FILOMAT (Niš) 9:3 (1995), 743–751
Algebra, Logic & Discrete Mathematics
Niš, April 14–16, 1995.

О ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ДЛЯ АВТОМАТОВ В ОДНОМ КЛАССЕ ЛАБИРИНТОВ

Г. Килибарда и Ш. Ушчумлич

Резюме. В работе дается более эффективный алгоритм обхода чем те, которые даны в работах [1], [2] и [3]. Также улучшены оценки времени обхода и количества состояний универсальных обходчиков лабиринтов, рассматриваемых в тех работах.

Все результаты и понятия, которые не приводятся здесь, можно найти в работе [3].

Пусть L — некоторый конечный плоский мозаичный лабиринт. Для любой конечной области $\Delta \in \mathrm{ar}(L)$ обозначим через $V(\Delta)$ множество всех вершин из L, которые лежат на границе этой области. Число

$$\mathrm{dc}(L) = \max\{\mathrm{diam}\, V(\Delta) \mid \Delta \text{ конечная область из } \mathrm{ar}(L)\}$$

назовем *циклическим диаметром* лабиринта L. Обозначим для любого $r \in \mathbf{R}^+$ через $\mathcal{L}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{OT}}(r)$ класс всех плоских конечных мозаичных лабиринтов, таких, что $\mathrm{dc}(L) \leq r$. Ясно, что $\mathcal{L}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{OT}}(r) = \emptyset$ при $0 < r < \sqrt{2}$.

Пусть τ — некоторая циклическая подстановка множества $\mathbf{D}$. Определим функцию $\hat{\nu}_\tau : \mathbf{D}^+ \to \mathbf{N}$, следующим способом:

а) $\hat{\nu}_\tau(\omega) = 0$, если $\omega \in \mathbf{D}$;

б) для любого слова $\omega\omega' \in \mathbf{D}^+$ имеет место

$$\hat{\nu}_\tau(\omega\omega') = \begin{cases} \nu_\tau(\omega\omega'), & \text{если } \nu_\tau(\omega\omega') \geq 0, \\ \nu_\tau(\omega\omega') + 3 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

в) $\hat{\nu}_\tau(\alpha) = \hat{\nu}_\tau(\omega_1\omega_2) +_3 \cdots +_3 \hat{\nu}_\tau(\omega_{k-1}\omega_k)$ для любого $\alpha = \omega_1 \ldots \omega_k \in \mathbf{D}^+$, $k \geq 2$.

Теорема 1. *Для всякого $r \in \mathbf{R}$, $r \geq \sqrt{2}$, существует инициальный автомат $\mathfrak{A}_{\text{ОГ}}(r)$, сильно обходящий класс $\mathcal{L}^{\text{m}}_{\text{ОГ}}(r)$, при этом число состояний $\mathfrak{A}_{\text{ОГ}}(r)$ не больше Cr, а время обхода лабиринта с n вершинами из этого класса не больше $C'r^2n$, где C и C' — константы.*

Возьмем произвольный вектор $\vec{v}$ в плоскости. Возьмем также некоторую прямую l вертикальную на $\vec{v}$. Пусть v — некоторая точка в плоскости. Тогда через $\mathbf{p}_l(v)$ обозначим нормальную проекцию точки v на прямую l. Ясно, что для любой конечной области Δ число $r_{\vec{v}}(\Delta) = \operatorname{diam}\{\mathbf{p}_l(v) \mid v \in V(\Delta)\}$ не зависит от l. Под $\vec{v}$-шириной лабиринта L понимаем число

$$\operatorname{wd}_{\vec{v}}(L) = \max\{r_{\vec{v}}(\Delta) \mid \Delta \text{ конечная область из } \operatorname{ar}(L)\}.$$

Обозначим для любого $r \in \mathbf{R}^+$ через $\mathcal{L}^{\text{m}}_{\vec{v}}(r)$ класс всех плоских конечных мозаичных лабиринтов, таких, что $\operatorname{wd}_{\vec{v}}(L) \leq r$. Ясно, если для некоторого $r \in \mathbf{R}^+$ имеет место $\operatorname{dc}(L) \leq r$, то $\operatorname{wd}_{\text{e}}(L) \leq [\sqrt{r^2-1}]$. До того как докажем теорему 1 докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для любого $m \in \mathbf{N}$ существует универсальный обходчик класса $\mathcal{L}^{\text{m}}_{\text{e}}(m)$, у которого $48m + 52$ состояний и который любой лабиринт из $\mathcal{L}^{\text{m}}_{\text{e}}(m)$ с n вершин обходит за время не больше $3n^2 + 2n - 2$.*

