

Istraživanje matematičkog obrazovanja

Daniel A. Romano

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Banjoj Luci,
78000 Banja Luka, Mladena Stojanovića 2, B&H
e-mail: bato49@hotmail.com

Sažetak: U drugom dijelu, poslije uvoda, naznačenom kao 'determinisanje problema' izloženi su pogledi na specifičnost istraživanja matematičkog obrazovanja kroz razmatranja o Stokesovom načinu gledanja na istraživačke domene. U trećem dijelu, slijedeći ideje Anne Sierpinske i Jeremija Kilpatricka, izloženo je u uvodnom dijelu poznatog zbornika „*Matematičko obrazovanje kao jedan istraživački domen: Potraga za identitetom*“ (Mathematics Education as a research Domain: A Search for Identity), istaknuto je pet posebnih pitanja od interesa sa istraživanje matematičkog obrazovanja. U četvrtom dijelu dat je historijski pregled razvoja teorija matematičkog obrazovanja. Kratko se naznačavaju aktivnosti jednog broja međunarodnih grupa istraživača matematičkog obrazovanja kao i neki rezultati tih istraživanja

Abstract: After the introduction, in the second part of this paper, assigned by “Determination of Problem” we show some peculiarity of mathematics education research within the Stokes’ way on research domain. In the third part following ideas of Anna Sierpinska and Jeremy Kilpatrick, expressed in editorial part of famous book “*Mathematics education as a research Domain: A Search for Identity*”, we presented five question on research of mathematics education. In the fourth part of this article we survey the history of research on theories in mathematics education. We also briefly examine the origins of this line of inquiry, the contribution of Hans- Georg Steiner, the activities of various international topics groups and current discussions of theories in mathematics education research.

Mathematical Education Subject Classification: D20, C30

Key words and phrases: matematičko obrazovanje, istraživanje matematičkog obrazovanja, teorije matematičkog obrazovanja

1. Uvod

U izdanjima ZDM (*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*), ISSN: 1863-9690 (print), ISSN 1863-9704 (on line version), godina 1992 je različita od svih ostalih jer uključuje specijalno sedmo izdanje koje je bilo fokusirano na matematičko obrazovanje u Njemačkoj (the Federal Republic of Germany (FRG)). Ovo izdanje, podijeljeno u tri sekcije, uključivalo je opširan izvještaj i analizu prilika u matematičkom obrazovanju u FG sa člancima namjenjenim osobama čija su briga matematički curriculumi, realizatorima nastave matematike i metodičarima nastave matematike. U trećoj sekciji, Hans-Georg Steiner i Heinz Griesel kao koautori poznatog članka u kojem su izložili historijski razvoj didaktike matematike u Njemačkoj (naravno, posebno u tzv. zapadnom dijelu), od pre-1900 godine do današnjih dana, sa mnogo interesantnih detalja. Taj članak, između ostalog, sadrži deskripciju uloge matematičara, filozofa, edukatora – realizatora nastave matematike, osoba koji imaju uticaja na politiku matematičkog obrazovanja, profesionalnih organizacija. Sem toga, izložili su mišljenje o ulozi kako stručno-metodičkih časopisa tako i istraživačkih časopisa u razvoju matematičkog obrazovanja kao jednog od polja istraživanja.

Griesel & Steiner (1992) su kratko opisali rođenje matematičkog obrazovanja kao istraživačke discipline u Njemačkoj, saradnju radne grupe evropskih istraživača, razvoj i internacionalizaciju ovog

polja pionirskih istraživanja. Jedna od mnogih Steinerovih aktivnosti bilo je formiranje jedne internacionalne studijske grupe 1984. godine, nazvane *Theory of Mathematics Education* (TME). Ova grupa organizovala je pet internacionalnih konferencija i bila je jedna od regularnih studijskih grupa unutar aktivnosti ICME (International Congress of Mathematics Education). Jedna od mnogih aktivnosti ove istraživačke grupe bilo je publikovanje knjige 1988. godine (urednici su bili Steiner and Vermandel) u kojoj su izložene osnove i metodologija matematičkog obrazovanja, kao i knjige (1994) *Didactics of Mathematics as Scientific Discipline* (Biehler, Scholz, Strässer & Winkelmann, urednici). Poslednja knjiga izdana je u čast Hans-Georg Steiner a povodom 20-ogodišnjice Instituta za didaktiku matematike (Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) in Bielefeld). Ova knjiga nudi opširan pregled gledanja na matematičko obrazovanje širom svijeta tokom vremena. Osim toga, inicirana studija o matematičkom obrazovanju kao istraživačkom domenu rezultirala je pojavom knjige (1998) *Mathematics Education as a Research Domain*¹, publikovane u dva toma, u kojoj su uporedo tretirane brojne internacionalne perspective istraživanja matematičkog obrazovanja. Nekoliko drugih knjiga je, takođe, bilo publikovano. Ove knjige prikazuju različite tradicije istraživanja pri čemu kompleksnost ovih izdanja je zauvijek promjenilo lice tehnologija istraživanja matematičkog obrazovanja. Sveobuhvatna knjiga o istraživačkim idejama *Handbook of research design in mathematics and science education* (Kelly & Lesh, 2000) je takođe jedan dio opštih nastojanja.

U cilju sagledavanja problema sa kojima se susreću istraživači matematičkog obrazovanja, podsjetimo se Freudenthalove liste² problema u matematičkom obrazovanju, iz 1983. godine:

Prvi problem: *Zašto učenik ne može da radi aritmetiku?* Ovo je naravno prvi problem za nastavnika ali i za istraživača matematičkog obrazovanja.

