Francuskoj i francuskim govornim područjima u svijetu. Ova teorija imala je takođe značajnog uticaja u Španiji i Centralnoj i Južnoj americi. Detaljne epistemološke analize fundamentalnih situacija, njihov inženjering kao i nastavnička kontrola u učionici (nastavnom procesu) u mnogome je pomogla realizatorima nastave matematike da razumiju ključnu ulogu prikladnih problema u razvoju učeničkog matematičkog mišljenja.

3. Socio-kulturalni pristup

Vidjeli smo da i u Konstruktivizmu i u TDS-teoriji autonomija subjekta koji saznaje prema nastavniku je jedan preduslov za prisvajanje znanja. U sociokulturalnom pristupu ova autonomija nije preduslov za prisvajanja znanja. Autonomije je, u stvari, njegov rezultat. Ovo je jedna od centralnih ideja koncepta Vygotsky-og – zona bliskog razvoja (*zone of proximal development*). Lako je zamisliti ovu ideju unutar sociokulturalnog pristupa u duhu Vygotsky-og budući da je uloga nastavnika i učenika dugo raspravljana na različite načine zajedno sa onim što je nađeno u drugim teorijama Ova važna razlika postaće jasna kada budemo sumirali glevne principe ovog sociokulturalnog pristupa.

3.1 Ontološki i epistemološki principi

Ontološka pozicija jedne teorije sastoji se u specifikaciji smisla u kojem se tretiraju teorijska pitanja o prirodi konceptualnih objekata (u našem slučaju, priroda matematičkih objekata, njihova forma egzistencije, i tome slično). *Epistemološka* pozicija se sastoji u specifikaciji puteva, u skladu sa teorijskim principima, kojima te objekte možemo (ili nemožemo) saznati.

Jedan od najpopularnijih ontologije je Realizam. Realisti smatraju da egzistencija matematičkih objekata i da je nezavisna od individua te da ti objekti postoje nezavisno od vremena i kulture. Sociokulturalni pristup zauzeo je drugačiji stav:

P1: *znanje je istorijski generisano tokom matematičkog rada svake individue.*

Principi TDS-teorije i Konstruktivizma, čine se, mogu bizi saglasni sa ovom ontološkom pozicijom. Ako ne postoji neka razlika u „modu postojanja“ matematičkog znanja, pa ipak morale bi postojati neke

razlike u terminima njihovih „modova produkcije“. Kao što smo vidjeli ranije, TDS i Konstruktivizam podrazumjevaju znanje kao rezultat adaptivnih aktivnosti subjekta koji saznaje. Za socioikulturiste međutim, adaptacija je nepotrebna za proizvodnju znanja. Jedan od razloga je taj što sociokulturisti prihvataju saznanje kao jednu kulturološku i istorijsku konstituciju dobijenu iz refleksija i aktivnosti uronjenih u društvenu praksu i posredovanu jezikom, interakcijom, znakovima i artifaktima. Kao rezultat znanje se proizvodi od subjekta koji saznaje, koji ga, u svojim nastojanjima, podvrgava istorijski tradicionalno organizovanom mišljenju. Subjekt koji saznaje sociokulturne teorije je jedan subjekt koji misli unutar jedne kulturološke pozadine, i, prema tome, kad tako radi, on prevazilazi jednostavne neistorijske adaptivne potrebstine. Drugim riječima, „volja za znanjem“ (da posudim Foucault'ov termin) i put na koji način postaje nisu pokrenuti niti oblikovani adaptivnim potrebama ili podsticajem za proizvodnju „održivih“ hipoteza ili „optimalnih“ rezultata. „Želja za znanjem“ i samo znanje su radije pod uticajem kulturoloških formi mišljenja i vrednovanja (naučnim, estetskim, etičkim, i tako dalje) koje orijentišu (bez pritiska) rast znanja ka određenom novom usmjerenju. Unutar sociokulturnog konteksta, životnost se ne može razumjeti kao jedna obična subjektivna igra hipoteza generisanih od strane subjekta koji saznaje u svom pokušaju da se prilagodi okruženju. Uglavnom na isti način optimalnost ne može se razumijeti u terminima nekog univerzalnog, suštinskog matematičkog znanja.

Matematičko mišljenje i matematički odgovori su uvijek uokvireni posebnom racionalnošću kulture u kojoj se nalaze. Unutar tih kultura optimalnost može da ima različita značenja i ne mora biti glavni pogon za pokretanje matematičkog mišljenja do novog razvojnog nivoa (Radford, 1997a, 1). Na primjer, način korištenja predviđanja budućih događaja ili razumjevanje prošlih događaja u ranom godinama XX vijeka Azande kultura uopšte nije bila dodirnutu pitanjima optimalnosti.