Доказательство. Построим автомат $\mathfrak{A}_{\text{e}}(m) = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_{\mathbf{n}})$, обходящий все лабиринты из класса $\mathcal{L}^{\text{m}}_{\text{e}}(m)$ следующим способом. В качестве множества состояний Q возьмем множество

$$\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \mid -m \leq \alpha_1 \leq 0, 0 \leq \alpha_2 \leq 2, 1 \leq \alpha_3 \leq 2, \\ \alpha_4 \in \{\mathbf{s}, \mathbf{n}\}, \alpha_5 \in \{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{s}\}\} \cup Q_{\mathfrak{A}^+}.$$

Функции φ и ψ определим следующим способом. На множестве $Q_{\mathfrak{A}^+} \times A$ введем предикат $\mathbf{P}$ следующим способом: $\mathbf{P}(q, a) = 1$, если условие

$$\{\mathbf{w}, \mathbf{s}\} \not\subseteq a \vee (q \neq q_{\mathbf{n}} \wedge \psi_{\mathfrak{A}^+}(q, a) \neq \mathbf{s})$$

выполнено, и $\mathbf{P}(q, a) = 0$ в противном случае. Пусть $q \in Q$ и $a \subseteq \mathbf{D}$. Тогда, если $q \in Q_{\mathfrak{A}^+}$ и $\mathbf{P}(q, a) = 1$, то положим $\psi(q, a) = \psi_{\mathfrak{A}^+}(q, a)$ и $\varphi(q, a) = \varphi_{\mathfrak{A}^+}(q, a)$. Если $q \in Q_{\mathfrak{A}^+}$ и $\mathbf{P}(q, a) = 0$, то положим $\varphi(q, a) = (0, 1, 1, \alpha_4, \mathbf{s})$ и $\psi(q, a) = 0$, где $\alpha_4 = \mathbf{s}$ если $\psi(q, a) = \mathbf{s}$, а $\alpha_4 = \mathbf{n}$, если $q = q_{\mathbf{n}}$. Введем для любого $a \in A$ отображения $\theta^1_a : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ и $\theta^2_a : Q \backslash Q_{\mathfrak{A}^+} \to Q$, таким способом, что

$$\theta^1_a(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если } \omega \in a, \\ \sigma^+_a(\omega) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и

$$\theta_a^2(q) = \begin{cases} q, & \text{если } \mathbf{p}_5(q) \in a, \\ q_{\sigma_a^+(\mathbf{p}_5(q))} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $q \notin Q_{\mathfrak{A}+}$, т.е. q является состоянием вида $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, то предположим, что $\mathcal{L}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ ведет себя согласно следующим правилам (любое нижеприведенное правило выполняется только в том случае, если выполнено соответствующее для этого правила условие):

1. Если $q = (0, 2, 1, \beta_4, \mathbf{n})$, то пусть $\varphi(q, a) = \theta_a^2[(-1, 2, 2, \beta_4, \mathbf{s})]$ и $\psi(q, a) = \theta_a^1(\mathbf{s})$.

2. Если $q = (0, 0, 1, \beta_4, \mathbf{n})$ и $\mathbf{e} \notin a$, то $\varphi(q, a) = \theta_a^2[(-1, 1, 2, \beta_4, \mathbf{s})]$ и $\psi(q, a) = \theta_a^1(\mathbf{s})$.

3. Если $q = (0, 0, 2, \beta_4, \mathbf{n})$, то положим, что

$$\varphi(q, a) = \begin{cases} q_{\theta_a^1(\mathbf{s})}, & \text{если } \beta_4 = \mathbf{s}, \\ \varphi_{\mathfrak{A}+}(q_{\mathbf{n}}, a), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{n}, \end{cases}$$

и

$$\psi(q, a) = \begin{cases} \theta_a^1(\mathbf{s}), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{s}, \\ \psi_{\mathfrak{A}+}(q_{\mathbf{n}}, a), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{n}. \end{cases}$$

4. Если $q = (0, \beta_2, 1, \beta_4, \mathbf{e})$ и $\mathbf{s} \in a$, то $\varphi(q, a) = \theta_a^2[(-1, 2, 1, \beta_4, \mathbf{s})]$ и $\psi(q, a) = \theta_a^1(\mathbf{s})$.