Drugi problem: *Kako učenici uče?* Ovaj problem nije aderesiran samo nastavnicima matematike već i širem krugu istraživača različitih naučnih domena. Na primjer, u domenu kognitivnih nauka.

Treći problem: *Kako koristiti progresivne šematizacije i formalizacije u podučavanju učenika o nekom matematičkom objektu?*

Četvrti problem: *Kako koristiti unutrašnje resurse tokom nastavnog procesa i kako stimulisati pamćenje?*

Peti problem: *Kako stimulisati pojavu refleksija o nekim posebnim fizičkim, mentalnim i matematičkim aktivnostima?*

Šesti problem: *Kako razviti kod učenika zainteresovanost za matematiku?*

Sedmi problem: *Kako je matematičko podučavanje strukturisano po nivoima i kako te strukture koristiti u nastojanjima diferencijalnog pristupa podučavanju?*

Osmi problem: *Kako kreirati odgovarajuće kontekste u cilju podučavanja matematizaciji kontekstualnih problema?*

Deveti problem: *Da li se neko može podučavati geometriji koristeći se njegovim ličnim refleksijama na njegovo svojstveno intuitivno shvatanje prostora?*

Deseti problem: *Kako kalkulatori i kompjuteri mogu biti korišteni u narastanju matematičkog razumjevanja?*

Jedanaesti problem: *Kako dizajnirati edukacioni razvoj kao jednu od strategija za ostvarivanje poželjnih promjena?*

Dvanaesti problem je bio fokus na *udžbenik i nastavni materijal*. Ova dva aspekta su u fokusu interesovanja istraživača i danas, i, naravno, nastavne tehnologije.

Trinaesti problem, poslednji na ovoj listi, bio je prezentovan na sljedeći način: *Istraživanje matematičkog obrazovanja je jedan od glavnih problema matematičkog obrazovanja.*

2. Determisiranje problema

U prvoj dekadi ovog novog milenijuma, čini se da je sazrelo vrijeme za udruženja matematičara i istraživača matematičkog obrazovanja sagledaju ukupnost razgranatih i u velikoj mjeri divergentnih teorija matematičkog obrazovanja (podučavanja i učenja matematike) te naprave / predvide kurseve razvoja tih teorija u bliskoj budućnosti. U brojevima 37(6) i 38(1) časopisa *Zentralblatt für Didaktik*

¹ To je, vjerovatno, najvažnija i najkvalitetnija knjiga o istraživanjima matematičkog obrazovanja

² H.Freudenthal (1983): *Major problem of mathematics education*; Proceedings of the Fourth ICME; Berkley, Birkhauser Inc., Boston, MA, 1-7

der Mathematik, razvijena je internacionalna diskusija o mnogim temama unutar teorija matematičkog obrazovanja

Vidokrug članaka u tim izdanjima časopisa ZDM je nastavak aktivnosti ‘Research Forum on Theories of Mathematics Education’ realizovanih na ‘29th Annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education’ (PME) u Melbourne, Australia. Cilj ta dva specijalna izdanja časopisa ZDM-a (37(6)(2005) i 38(1)(2006)) je ponovno pokretanje diskusije o teorijama matematičkog obrazovanja kao i kritički osvrti na ulogu tih teorija za budućnost istraživanja područja matematičkog obrazovanja (podučavanja i učenja matematike)

Naša koncepcija i prioriteti pojedinih posebnih teorija matematičkog obrazovanja u pravilu utiču na naš izbor kako istraživačkih pitanja tako i teorijskih šablona u istraživanjima matematičkog obrazovanja. Naše teorijske alijanse takođe utiču na sadržaje i kompleksnost kurseva kojim se tretira matematičko obrazovanje (u nas, na Metodiku nastave matematike).

Jedno pitanje stalno susrećemo kada se bavimo istraživanjima matematičkog obrazovanja. Da li je, ili nije, matematičko obrazovanje / metodika matematike jedna naučna disciplina slična drugim (čvrstim) naukama. Ako jeste, moramo uzimati u obzir važnost izgradnje teorija i njihovo iskorištavanje u istraživanjima matematičkog obrazovanja. Nedavno, 1997. godine, Donald E. Stokes, u svojoj knjizi ‘*Pasteur's quadrant: Basic science and technological innovation*’ sugerirao je novi način razmišljanja o istraživačkim naporima u nauci: odustajanje od linearnog jednodimenzionog kontinuuma



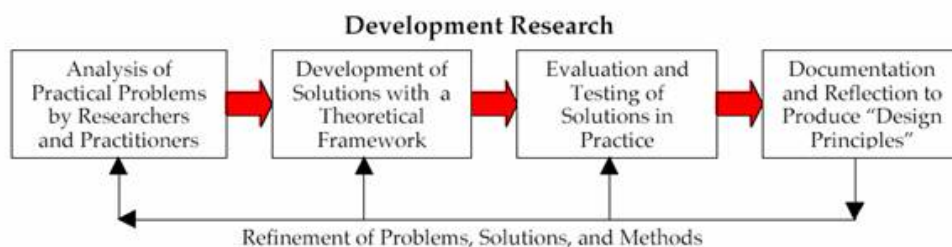
Iako je ovaj jednodimenzionalni pristup efektivan, Stokes, ipak, iskazuje tvrdnju da je on suviše uzak i ne može efektivno da opiše šta se dešava u naučnim istraživanjima. U ‘*Pasteur's quadrant*’ sugerirao je ustanovljavanje dvo-dimenzionog modela koji nudi potpuno drugačiju koncepciju reprezentovanja istraživačkih napora u nauci. U jednom kombinovanom koordinatnom sistemu, Stokes na Y-osi predstavlja „teorijska“ istraživanja (kao što je rad na teorijskoj fizici) a na X-osi predstavlja „primjenjena“ istraživanja (kao što je rad inovatora): Vizuelizacija ove ideje je data sljedećim modelom