Možemo sumirati ovu diskusiju kao princip:

P2: proizvodnja znanja ne odgovara adaptivnom pokretu ali je utisnuta u kulturoloske forme razmišljana isprepletena sa sibločkom i materijalnom stvarnošću koja pruža osnovu za tumačenje, razumijevanje i transformisanje svijeta individualaca, koncepte i ideje koje se formiraju o njoj.

3.2 Učenje

U prošloj sekciji raspravljano je da sociokulturolozi tvrde, iz filogenetskog pogleda gledanja, koceptualni objekti su generisani kroz tok ljudske aktivnosti. Iz ontogenetskog pogleda, centralni problem je objasniti kako se ostvaruje sticanje znanja smještenog u nekoj kulturi: ovo je fundamentalni problem matematičkog obrazovanja kao specijalan slučaj opšteg obrazovanja. Metafora kontsruiasanja znanja veoma dobro razjašnjuje sa idejom da znanje nije nesto prevazilažeće ljudskoj sferi i da je znanje radije kreirano od ljudskih bica. Konstruktivizam, TDS teorija i sociokulturne perspective se slažu u ovome. Međutim, iz sociokulturoloske perspektive ekstrapolacija ove metafore do ontogenetskih dimenzija dovodi do serije vžnih neriješivih problema. Umijesto da govore o učeničkom konstruisanju znanja, neki sociokulturisti preferiraju da govore o učeničkom pravljenu smisla istorijski konstituisanih modela mišljenja i da njima ovladavaju glatko. Jedna od prednosti gledanja na probleme učenja na ovaj način je da se na učeničko znanje ne gleda kao na nešto što dolazi iznutra (vrsta privatne ili subjektivne konstrukcije koja neprekidno nastoji da dohvati kulturolosko-objekatski dio znanja) ali s vana.

Princip 3 sumira ovu ideju:

P3: učenje je dosezanje kulturolosko-objekatskog dijela znanja koje učenik dobija kroz društveni proces objektivifikacije potsredstvom znakova jezika, rukotvorina i društvenih interakcija kao učeničkog angažovanja u kulturoloskim formama refleksija i aktivnosti.

Ideja učenja kao dosezanje kulturoloskog znanja ne bi trebalo da bude shvaćena kao učeničko dosezanje znanja na pasivan način. Nažalost, navikli smo da pravimo razliku i da mislimo da učenici konstruišu svoje znanje ili da je ono njima dato. Ovo je suviše lako i pogrešno pojednostavljenje – što je Lerman

uslovio „apsolutnim pogledom“ na znanje (Lerman, 1996). Učenje, gledajući iz sociokulturološke perspektive, je rezultat jednog aktivnog angažovanja i samokritičkog, reflektivnog stava prema onome što se uči. Učenje je takođe jedan proces transformisanja postojećeg znanja. I možda više važno, učenje je jedan proces formiranja subjektivizacija, proces djelovanja i konstituisanja bitnosti. Sociokulturološki pristupi zaista se odupiru ideji da je učenje nekritičko prisvajanje postojećeg znanja apsorbovanom od strane pasivnog učenika. Znanje ima moć transformacije: ono pretvara objekt znanja i, na putu poznavanja i učenja, u samog sebe. Postoji dialektička veza između subjekta i objekta koje se može bolje razumijeti govoreći da je učenje proces objektivizacije (poznavanja) i subjektivizacije (djelovanje), to je proces postojanja (Radford, 2008b, in press-2).

3.4 Uloga nastavnika i učenika

Uloga nastavnika nije, kao što je zamišljeno kao ono što smo upravo rekli, dispečer znanja. Prema raspravi sociokulturološkog pristupa, znanje se ne može ubrizgati u učenički um⁴, u namjeri da naučimo učenike (u sociokulturološkom transformacionom smislu) objekti i produkti kulturološkog razvoja, jedna od uloga nastavnika je da ponudi učeniku bogatu lepezu aktivnosti koji idu uz to, u određenom maniru, susret sa raznim slojevima uopštenih istorijskih kulturoloških objekata i susret sa glasom i formom razumjevanja.