5. Если $q = (0, 1, 1, \beta_4, \mathbf{e})$ и $a \subseteq \{\mathbf{w}, \mathbf{n}\}$, то возьмем $\varphi(q, a) = \theta_a^2[(0, 0, 2, \beta_4, \mathbf{w})]$ и $\psi(q, a) = \theta_a^1(\mathbf{w})$.

6. Если $q = (0, 1, 1, \beta_4, \mathbf{n})$, то возьмем $\varphi(q, a) = \theta_a^2[(-1, 2, 2, \beta_4, \mathbf{s})]$ и $\psi(q, a) = \theta_a^1(\mathbf{s})$.

7. Если $q = (0, 1, 2, \beta_4, \mathbf{n})$, то положим, что

$$\varphi(q, a) = \begin{cases} q_{\theta_a^1(\mathbf{s})}, & \text{если } \beta_4 = \mathbf{n}, \\ \varphi_{\mathfrak{A}+}(q_{\mathbf{n}}, a), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{s}, \end{cases}$$

и

$$\psi(q, a) = \begin{cases} \theta_a^1(\mathbf{s}), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{n}, \\ \psi_{\mathfrak{A}+}(q_{\mathbf{n}}, a), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{s}. \end{cases}$$

8. Если не имеет место ни одно из предыдущих условий и автомат $\mathfrak{A}_{\mathrm{e}}(m)$ находится в состоянии $q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$, то он переходит в состояние $(\beta_1', \beta_2', \beta_3', \beta_4', \beta_5')$, где β_i', $1 \le i \le 5$, определено следующим образом. Прежде всего $\beta_4' = \beta_4$ и $\beta_3' = \beta_3$. Если

$$\beta' = \beta_1 + \mathrm{ch}[\psi_{\mathfrak{A}(\beta_3)}(q_{\beta_5}, a)] \ge -m,$$

то $\beta_1' = \beta'$, где

$$\mathrm{ch}(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ если } \omega = \mathbf{n}, \\ -1, \text{ если } \omega = \mathbf{s}, \\ 0, \text{ если } \omega = \mathbf{e}, \mathbf{w}, \mathbf{0} \end{cases}$$

и $\mathfrak{A}(\beta_3) = \mathfrak{A}^+$, если $\beta_3 = 2$, а $\mathfrak{A}(\beta_3) = \mathfrak{A}^-$, если $\beta_3 = 1$; в противном случае

$$(\beta_1', \beta_2', \beta_3', \beta_4', \beta_5') = (-m + \mathrm{ch}(\overline{\beta}_5), \beta_2'', 2, \beta_4, \overline{\beta}_5) \quad \text{и} \quad \psi(q, a) = \overline{\beta}_5,$$

где

$$\beta_2'' = \begin{cases} 2, \text{ если } \beta_5 = \mathbf{w}, \\ 0, \text{ если } \beta_5 = \mathbf{s}, \\ 1, \text{ если } \beta_5 = \mathbf{e}, \mathbf{n}. \end{cases}$$

Далее, $\beta_5' = \psi_{\mathfrak{A}(\beta_3)}(q_{\beta_5}, a)$ и $\psi(q, a) = \psi_{\mathfrak{A}(\beta_3)}(q_{\beta_5}, a)$. Значение β_2 равно

$$\beta_2 +_3 \nu^{\mathrm{sm}(\beta_3)}(\beta_5 \psi_{\mathfrak{A}(\beta_3)}(q_{\beta_5}, a)),$$