<i>Borh'ov Quadrant</i> „Čista“ Teorijska Fundamentalna istraživanja	<i>Paster'ov Quadrant</i> Fundamentalna istraživanja inspirisana primjenama
	<i>Edison'ov Quadrant</i> „Čista“ aplikativna istraživanja

Gornji lijevi kvadrat, koji se odnosi na „čista“ teorijska istraživanja za koja, u toj fazi razvoja, nije moguće naći primjene, Stokes je, po Nielsu Borhu, nazvao „Borh'ov kvadrat. Donji desni kvadrat, zamišljen kao područje koje sadrži ciljna istraživanja sa strogo aplikativnim namjerama zbog komercijalizacije bez dubljeg razumjevanja istraživanih fenomena, Stokes je, po Edisonu, nazvao Edisonov kvadrat. Istraživačke aktivnosti, smještene u ovaj kvadrat, uglavnom ignorišu naučne implikacije svojih aktivnosti /istraživanja. Gornji desni kvadrat rezervisan je za područja baznih istraživanja u cilju proširenja granica razumjevanja istraživanih fenomena ali su bila inspirisana naraslim aplikativnim paradigama tih područja. Ovaj kvadrat Stokes je nazvao Pasteur'ov kvadrat. Donji lijevi kvadrat, bez naslova, po Stokesovoj interpretaciji, sadrži istraživanja skromnih aplikativnih namjera a koja nemaju za cilj razumjevanje istraživanih fenomena. T.C. Reeves je, 2000. godine, izložio ideju da, po suštini stvari, u taj kvadrant spadaju istraživanja obrazovanja –

nagomilavanju znanja o obrazovanju koja se, u suštini niti mogu primjenjivati (a, čak, i kad se primjenjuju dovode do skromnih rezultata) niti doprinose razumjevanju istraživanih fenomena.

Stokes je predvidio osnovni princip za bazna istraživanja inspirisana aplikativnim potrebama ali nije ponudio algoritam / vodič / istraživački razvojni model za ova istraživanja. T.C. Reeves je, 2000. godine, ponudio jedan takav vodič, čiju vizuelizaciju dajemo:



(Preuzeto iz Reeves, 2000. 10 pp.)

Ako primjenimo Stokes-ov model na istraživanja matematičkog obrazovanja, potrebno je da jasno istaknemo šta je na Y-osi Pasteur'ovog koordinatnog sistema, zapravo treba da istaknemo naše ustanovljene teorije o matematičkom obrazovanju ako želimo da oblast matematičkog obrazovanja sa punim pravom nazivamo naukom. Na primjer, u fizici, teorijski termini moraju biti determinisani u opštim operacionalnim kategorijama, tj. oni treba da opisuju prirodu posredstvom teorija u kojima su ti termi prihvaćeni samo ako mogu biti definisani / zasnovani na bazi provedenih eksperimenata. Kako ovo možemo primjeniti na istraživanje matematičkog obrazovanja? – je jedno od pitanja koje bi trebalo da međunarodna zajednica istraživača matematičkog obrazovanja uzme u razmatranje. Dakle, kako da istraživač operacionalno definiše terme koje namjerava da koristi u determinisanju rezultata svojih istraživanja u opšte prihvaćenim kategorijama. Naime, kako da uočene regularnosti / zakonitosti pokuša kondenzovati unutar teorija kao što je, na primjer Piaget nastojao da uvede filogenteičke mentalne kognitivne operatore. (Dietrich, 1991, 1994, 2004). Kroz raspravu, posredstvom isticanja poteškoća apstrahovanja univerzalni invarijanti o tome šta ljudi rade u različitim matematičkim kontekstima kao rezultat su uložene unutar različitih socijalnih i kulturoloških okruženja kao i brojni beskorisni pokušaji formiranja velikih teorija. Kao što je jednom Henry Pollak rekao, nema dokaza samih za sebe u matematičkom obrazovanju. Međutim, matematička zajednica je odavno unutar posla formulisanja malih teorija i modela sa ciljem da unutar njih postavi i sagleda neka fundamentalna pitanja.

Alan Schoenfeld (Schoenfeld 1999) u svom predsjedničkom govoru na godišnjoj skupštini Udruženja američkih istraživača obrazovanja, u Montrealu, istakao je tri ključna područja koja bi trebalo razvijati: (1) teorijski razvoj u specifičnim područjima s obaveznim uvažavanjem prakse; (2) sudejstvjuće teorije i njihova primjena; i (3) razvoj praktičnih alata s uvažavanjem zahtjevne prakse. (Schoenfeld, 1999). Sistemski rad, koji je provela Scheinfeldova radna grupa sa Univerziteta Berkeley, kalifornija, USA, rezultirao je modelom „podučavanje u kontekstu“ u kojem je fino graduirana karakterizacija donošenja nastavničkih odluka, bazirana na analizi nastavničkih znanja, nastavničkih ciljeva i nastavničkih uvjerenja (Schoenfeld 1998, 1999a, 1999b, 2002a).

Slijedeći Steinera i njegove kolege, ističemo pitanja koja se smatraju dominantnim u istraživanjima teorija matematičkog obrazovanja.