Konfiguracija ovih aktivnosti (oba u terminima matematičkog konteksta i njegove socialno-interaktivne dimenzije) je formirano pod ultimatumom sociokulturoloških ideja o tome kako se učenje ostvaruje. Kako je već spomenuto, za sociokulturologa učenje obavezno ili jedinstveno pojaviti kao rezultat učeničke autonomnosti promišljanja u svom pokušaju kreiranja „održivih“ hipoteza ili davati „optimalna“ rješenja datog problema. Učenje, u stvari, često počinje sa tačke u kojoj učenik više nije u mogućnosti da nastavi sam i traži aktivnu angažovanost nastavnika (ovo je jedna od ideja Vygotsky-jeve zone približnog razvoja). Ovo angažovanje može postati vidljivo u terminima pitanja i putokazima za preusmjerenje učeničke pažnje na određeni karakteristike problema koji se posmatra, a koje nisu uočljive i koji su vitalni za dobijanje jedne izvjesne forme matematičkog mišljenja. Ali, to može rezultirati iz aktivnog i kritičke interakcije sa nastavnikom pri čemu nastavnik i učenik rješavaju problem zajedno. Naravno, takav način rada ne može se uizimati u obzir kao jedna instanca učenja u drugim teorijama, gdje je intelektualna autonomija učenika igra ulogu kao jedan preduslov za učenje. Za sociokulturnu teoriju, međutim, autonomija nije preduslov, ali, kao što je napomenuto, je njen rezultat.

Nijansa je u stvari suptilna, ideju autonomije nije uzeta sa sociokulturološke perspektive kao nešto se razvija iz individue, to je nešto što kasnije subjekt uspeva da proširi: autonomije se ne može vidjeti kao mogućnost rada stvari bez pomoći drugih: autonomija je socijalna relacija koja se ostvaruje onoliko koliko se subjekt angažuje u društvenoj praksi i kao takva uvijek omogućava involviranje drugog (Radford, 2008b, in press-2).

Sociokulturološki pristup ka podučavanju i učenju je mlađi naspram druga dva pristupa o kojima je raspravljano u ovom tekstu. On je uveden u ranim 1990-im godinama u matematičko obrazovanje od strane Steve Lerman-a i Marioline Bartolini Bussi i dobio je neke podsticaje u nekoliko poslednjih godina. Sociokulturni pristup je osvijetlio problem nastavne interakcije i razgovora (Bartolini Bussi, 1998 Lerman), nastavne konceptualizacije (Radford, 2000, 2008c; Radford, Bardini and Sabena, 2007), semiotičkog angažovanja (Arzarello and Robutti, 2004; Bartolini Bussi and Mariotti, 1999, in press; Radford, 2005), i pitanje kulture i saznanja (Radford, 1997b, in press-1).

4. Novi trend

U ovoj poslednjoj sekciji, ja ću kratko podsjetiti na jedan novi trend o kojem je bilo riječi na Petom kongresu evropske asocijacije za istraživanje matematičkog obrazovanja (the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5, February 22- 26, 2007)). ERME organizuje svake druge godine konferenciju sa koncepcijom da podtakne razmjenu ideja posredstvom

⁴ Znanje „ne iskaže individu kao rezultat direktnog projektovanja na njegov mozak ideja i koncepara obavljenih ranijim generacijama“ (Leont'ev, 1978, p. 19).

tematskih radnih grupa. Većina plenarnih aktivnosti zauzima najveći dio prostora u radnim grupama. Jedna od često ponovljenih CERME-ovih radnih grupa jeste ona koja se odnosi na teorije matematičkog obrazovanja. U ovoj posljednjoj konferenciji, CERME 5, koja se odvijala u Larnaki, Kipar, Radna grupa 11 – „Različite teorijske perspektive / pojave u istraživanjima matematičkog obrazovanja“ bila je jedna od najpopularnijih što potvrđuje povećani interes za razumijevanje šta to čini teorije različitim. Iako cilj ove radne grupe nije baš bio razumijevanje razlika već traganju za novim formama veza kurentnih teorija. Malo preciznije, ideja je bila da se više razgovara o teorijskim i praktičnim formama mreže teorija. Većina radova presentovana na ovom sastanku Radne grupe 11 pojavila se u časopisu ZDM - *The International Journal on Mathematics Education*. Kao što sam napomenuo u svom radu, napisanog za taj broj ZDM-a (Radford, 2008a), ovaj novi trend se sastoji od istraživanja puteva povezanih teorija. To objašnjava brzi savremeni razvoja formi komunikacija, narastajuće internacionalne naučne saradnje, ali je i potvrda političkih i ekonomskih barijera u nekim dijelovima svijeta.