где

$$\mathrm{sm}(\alpha_3) = \begin{cases} +, \text{ если } \alpha_3 = 2, \\ -, \text{ если } \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Смысл параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и α_5 будет следующим. Функции φ и ψ определены таким образом, что поведение автомата $\mathfrak{A}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ в некотором произвольном лабиринте L класса $\mathcal{L}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ будет разбито как бы на две части. Автомат $\mathfrak{A}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ ведет себя как автомат $\mathfrak{A}^+$ пока не окажется в некоторой квазиособенной вершине v, и $q = q_{\mathbf{n}}$ или $\psi(q, [v]) = \mathbf{s}$. Если последнее имеет место, то $\mathfrak{A}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ переходит в состояние вида $(0, 1, 1, \alpha_4, \alpha_5)$ и исследует вопрос, является ли вершина v особенной или нет. Пока он это делает он находится в состояниях вида $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ и ведет себя, если не имеет место некоторый из выше данных случаев 1–6, как автомат $\mathfrak{A}(\alpha_3)$, где $\mathfrak{A}(\alpha_3) = \mathfrak{A}^+$, если $\alpha_3 = 2$, а $\mathfrak{A}(\alpha_3) = \mathfrak{A}^-$, если $\alpha_3 = 1$; параметр α_5 обеспечивает такую работу автомата $\mathfrak{A}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ Из работы [3] следует, что за это время автомат $\mathcal{L}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ движется вокруг одной и той же самой области, на границе которой лежит вершина v. Параметр α_1 такой, что если автомат $\mathfrak{A}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ оказался на некоторой вершине v', то $\alpha_1 = \mathbf{p}_2(v) - \mathbf{p}_2(v')$. Параметром α_2 автомат $\mathfrak{A}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ измеряет, на сколько он поворачивается, меняет направление, двигаясь вдоль грницы некоторой области. Легко убедиться, например, что если в течение некоторого времени, до момента t, когда автомат $\mathfrak{A}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$

оказался в v', параметр α_3 не менялся и $\alpha_3 = 1$ (аналогное утверждение имеет место и для $\alpha_3 = 2$), то в случае когда $\alpha'_1 = 0$, $\alpha'_2 = 2$ и $\alpha'_5 = \mathbf{n}$ выполнено, $\mathbf{p}_2(v) = \mathbf{p}_2(v')$ и $\mathbf{p}_1(v) < \mathbf{p}_1(v')$, а в случае когда $\alpha'_1 = 0$, $\alpha'_2 = 0$ и $\alpha'_5 = \mathbf{n}$ — $\mathbf{p}_2(v) = \mathbf{p}_2(v')$ и $\mathbf{p}_1(v') < \mathbf{p}_1(v)$, где $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \alpha'_5)$ — состояние автомата $\mathfrak{A}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{e}}(m)$ в моменте t. Параметром α_4 данный автомат запоминает свое состояние в момент, когда последний раз оказался на квазиособенной вершине.

Ясно, что из данного описания автомата $\mathfrak{A}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{e}}(m)$ следует, что вместо того, чтобы двигаться по лабиринту L, он движется как бы по лабиринту $\mathrm{Ct}(L)$. Но тогда получаем из [3], что этот автомат является универсальным обходчиком для класса всех лабиринтов из класса $\mathcal{L}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{or}}(m)$.

Если лабиринт L содержит n вершин, то L не может иметь больше $n/2$ квазиособенных вершин (количество квазиособенных вершин v равно количеству вершин вида $v\mathrm{e}$). Ясно, что $|V(\Delta)| \leq n$ для любой конечной области $\Delta \in \mathrm{ar}(L)$. Из данного алгоритма обхода следует, что автомат задерживается у каждой квазиособенной вершины (двигаясь вокруг соответствующей области) на время не больше $3n$. Учитывая то, что каждую квазиособенную вершину проверяет на особеность два раза, то на это уходит время $3n^2$. В графе $\mathrm{Ct}(L)$ вершин $n + |\mathrm{ar}(L)| - 1$. Ясно, что в L не меньше $|\mathrm{ar}(L)| - 1$ особенных вершин. Время, которое уходит на обход этих вершин учтено выше при оценке времени обхода квазиособенных вершин. На самом деле оно входит в эту сумму умноженное на 2. С другой стороны на обход дерева с $n + |\mathrm{ar}(L)| - 1$ вершинами уходит время не больше $2(n + |\mathrm{ar}(L)| - 2)$. Из всего сказаного получается, что время обхода лабиринта L не больше $3n^2 + 2n - 2$.

Пусть $\mathcal{L}$ — некоторый класс лабиринтов. Через $\mathrm{Char}(\mathcal{L})$ обозначим число $\min\{Q_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathcal{L})\}$; если $\mathrm{Un}(\mathcal{L}) = \emptyset$, то положим, что $\mathrm{Char}(\mathcal{L}) = \infty$. Тогда результат теоремы 2. можем переформулировать следующим способом.

Теорема 3. *Имеет место следующая оценка*

$$\mathrm{Char}(\mathcal{L}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{e}}(m)) \leq 48m + 52$$

дльа любого $m \in \mathbf{N}$.