- Šta je uloga teorije u istraživanju matematičkog obrazovanja?
- Kako Stokesov model istraživanja u nauci može da se primjeni na istraživanje matematičkog obrazovanja?
- Koje su kurentno prihvaćene i naširoko korištene teorije učenja u istraživanjima matematičkog obrazovanja? Zašto su one popularne?
- Da li postoje dokazi o uticajima političkih struktura u korištenju i razvoju teorija matematičkog obrazovanja?
- Šta se dešava sa konstruktivističkom teorijom učenja?
- Uključivanje kognicije prisutno je na sceni poslednjih godina. Kakve su implikacije toga u istraživanjima matematičkog obrazovanja, podučavanja i učenja?

- Teorije modela i modeliranje privlače znatnu pažnju u ovim poljima poslednjih godina. Kakav je uticaj ovih teorija na istraživanje matematičkog obrazovanja, podučavanja i učenja?
- Kako saznajne teorije mogu doprinjeti istraživanjima matematičkog obrazovanja?
- Da li postoje veza između istraživačevih ubjeđenja o prirodi matematike i njegovog preferiranja neke posebne teorije?
- Koje su implikacije trendova u teorijama učenja na buduća nastojanja istraživača matematičkog obrazovanja?
- U kojoj mjeri matematičke mjere imaju uticaja na školsku praksu?
- U kom pravcu bi trebalo da se usmjerimo u razvoju i aplikacijama teorija istraživanja matematičkog obrazovanja? Koji zahtjev pokreće matematičko obrazovanje naprijed?

3. Neka pitanja o istraživanju matematičkog obrazovanja

Unutar međunarodne zajednice matematičara, realizatora nastave matematike i istraživača matematičkog obrazovanja u poslednjih desetak godina počela se osjećati potreba unutar te tri grupacije za međusobnim razumjevanjem. Sem toga, zbog narasle netolerancije između te tri grupe pojavila se potreba utvrđivanja i objašnjavanja domena kojim se ove tri grupe reprezentuju drugim naučnim zajednicama kao i međusobno. Tada se sticao utisak da matematičari to smatraju jednom od najznačajnijih poslova pri kraju XX vijeka. Prisjetimo se observacija Nicolasa Balacheffa³: „Većina nas želi da učestvuje u razvoju ovog istraživačkog polja unutar akademske zajednice matematičara. Ovo implicira potrebu da se daju objašnjenja naše namjere na nivou društvenih osnova (Da li postoji bilo kakva potreba za razvoj ovih istraživanja?) kao i njihove relevantnosti unutar sveukupnog akademskog svijeta. Iz ovog razloga sublimirana su pitanja o naučnim standardima, tezama, publikacijama, kongresima, o zapošljavanju mladih akademaca u ovom području kao i o vezama između ovih istraživanja i istraživanja napravljenih u drugim poljima.“ Prema tome, neophodna je 'unutrašnja' identifikacija istraživačkog domena matematičkog obrazovanja ali, isto tako, i sagledavanje ovog domena sa stanovišta drugih domena. Jedan vanjski domen, na primjer, je sociologija. Kako je matematičko obrazovanje organizovano i institucionalizovano? Gdje se provode istraživanja matematičkog obrazovanja? Gdje se brane doktorske teze iz matematičkog obrazovanja? Ako jedan nastavnik želi da se zaposli u odsjeku za matematiku, gdje njegova habilitacioni stepen treba da je postignut? Da li se na istraživače matematičkog obrazovanja gleda kao na članove matematičke zajednice? Kako se gleda na realizatore nastave matematike (na bilo kom nivou)? Da li su ono isto tako članovi zajednice matematičara? Da li je potrebno da postoji i udruženje nastavnika matematike? Slična pitanja se prirodno pojavljuju kada se nastoji razdvojiti domen istraživanja matematičkog obrazovanja od drugih domena kao što su na primjer istorija, filozofija, antropologija i psihologija.

Jedan od pristupa sagledavanju matematičkog obrazovanja mogao bi biti traženjem odgovora na sljedeća pitanja.

(1) Šta su specifični objekti studija u matematičkom obrazovanju?

Objekti koje treba obrađivati pri istraživanjima matematičkog obrazovanja mogli bi, na primjer, biti podučavanje matematike, učenje matematike, nastave situacije, didaktičke situacije, veze između podučavanja, učenja i matematičkog znanja, esencijalnost realizacije nastave matematike, socijalni pogled na matematiku i njenu nastavu, ili sistemi matematičkog obrazovanja.

Ako se neka osoba obrazuje za realizatora nastave matematike da li to treba, ili ne, da bude vrlo slično matematičkom obrazovanju? Kakva su uvjerenja studenata o domenu svojih studija u ako se pripremaju za matematičara a kakva ako se pripremaju za nastavnika matematike? Da li oni na matematiku gledaju na isti način? Šta je to matematika, u suštini stvari? Šta je elementarna matematika? Analogna pitanja bi se mogla postaviti ako se posmatra veza između obrazovanja nastavnika matematike i domeni kao što su pedagogija, didaktika i psihologija. Kako na matematičke sposobnosti, matematičke vještine i matematička znanja gledaju matematičari, istraživači matematičkog obrazovanja i realizatori nastave matematike?

(2) Šta su ciljevi istraživanja matematičkog obrazovanja?

³ Citirano prema [41], strana 4.

Na ciljeve istraživanja matematičkog obrazovanja možemo gledati sa dva aspekta: sa aspekta pragmatičnih ciljeva i sa aspekta fundamentalnih naučnih ciljeva. U vezi sa pragmatičnim ciljevima može se težiti poboljšanju nastave prakse u smislu da studenti više znaju i bolje razumiju nastave sadržaje koje će predavati kao i da steknu potrebna znanja i vještine neophodne u planiranju i realizaciji nastave matematike. Važan naučni cilj mogo bi biti razvoj matematičkog obrazovanja kao jedno posebno akademsko polje istraživanja.