Ovaj novi trend je vodeći u ispitivanju mogućnosti i ograničenja korištenja nekoliko teorija i pristupa matematičkom obrazovanju na značajan način. Radovi prezentirani na toj konferenciji daju jedno mnoštvo mogućnosti.

U zavisnosti od ciljeva, konekcije mogu uzeti nekoliko formi. Prediger, Bikner-Ahsbahs, i Arzarello identifikuju neke od njih, kao „kompariranje“ i „razlikovanje“ i determinišu ih na sljedeći način. U „kompariranju“ cilj je probaći sličnosti i razlike između teorija, dok je u „razlikovanju“ cilj „naglašavanje velikih razlika“. Cerulli, Georget, Maracci, Psycharis, & Trgalova daju jedan primjer upoređivanja teorija, dok Quintana, Bosch, and Gascón daju jedan primjer razlikovanja teorija. Ove forme povezanosti se razlikuju od drugih kao što su „koordinatizacija“ i „kombinovanje“. U koordinatizacije teorije, elementi iz različitih teorija su izabrani i stavljeni jedni pored drugih na manje ili više harmioničan način pri istraživanju nekog specifičnog istraživačkog problema. Halverscheid'ov članak je jedan jasan primjer sagledavanja koordinizirajućih teorija. U članku se tretira jedan obrazovni problem (problem modeliranja jedne fizikalne situacije) uz korištenje elemenata dvije različite teorije (teorija modeliranja i kognitivna teorija). U kombinovanim teorijama izabrani elementi ne moraju obavezno pokazivati koherenciju kao što bi bili pokazani u koordinirajućoj konekciji. Radije se teorije stavljaju jedna pored druge (Prediger et al.'s paper). Maracci i Bergsten daju primjere kombinovanih teorija.

U principu, „upoređivanje“ i „razlikovanje“ teorija je uvijek moguće: za dvije date teorije matematičkog obrazovanja uvijek je moguće tragati za njihovim sličnostima i razlikama. Nasuprot tome, „koodinirati“ ili „integrirati“ teorije, što je jedna druga forma povezivanja (Prediger, Bikner-Ahsbahs, and Arzarello's paper), čini se da je više delikatan zadatak. Povezivanje teorija može, u rezultatu, biti prepoznato na različitim nivoima (principi, metodologije, istraživačka pitanja) različitim intenzitetima. Ponekad povezivanje može biti jako, ponekad slabo. Čini se da je rano praviti prognoze kako će ovaj novi trend da evoluiru. Ono što je jasno, nasuprot tome, je da istraživanje integracija teorija i njihovo razlikovanje je podesno te će dovesti do boljeg razumjevanja teorija i bogatijih situacija praktičnih i teorijskih problema koji se odnose na podučavanje i učenje matematike.

References

- [1] Arzarello, F., & Robutti, O. (2004). *Approaching functions through motion experiments*. Educational Studies in Mathematics (PME Special Issue of "Approaching functions through motion experiments. R. Nemirovsky, M. Borba & C. DiMattia (eds.), 57(3), CD-Rom, chapter 1.
- [2] Bartolini Bussi, M. G. (1998). *Verbal interaction in the mathematics classroom : A Vygotskian Analysis*. In H. Steinbring, M. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 65-84). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- [3] Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M., A. (1999). *Semiotic Mediation: from History to the Mathematics Classroom*. For the Learning of Mathematics, 19(2), 27-35.
- [4] Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M., A. (2008). *Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective*. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd Edition). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- [5] Bauersfeld, H. (1980). *Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom*. Educational Studies in Mathematics, 11, 23-41.