Остается открытым вопрос улучшения данной оценки.

Доказательство теоремы 1. То что у автомата $\mathfrak{A}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{or}}(r)$ не больше Cr состояний следует из теоремы 2. Осталось еще оценить время обхода. Пусть плоский мозаичный лабиринт L содержит n вершин.

Ясно, что $|V(\Delta)| \leq [r]^2$ для любой конечной области $\Delta \in \mathrm{ar}(L)$. Но тогда, как и выше, получаем, что время обхода не больше $3r^2n + 2n - 2$, т.е. данная в тереме оценка имеет место.

Построенный выше автомат не останавливается после обхода лабиринта. На вопрос, существует ли автомат, который обходит любой лабиринт из класса $\mathcal{L}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{m}}(m)$ и останавливается после обхода, можно ответить отрицательно, поскольку уже в случае класса всех конечных шахматных лабиринтов без конечных дыр такой автомат не существует.

Плоский мозаичных лабиринт называется $k-x$-ограниченным ($k-y$-ограниченным), если он лежит между двумя параллельными прямыми, которые расположены на расстоянии $k \in \mathbf{N}$ одна от другой и паралелльны оси x (оси y). Обозначим класс всех $k-x$-ограниченных мозаичных лабиринтов через $\mathcal{L}_{||}^{x}(k)$, а всех $k-y$-ограниченных мозаичных лабиринтов — через $\mathcal{L}_{||}^{y}(k)$.

Следствие 1. *Для всех $k \in \mathbf{N}$ имеет место*

$$\mathrm{Char}(\mathcal{L}_{||}^{x}(k)) \leq 48k + 52, \quad \mathrm{Char}(\mathcal{L}_{||}^{y}(k)) \leq 48k + 52.$$

Вектор $\vec{v}$ в плоскости назовем целочисленным, если для некоторых $l, m \in \mathbf{Z}$ имеет место $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$. Следующая теорема является обобщением теоремы 2. Она впервые доказана в [2]. Здесь дается более простое и короткое доказательство.

Теорема 4. *Для любого $d \in \mathbf{R}^+$ и любого целочисленного вектора $\vec{v}$ существует инициальный автомат, являющийся универсальным обходчиком класса $\mathcal{L}_{\vec{v}}^{\mathrm{m}}(d)$, у которого число состояний не больше Cd, где C — константа.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} = m\vec{i} + l\vec{j}$ для некоторых $l, m \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим случай, когда $l > 0$ и $m < 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. Ясно, что любая конечной область из $\mathrm{ar}(L)$ лежит в некоторой полосе ширины d, у которой тангенс угла наклона равен l/m. Пусть Δ — некоторая конечная область из $\mathrm{ar}(L)$. Говорим, что вершина $v \in V(\Delta)$, $v = (x_0, y_0)$, является Δ-(l,m)-*особенной*, если полуплоскость $-l/m(x - x_0) + (y - y_0) > 0$, не содержит ни одной вершины из множества $V(\Delta)$, и если на прямой $-l/m(x - x_0) + (y - y_0) = 0$ лежит вершина $v' \in V(\Delta)$, $v' = (x_0', y_0')$, то $x_0' < x_0$. Вершина $v \in V(L)$ является (l,m)-*особенной*, если существует $\Delta \in \mathrm{ar}(L)$, такая, что v является Δ-(l,m)-особенной

вершиной. Заметим, что, если некотороя вершина $v \in V(L)$ (l,m)-особенная, то $\{\mathbf{w},\mathbf{s}\} \subseteq [v]$. Тогда, ясно, что (l,m)-особенную вершину надо искать среди квазиособенных вершин.

Длины проекций векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{n}$ на нормаль полосы равны, соответственно, lh/ml и mh/ml. Пусть

$$\lambda_1 = \frac{ml}{h}\max\{mh/ml, lh/ml\} \text{ и } \lambda_2 = \frac{ml}{h}(-d - \max\{mh/ml, lh/ml\}).$$

Построим автомат $\mathfrak{A}_{\bar{v}}(d) = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_{\mathbf{n}})$, обходящий все лабиринты из данного класса лабиринтов следующим способом. В качестве множества состояний Q возьмем множество

$$\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) \mid [\lambda_2] \le \alpha_1 \le [\lambda_1], 0 \le \alpha_2 \le 2, 1 \le \alpha_3 \le 5,$$
$$\alpha_4 \in \{\mathbf{s},\mathbf{n}\}, \alpha_5 \in \{\mathbf{e},\mathbf{n},\mathbf{w},\mathbf{s}\}\} \cup Q_{\mathfrak{A}+}.$$