Kakva bi mogla biti struktura takvog polja? Da li bi trebalo da ta struktura ima neke veze matematičkim oblastima (tj. Da li bi trebalo da postoje područja didaktika / metodika algebre, ili didaktika / metodika geometrije)? Da li bi trebalo da se izučavaju različiti pristupi podučavanja i učenja matematike, ili neka druga specifična problematika (kao na primjer, izučavanje interakcija i komunikacija u učionici, izučavanje učeničkog/studentuskog razumjevanja matematičkih koncepata, i tome slično)?

Za oba cilja se uzima da postoji mogućnost razvoja neke vrste profesionalnog znanja. Međutim, postavlja se pitanje kako na to profesionalno znanje gledaju matematičari, nastavnici matematike i istraživači matematičkog mišljenja.

Od čega zavisi uspješnost podučavanja i učenja? Da li postoji takav metod podučavanja da smo sigurni da će realizacija nastave biti uspješna bez obzira ko realizuje nastavu. Ako to nije tako, da li postoje neka fundamentalna znanja o istraživanjima matematičkog obrazovanja koja bi otvarala mogućnost da nastavnici matematike sami rade na poboljšanju svoje nastave?

(3) *Koja su specifična istraživačka pitanja u matematičkom obrazovanju?*

Matematičko obrazovanje nalazi se između mnogih dobro ustanovljenih naučnih domena kao što su matematika, psihologija, pedagogija, sociologija, epistemologija, kognitivna nauka, semiotika, ekonomija, ali ima i svoje specifične probleme karakteristične za ovaj domen. Na matematičko obrazovanje treba gledati kao na jedan specifičan domen a nikako kao na dio prethodno navedenih disciplina. Postoje dva odvojena tipa pitanja u matematičkom obrazovanju: jedna od njih direktno ili gotovo direktno dolaze iz prakse podučavanja i učenja matematike dok drugu vrstu generiše samo istraživanje matematičkog obrazovanja. Na primjer, pitanje o načinima motivacije učenika / studenata za učenje matematike, ili kako objasniti učeničke /studentske poteškoće u učenju nekog posebnog dijela matematike direktno proizilaze iz praktičnih potreba. Ali pitanja klasifikacije poteškoća, njihovog razumjevanje kao i načini za njihovo prevazilaženje unutar nekog teorijskog okruženja su više vezana za potrebe istraživača.

(4) *Šta su rezultati istraživanja matematičkog obrazovanja?*

Jedan rezultat je blizak tzv. problematici matematičkog obrazovanja, ili teorijskim okvirima matematičkog obrazovanja ako je direktno ili indirektno zasnovan na promišljanju o matematičkom obrazovanju a pri njegovom ustanovljavanju korištena je standardno primjenljiva naučna metodologija. Ova relativnost rezultata pri istraživanjima matematičkog obrazovanja, mada zajedničko obilježje u svim naukama, često se zaboravlja. Uobičajenost eksplicitnih tvrdnji u drugim naučnim domenima, kao što su, na primjer, biologija, sociologija, ili matematika, ne može imati mjesta u istraživanjima matematičkog obrazovanja. U istraživanjima matematičkog obrazovanja nije ni malo lako ustanoviti da li je neko mišljenje tačno ili ne. Dvije vrste 'pronazaka' mogu se razlikovati u istraživanjima matematičkog obrazovanja: ona koja su zasnovana na dugotrajnom posmatranju prakse i iskustvu, i ona koja su zasnovana na posebno pokrenutim izučavanjima. Većina ljudi bi se vjerovatno složila da je rad na empirijskom provjeravanju istraživanje. Ali, prirodno se postavljaju pitanja: Da li je činjenje praktičnih stvari istraživanje? Da li je mišljenje istraživanje? Da li se ove aktivnosti mogu razdvojiti? Da li se neki rezultat može dobiti bez promišljanja i praktičnog rada? Da li matematičko obrazovanje treba da bude konsolidovano kao nauka? Moguće da je to ogroman domen promišljanja, istraživanja i prakse. Ono šta kvalifikuje jedan domen ljudskih aktivnosti kao naučni domen je provjeravanje i korištenje metode procjenjivanja. Šta bi trebalo da znamo o matematičkom obrazovanju danas od onog što nismo znali prije? Šta smo naučili o procesima učenja i podučavanja matematike?

Da li možemo da identifikujemo neke kategorije rezultata? Jedna kategorija bi mogla biti ekonomizacija podučavanja. Bilo koje činjenice, zakoni, metode, procedure, ili teorije koje su nastale generalizacijama našeg iskustva kao i predviđanjima koja proizilaze iz tih rezultata jačaju našu moć

razumjevanja učenja i podučavanja. Jedna druga kategorija bi mogla biti razbijanje iluzija. Rezultati koji se odnose na naša uvjerenja kao i na nekritička preuzimanja iz drugih oblasti bi trebalo procjenjivati kao vrijednosti u domenu istraživanja matematičkog obrazovanja. Treća kategorija mogla bi biti ono što potkrepljuje praksu. Realizatori nastave matematike su zainteresovani za poboljšanje njihove vlastite nastave kroz dublje razumjevanje nastavnih sadržaja. Zainteresovani su takode i za primjene uspješnih tehnologija podučavanja. Ostale kategorije rezultata istraživanja matematičkog obrazovanja mogu biti u tijesnoj vezi, na primjer, sa epistemološkim, metodološkim, istrojskim, i psihološkim izučavanjima nastave prakse, učenika /studentata, ili same prirode matematike.