- [6] Bergsten, C. (in press). *How do theories influence the research on teaching and learning limits of functions?* ZDM - The International Journal on Mathematics Education.
- [7] Brousseau, G. (1997a). *La théorie des situations didactiques*. Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. Montréal.
- [8] Brousseau, G. (1997b). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- [9] Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Retrieved on January 20, 2007, from http://dipmat.math.unipa.it/~grim/Gloss_fr_Brousseau.pdf.
- [10] Cerulli, M., Georget, J. P., Maracci, M., Psycharis, G., & Trgalova, J. (in press). *Comparing Theoretical Frameworks Enacted in Experimental Research: Telma Experience*. ZDM – The International Journal on Mathematics Education.
- [11] Cobb, P. (1985). *An investigation of young children's academic arithmetic contexts*. Educational Studies in Mathematics, 18, 109-124.
- [12] Cobb, P. (1988). *The tension between theories of learning and instruction in mathematics education*. Educational Psychologist, 23(2), 87-103.
- [13] Cobb, P. (1994). *Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development*. Educational Researcher, 23(7), 13-23.
- [14] Cobb, P., Boifi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). *Reflective Discourse and Collective Reflection*. Journal for Research in Mathematics Education, 28(3), 258-277.
- [15] Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., J., N., Wheatley, G., Trigatti, B., et al. (1991). *Assessment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project*. Journal for Research in Mathematics Education, 22(1), 3-29.
- [16] Cobb, P., & Yackel, E. (1996). *Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research*. Educational Psychologist, 31(3/4), 175-190.
- [17] Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). *A Constructivist Alternative to the Representational View in Mathematics Education*. Journal for Research in Mathematics Education, 23(1), 2-33.
- [18] Ernest, P. (1991). *Constructivism, the Psychology of Learning, and the Nature of Mathematics: Some Critical Issues*. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of 15th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25-32). Assisi (Italy).
- [19] Evans-Pritchard, E. E. (1937). *Witchcraft, Oracles and Magic among the Azande*. Oxford, Clarendon Press (Reprinted 1963).
- [20] Feyerabend, P. (1987). *Farewell to Reason*. London, Verso (Reprint, 1994).
- [21] Goldin, G. A. (1990). *Epistemology, Constructivism, and Discovery Learning in Mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 4, 31-47.
- [22] Goldmann, L. (1971). *Immanuel Kant*. London: NLB.
- [23] Halverscheid, S. (in press). *Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education.
- [24] Kidron, I., Lenfant, A., Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M., & Dreyfus, T. (in press). *Social Interaction in Learning Processes as Seen by Means of Three Theoretical Frameworks*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education.
- [25] Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. New Jersey: Prentice-Hall.
- [26] Lerman, S. (1996). *Intersubjectivity in Mathematics Learning: A Challenge to the Radical Constructivist Paradigm?* Journal for Research in Mathematics Education, 27(2), 133-150.
- [27] Lerman, S. (2001). *The Function of Discourse in Teaching and Learning Mathematics: A Research Perspective*. Educational Studies in Mathematics, 46, 87-113.
- [28] Maracci, M. (in press). *Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in Vector Spaces Theory*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education.
- [29] Perrin-Glorian, M.-J. (1993). *Théorie des situations didactiques: naissance, développement et perspectives*. In *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 97-147). Grenoble: La pensée sauvage.
- [30] Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (in press). *How can networking strategies for connecting theoretical approaches help to develop theories in mathematics education? –First reflections*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education.
- [31] Quintana, E. R., Bosch, M., & Gascón, J. (in press). *Reformulating Metacognition in terms of Mathematical and Didactic Praxeologies*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education.
- [32] Radford, L. (1997a). *On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics*. For the Learning of Mathematics, 17(1), 26-33.
- [33] Radford, L. (1997b). *L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algebra [The invention of a mathematical idea: the second unknown in algebra]* Repères (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), 28, 81-96.

- [34] Radford, L. (2000). *Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis*. Educational Studies in Mathematics, 42(3), 237-268.
- [35] Radford, L. (2005). *The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the Calculator*. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education*. (pp. 137-152). New York: Springer.
- [36] Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40(2), 317-327.
- [37] Radford, L. (2008b). Di Sé e degli Altri: Riflessioni su un problema fondamentale dell'educazione [The self and the other: Reflections on a fundamental problem in education]. La Matematica e la sua didattica, 22(2), 185-205.
- [38] Radford, L. (2008c). *Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns in Different Contexts*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 83-96.
- [39] Radford, L. (2008-1). *Culture and Cognition: Towards an Anthropology of Mathematical Thinking*. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd Edition). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- [40] Radford, L. (in press-2). *The Ethics of Being and Knowing: Towards a Cultural Theory of Learning*. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture*. Rotterdam: Sense Publishers.
- [41] Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). *Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity*. Journal for Research in Mathematics Education, 38, 507-530.
- [42] Sriraman, B. and L. English (2005). *Theories of Mathematics Education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(6), 450-456.
- [43] Steffe, L. P., & von Glasersfeld, E. (1983). *The construction of arithmetical units*. In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American Chapter of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp. pp. 292-304). Montreal: Université de Montréal: Faculté de Science de L'Éducation.
- [44] Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, E., & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and applications*. New York: Praeger Scientific.
- [45] von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London: The Falmer Press.
- [46] Voigt, J. (1985). *Patterns and routines in classroom interaction*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 6(1), 69-118.
- [47] Waschescio, U. (1998). *The missing link: Social and cultural aspects in social constructivist theories*. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 221-241). Cambridge: Cambridge University Press.