Функции φ и ψ определим следующим способом. Пусть $q \in Q$ и $a \subseteq \mathbf{D}$. Тогда, если $q \in Q_{\mathfrak{A}+}$ и если или $\{\mathbf{w},\mathbf{s}\}$ не является подмножеством множества a, или $q \ne q_{\mathbf{n}}$ и $\psi_{\mathfrak{A}+}(q,a) \ne \mathbf{s}$, то $\psi(q,a) = \psi_{\mathfrak{A}+}(q,a)$ и $\varphi(q,a) = \varphi_{\mathfrak{A}+}(q,a)$. Если $q \in Q_{\mathfrak{A}+}$, $\{\mathbf{w},\mathbf{s}\} \subseteq a$, и $q = q_{\mathbf{n}}$ или $\psi(q,a) = \mathbf{s}$, то $\varphi(q,a) = (0,0,1,\alpha_4,\mathbf{s})$ и $\psi(q,a) = 0$, где $\alpha_4 = \mathbf{s}$ если $\psi(q,a) = \mathbf{s}$, а $\alpha_4 = \mathbf{n}$, если $q = q_{\mathbf{n}}$. Как и выше ведем для любого $a \in A$ отображения $\theta_a^1 : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ и $\theta_a^2 : Q \backslash Q_{\mathfrak{A}+} \to Q$. Если $q \notin Q_{\mathfrak{A}+}$, т.е. q является состоянием вида $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$, то предположим, что $\mathfrak{A}_{\bar{v}}(d)$ ведет себя согласно следующим правилам (любое нижеприведенное правило выполняется только в том случае, если выполнено соответствующее для этого правила условие):

1. Если $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 = 1$ или $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$ и

$$\alpha_5 = \mathbf{n} \vee (\alpha_5 = \mathbf{e} \wedge \mathbf{s} \notin a),$$

то $\varphi(q,a) = \theta_a^2[(\alpha_1 + \mathrm{ch}(\overline{\alpha}_5), \beta_2, 2, \alpha_4, \overline{\alpha}_5)]$ и $\psi(q,a) = \theta_a^1(\overline{\alpha}_5)$, где

$$\beta_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_5 = \mathbf{e} \wedge \alpha_2 = 2, \\ 2, & \text{если } \alpha_5 = \mathbf{n} \wedge \alpha_2 = 1, \\ 0, & \text{если } \alpha_5 = \mathbf{e} \wedge \alpha_2 = 0, \\ 1, & \text{если } \alpha_5 = \mathbf{n} \wedge \alpha_2 = 2. \end{cases}$$

2. Если $q = (0,0,2,\beta_4,\mathbf{n})$, то положим, что

$$\varphi(q,a) = \begin{cases} q_{\theta_a^1(\mathbf{s})}, & \text{если } \beta_4 = \mathbf{s}, \\ \varphi_{\mathfrak{A}+}(q_{\mathbf{n}},a), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{n}, \end{cases}$$

и

$$\psi(q,a) = \begin{cases} \theta_a^1(\mathbf{s}), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{s}, \\ \psi_{\mathfrak{A}^+}(q_{\mathbf{n}}, a), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{n}. \end{cases}$$

3. Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_5 = \mathbf{e}$ и $\mathbf{s} \in a$, то $\varphi(q,a) = \theta_a^2[(\alpha_1 + \mathrm{ch}(\mathbf{w}), 1, 2, \beta_4, \mathbf{w})]$ и $\psi(q,a) = \theta_a^1(\mathbf{w})$.

4. Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_5 = \mathbf{e}$ и $\mathbf{s} \in a$, то $\varphi(q,a) = \theta_a^2[(\alpha_1 + \mathrm{ch}(\mathbf{s}), 1, 1, \beta_4, \mathbf{s})]$ и $\psi(q,a) = \theta_a^1(\mathbf{s})$.

5. Если $q = (0, 1, 1, \beta_4, \mathbf{e})$, то возьем $\varphi(q,a) = \theta_a^2[(\mathrm{ch}(\mathbf{w}), 1, 2, \beta_4, \mathbf{w})]$ и $\psi(q,a) = \theta_a^1(\mathbf{w})$.