(5) Koje kriterije treba primjenjivati u evaluaciji rezultata istraživanja matematičkog obrazovanja?

Kako procijeniti validnost istraživačkih rezultata? Kako procijeniti njihovu važnost? Da li bi trebalo da koristimo neki kriterij značajnosti? Kako ustanoviti njihovu objektivnost? Ili originalnost? Da li bi trebalo da vodimo računa o uticaju istraživačkih rezultata na praksu podučavanja? Koje bi druge kriterije trebalo primjenjivati?

Prvi problem sa kojim se susrećemo je značenje korištenih termina kao što su tačno, validno, i značajno u kontekstu matematičkog obrazovanja. Povezana pojave u vezi sa prethodnim je pitanje šta je znanje po svojoj suštini. Ovo je značajnije pitanje nego pitanje validnosti. Ako znamo šta je cilj matematičkog obrazovanja trebalo bi da se snadbijemo odgovorima na pitanje o metodama procjena validnosti.

Korisno je takode postići sposobnost razumjevanja načina na koje istraživačke rezultate možemo koristiti. Kako se rezultati istraživanja matematičkog obrazovanja mogu primjenjivati? Kako ti rezultati mogu pomoći realizatorima nastave matematike u poboljšanju njihove nastave prakse? Da li postoji opcija koja bi omogućila osobama koje imaju principijelno-filozofskog i političkog uticaja na realizaciju nastave matematike koriste rezultate istraživanja matematičkog obrazovanja?

Izvori za kriterije procjene kvaliteta istraživanja matematičkog obrazovanja mogli bi biti odgovori na sljedeća pitanja:

(i) Treba li veza matematičkog obrazovanja sa nastavnim situacijama da generiše kriterij za procjenu kvaliteta istraživanja matematičkog obrazovanja? Čitav domen matematičkog obrazovanja odnosi se na podučavanje i učenje matematike u najširem smislu, uključujući, na primjer, učenje izvan škole, implementaciju najobuhvatnijih sistema, i tome slično. Prema tome, očigledno je za istraživanja unutar polja matematičkog obrazovanja imaju uticaja na razvoj matematičkog podučavanja.

(ii) Treba li veza matematičkog obrazovanja i matematike da generiše kriterije za procjenu kvaliteta istraživanja matematičkog obrazovanja?

(iii) Treba li da veza matematičkog obrazovanja sa fundamentalnim disciplinama generiše kriterije za procjenu kvaliteta istraživanja matematičkog obrazovanja? U nastojanju da matematičko obrazovanje gledamo kao jedan poseban domen podlozan specifičnom istraživanju, trebalo bi da smo u stanju da izdvojimo i determinišemo teorije i metodologije izvan drugih ali usko povezanih sa njim fundamentalnih disciplina kao što su psihologija, sociologija, filozofija i opšta didaktika. Važni kriteriji iz tih disciplina trebalo bi da učestvuju u formiranju kriterija za procjenu kvaliteta istraživanja matematičkog obrazovanja.

(iv) Treba li koncept progressa u matematičkom obrazovanju da generiše kriterije za procjenu kvaliteta istraživanja matematičkog obrazovanja? Cilj istraživanja matematičkog obrazovanja mora biti proširivanje i produbljavanje kako našeg znanja tako i našeg razumjevanja nekih aspekata matematičkog obrazovanja. Ovaj zahtijev znači da mora postojati kriterij kojim ćemo identifikovati progres teorija matematičkog obrazovanja

(v) Kako treba gledati na razlike unutar matematičkog obrazovanja?

4. Osvrt na izučavanje teorija matematičkog obrazovanja

Međunarodna matematička zajednica i međunarodna zajednica istraživača matematičkog obrazovanja pokušavaju da ova i neka druga pitanja koja se odnose na matematičko obrazovanje i istraživanje matematičkog obrazovanja prezentiraju međunarodnoj akademskoj zajednici posredstvom velikog broja publikacija – naučnih časopisa i naučnih knjiga, u namjeri da svoje uvjerenje o naučnom domenu istraživanja matematičkog obrazovanja prenese na što je veći dio te zajednice.

Jedno od tih značajnih pitanja je i egzistencija i svrshishodnost više (divergentnih) teorija matematičkog obrazovanja (učenja i podučavanja matematika). Čini se da jedno od plauzibilnih