6. Если $q = (0, 1, 2, \beta_4, \mathbf{n})$, то положим, что

$$\varphi(q,a) = \begin{cases} q_{\theta_a^1(\mathbf{s})}, & \text{если } \beta_4 = \mathbf{n}, \\ \varphi_{\mathfrak{A}^+}(q_{\mathbf{n}}, a), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{s}, \end{cases}$$

и

$$\psi(q,a) = \begin{cases} \theta_a^1(\mathbf{s}), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{n}, \\ \psi_{\mathfrak{A}^+}(q_{\mathbf{n}}, a), & \text{если } \beta_4 = \mathbf{s}. \end{cases}$$

7. Если не имеет место ни одно из предыдущих условий, то автомат переходит в состояние $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$, где β_i, $1 \le i \le 5$, определено следующим образом. Прежде всего $\beta_4 = \alpha_4$ и $\beta_3 = \alpha_3$. Если

$$\alpha' = \alpha_1 + \mathrm{ch}[\psi_{\mathfrak{A}(\alpha_3)}(q_{\alpha_5}, a)] \ge [\lambda_2],$$

то $\beta_1 = \alpha'$, где

$$\mathrm{ch}(\omega) = \begin{cases} l, \text{ если } \omega = \mathbf{e}, \\ -l, \text{ если } \omega = \mathbf{w}, \\ m, \text{ если } \omega = \mathbf{n}, \\ -m, \text{ если } \omega = \mathbf{s}, \\ 0, \text{ если } \omega = \mathbf{0} \end{cases}$$

и $\mathfrak{A}(\alpha_3) = \mathfrak{A}^+$, если $\alpha_3 = 2$, а $\mathfrak{A}(\alpha_3) = \mathfrak{A}^-$, если $\alpha_3 = 1$; в противном случае

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = \theta_a^2[(\alpha_1 + \mathrm{ch}(\overline{\alpha}_5), \beta_1'', 2, \alpha_4, \overline{\alpha}_5)] \quad \text{и} \quad \psi(q,a) = \theta_a^1(\overline{\alpha}_5),$$

где

$$\beta_2'' = \begin{cases} 2, \text{ если } \beta_5 = \mathbf{w}, \\ 0, \text{ если } \beta_5 = \mathbf{s}, \\ 1, \text{ если } \beta_5 = \mathbf{e}, \\ 2, \text{ если } \beta_5 = \mathbf{n}. \end{cases}$$

Далее, $\beta_5 = \psi_{\mathfrak{A}(\alpha_3)}(q_{\alpha_5}, a)$ и $\psi(q, a) = \psi_{\mathfrak{A}(\alpha_3)}(q_{\alpha_5}, a)$. Параметр β_2 равен

$$\alpha_2 +_3 \nu^{\mathrm{sm}(\alpha_3)}(\alpha_5 \psi_{\mathfrak{A}(\alpha_3)}(q_{\alpha_5}, a)),$$

где

$$\mathrm{sm}(\alpha_3) = \begin{cases} +, \text{ если } \alpha_3 = 2, \\ -, \text{ если } \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Смысл параметров α_1, α_2, α_3, α_4 и α_5 будет аналогичен смыслу тех же параметров в доказательстве теоремы 2.

Как и в теореме 2, легко убедится, что автомат $\mathfrak{A}_{\vec{v}}(d)$ удовлетворяет условиям данной теоремы. Если лабиринт L из рассматриваемого класса содержит n вершин, то время обхода такого лабиринта можно оценить, как в доказательстве теоремы 2, т.е. оно не больше $3n^2 + 2n - 2$. Этим теорема доказана.

Список литературы

[1] А. Н. Зырицхев, *О синтезе автомата, обходыасхцхего плоские лабиринты с ограницхенными дырами*, Дискретнаыа математика **3** (1991), no. 1, 105–113.

[2] А. А. Золотых, *Обход лабиринтов с ограницхенными в фиксированных направлениыах дырами*, Дискретнаыа математика **5** (1993), no. 1, 59–69.

[3] Г. Килибарда, *О слозхности автоматного обхода лабиринтов*, Дискретнаыа математика **5** (1993), no. 3, 116–124.

Универзитет у Београду, ТМФ, Карнеџијева 4, 11000 Београд, Југославия

Универзитет у Београду, ТМФ, Карнеџијева 4, 11000 Београд, Југославия