objašnjenja za postojanje više teorija matematičkog učenja u divergentnim epistemološkim stajalištima o tome šta predstavlja matematičko znanje. Jedno drugo objašnjenje sastoji se u tome da matematičko obrazovanje iako ne liči na „čistu“ disciplinu u nauci, pod snažnim je kulturološkim, socijalnim, i političkim uticajima (e.g., D'Ambrosio, 1999; Secada, 1995; Skovsmose & Valero, 2002). U svom poznatom preglednom radu iz 1998. godine o matematičkom obrazovanju (Mura's 1998) piše da u mnogim člancima kanadskih istraživača matematičkog obrazovanja često se poziva na radove teoretičara Jeana Piageta, Zoltana Dienes i Jeromea Brunera. Artigue je prije deset godina napisao interesantan članak (Artigue 1999), u poznatom časopisu *Notices of the American Mathematical Society*, gdje je opisao pozicije francuskih matematičara i realizatora nastave matematike o prirodi i poziciji istraživanja matematičkog obrazovanja. U tom članku Artigue komentariše uticaj Piaget'ovog rada na tzv. konstruktivističku fazu, od 1980 do tada, u istraživanjima matematičkog obrazovanja.. Takođe, u tom članku objasnio stanovišta jedne nove perspektive podučavanja matematike, ali i činjenicu da je podučavanje nesvodljivo na prostu i jednosmjernu transmisiju informacija. Međutim, konstruktivistički „model“ podučavanja bio je kritikovana zbog uvažavanja socijalne i kulturološke dimenzije podučavanja. Koristeći se rezultatima Brousseau-a (1997) i Chevillard'a (1992), Artigue isticao manjkavost brojnih teorija. Istovremeno je ponudio objašnjenje o diskontinuitetu učenja i razumjevanja matematike na prelazu sa srednjoškolskog obrazovanja na univerzitetski nivo. Prema Lermanu (2000), socijalna dimenzija u istraživanjima matematičkog obrazovanja uočava se krajem 1980-ih godina kada se na matematičko obrazovanje počelo gledati kao na humanističku djelatnost. Socijalni konstruktivizam, koji je proistekao iz radova Vygotskog and Wittgensteina (Ernest, 1994), bio je dominantna istraživačka paradigma od tada. Takođe, postoji konfuzija o tome da li je socijalni konstruktivizam baziran na kognitivnim pozicijama, ili na metodološkim pozicijama, ili na obje (Noddings, 1990; Ernest 1991). S druge strane, u kognitivno orijentisanim teorijama naglašava se da mentalne strukture treba da budu rezultat podučavanja matematike. Sem toga, te toeije objašnjavaju kako se te mentalne strukture razvijaju te kako bi trebalo da školski kurikulumi matematike uhvate esenciju matematike i rada u matematici (e.g., see Stevens, 2000). Aktuelna 'alternativna' pozicija o prirodi matematike je tipa „matematika zasnovana na razumu“ (Lakoff & Nunez, 2000). Ovo sugerise da je matematika produkt formiran ljudskim umom ali pod snažnim uplivom društva i društvene kulture. Lakoff-ev i Nunez-ev (2000) koncept „naslijeđenog mišljenja“ zasnovan je na shvatanju da čovjek i njegov mozak ne samo stiču iskustva već i izgrađuju nove iskustvene strukture i konceptualne sisteme. Adaptirajući poziciju koncepta „naslijeđenog mišljenja“, Lakoff and Nunez su izložili ideju da matematika može biti mnogo više pristupačna i razumljiva za učenje pod uslovom da se podučavanje fundamentalnim matematičkim idejama ostvaruje na analogan način kako su se te ideje pojavljivale (t.j. posredstvom "konceptualnih metafora"). Socijalni konstruktivizam se nalazi na stanovištu da je socijalna interakcija jedan od potrebnih uslova u ovom konceptu matematike.

Literatura

- [1] Artigue, M. (1999). *The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education*. Notices of the American Mathematical Society (AMS) 46 (11), 1377 -1385.
- [2] Beth E.W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company.
- [3] Biehler, Scholz, Strässer & Winkelmann (Eds) (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. MA: Kluwer, Norwell.
- [4] Angelika Bikner-Ahsbahs and Susanne Prediger : *Diversity of theories in mathematics education – How can we deal with it?* ZDF, Vol. 38 (1)(2006), 52-57
- [5] Bishop, A.J., et al. (1996). *International Handbook on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer
- [6] Bishop, A. (1998). *Mathematics Education Research: past, present and future*. Mathematics Education Research Journal, 10(3), 76 - 83.
- [7] Bishop, A.J., et al. (2003). *Second International Handbook on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer
- [8] Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (translated and edited by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield), Kluwer Academic Publishers.
- [9] Chevillard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1).
- [10] D'Ambrosio, U. (1999). *Literacy, Matheracy, and Technoracy: A trivium for today*. Mathematical Thinking and Learning, 1(2), 131-154.
- [11] Dietrich (1991). *Induction and evolution of cognition and science*. Philosophica 47/II.

- [12] Dietrich (1994) . *Is there a theory of everything?* Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications, 80, 166-170.
- [13] Dietrich, O. (2004). *Cognitive evolution*. In F.M. Wuketits and C. Antweiler (Eds). *Handbook of Evolution* (pp. 25-77). Wiley-VCH Verlag GmbH & Co: Weinheim.
- [14] Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*, Briston, PA: The Falmer Press.
- [15] Ernest, P. (1994). *Conversation as a metaphor for mathematics and learning*. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics Day Conference, Manchester Metropolitan University (pp. 58-63). Nottingham: BSRLM.
- [16] Paul Ernest : *Reflections on theories of learning*; ZDM, Vol. 38 (1)(2006), 3-7
- [17] Furinghetti, F. (2003). *Mathematical instruction in an international perspective: the contribution of the journal L'Enseignement Mathématique*. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. Hodgson and G. Schubring: *One hundred years of l'Enseignement Mathématique*, Monograph no.39. Geneva.
- [18] Griesel, & H.G.Steiner (1992). *Didactics of Mathematics*. ZDM, Vol. 24(7)(1992), 287-295.
- [19] A.E.Kelly & R.Lesh (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.
- [20] I.Lakatos (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [21] G.Lakoff & R.Núñez. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- [22] Lesh (in press, a). In R. Lesh, J. Kaput & E. Hamilton (Eds.), *Foundations for the Future: The Need for New Mathematical Understandings & Abilities in the 21st Century*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- [23] F.K.Lester (2005). *The place of theory in mathematics education research*. In H. Chick et al (Eds.), Proceedings of the 29th Annual PME: Melbourne, Australia, vol1, 172-178.
- [24] Frank K. Lester, Jr.: *On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education*; ZDM, Vol. 37 (6)(2005), 457-467
- [25] S.Lerman (2000). *The social turn in mathematics education research*. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44) Westport: Ablex Publishing.
- [26] S.Lerman (1998). *Research on socio-cultural perspectives of mathematics teaching and learning*. In J. Kilpatrick & A. Sierpiska (Eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (Vol. 1, pp. 333-350). Kluwer Academic Publishers: Great Britain.
- [27] Steve Lerman : *Theories of mathematics education – is plurality a problem?*; ZDM, Vol. 38 (1)(2006), 8-13
- [28] Richard Lesh and Bharath Sriraman (2005): *Mathematics education as a design science*; ZDM, Vol. 37 (6)(2005), 490-498
- [29] Luis Moreno-Armella and Bharath Sriraman (2005): The articulation of symbol and mediation in mathematics education; ZDM, Vol. 37 (6)(2005), 476-486
- [30] R.Mura (1998). What is mathematics education? A survey of mathematics educators in Canada. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity* (vol.1), (pp. 105-116).Kluwer Academic Publishers: Great Britain.
- [31] N.Noddings (1990). *Constructivism in mathematics education*. In R. Davis, C. Maher & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp.7-18), Reston, VA: NCTM.
- [32] John Pegg and David Tall: *The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks*; ZDM, Vol. 37 (6)(2005), 468-486
- [33] Daniel A.Romano (2007): *Razmišljanje o matematičkom obrazovanju*; IV Symposium “Technology, Informatics and Education for Learning and Knowledge Society”, Novi Sad, 26-27.01.2007. Institut za pedagoška istraživanja Beograd, Centar za primenu nauke, tehnologije i informatike Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet Novi Sad, Novi Sad 2007, 82-90
- [34] D.A.Romano (2009): *Metodika matematike – naučna disciplina ?* V Symposium “Technology, Informatics and Education for Learning and Knowledge Society”, Novi Sad, 19-20.06.2009. Institut za pedagoška istraživanja Beograd, Centar za primenu nauke, tehnologije i informatike Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet Novi Sad, Tehnički fakultet Novi Sad, Novi Sad 2009, 1-13 pp (Accepted on 11.06.2009.)
- [35] A.H. Schoenfeld (1998). *Toward a theory of teaching in context*. Issues in Education, 4(1), 1-94.
- [36] A.H.Schoenfeld (1999a). *Models of the teaching process*.
- [37] A.H.Schoenfeld (1999b). *Looking toward the 21st century: Challenges of educational theory and practice*. Educational Researcher, 28(7), 4-14
- [38] Alan H. Schoenfeld (2002a). *A Highly interactive discourse structure*. In J. Brophy (Ed.), *Social Constructivist Teaching: Its Affordances and Constraints* (Volume 9 of the series Advances in Research on Teaching), pp. 131 – 170. Amsterdam: JAI Press.
- [39] A.H.Schoenfeld (2002b). *Research methods in (mathematics) education*. In English, L.D. (Ed.). (2002). *Handbook of international research in mathematics education*. (pp. 435 – 487). Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, NJ.
- [40] W.Secada (1995). *Social and critical dimensions for equity in mathematics education*. In W. Secada, E. Fennema, & L. Byrd Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 147-164). Cambridge: Cambridge University Press.

- [41] A.Sierpinska & J.Kilpatrick (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity* (vols. 1 & 2). Kluwer Academic Publishers: Great Britain.
- [42] E.A.Silver & P.Herbst (2004, April). "Theory" in mathematics education scholarship. Paper presented at the research pre-session of the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Philadelphia, PA.
- [43] O. Skovsmose & P. Valero (2002). *Democratic access to powerful mathematics ideas*. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education: Directions for the 21st century*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [44] Bharath Sriraman and Lyn D. English (2005): *Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research*; ZDM, Vol. 37 (6)(2005), 450-456
- [45] Bharath Sriraman and Gabriele Kaiser (2006): *Theory usage and theoretical trends in Europe: A survey and preliminary analysis of CERME4 research reports*. ZDM, Vol. 38 (1)(2006), 22-51
- [46] Bharath Sriraman and Lyn D. English (2006): *Theories of mathematics education: European perspectives, commentaries and viable research directions*; ZDM, Vol. 38 (1)(2006), 1-2
- [47] L.Steen (1999). *Review of Mathematics Education as research domain*. Journal for Research in Mathematics Education, 30(2) 235-41
- [48] L.Steffe, P.Nesher, P.Cobb, G.Goldin and B.Greer (eds) (1998). *Theories of Learning Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum and Associates.
- [49] H.G.Steiner & A.Vermandel (1988): *Foundations and methodology of the discipline of mathematics education*. Antwerp, Belgium (Proceedings of the TME Conference).
- [50] R.Stevens (2000). *Who counts what as mathematics? Emergent and assigned mathematics problems in a projectbased classroom*. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 105-144) Westport: Ablex Publishing.
- [51] D.E.Stokes (1997). *Pasteur's quadrant: Basic science and technological innovation*. New York: Brookings Institution Press.
- [52] Günter Törner and Bharath Sriraman (2006): *A brief historical comparison of tendencies in mathematics education in Germany and the United States*; ZDM, Vol. 38 (1)(2006), 14-21
- [53] Von Glasersfeld, E.(1984). *An introduction to radical constructivism*. In P. Watzlawick (Ed.), *The invented reality* (pp.17-40), New York: Norton.