Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu
Serija Matematika 3(1989), 83-98

Б.А.Розенфельд, Т.А. Бурцева, Н.В. Душина,
Л.П. Кострикина, В.В. Малютин, Т.И.Юхтина

# ТЕНЗОРЫ КРИВИЗНЫ ЭРМИТОВЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Поступило 01.03.1989.)

## 1. Тензоры кривизны и уравнения структуры римановых и псевдоримановых пространств в ортогональном репере

Э. Картан [1, с.142] показал, что в римановом пространстве $V_n$, в каждой точке x которого задан ортонормированный репер $\{\vec{e}_i\}$ $[\vec{e}_i\vec{e}_j = a_{ij}=\delta_{ij} = 1$ при $i=j$, 0 при $i\neq j$ ] в касательном евклидовом пространстве $E_n(x)$ в этой точке, уравне- структуры имеют вид

(1) $\quad D\omega^i = \omega^k\wedge\omega^i_k\ , D\omega^j_i = \omega^k_i\wedge\omega^j_k + R_{kl,i}^{\cdot\cdot\cdot j}\omega^k\wedge\omega^l\ ,$

где дифференциальные формы $\omega^i$ и $\omega^j_i$ являются координатами дифференциалов $d\vec{x}$ и $d\vec{e}_i$ радиус-вектора точки касания x и векторов $\vec{e}_i$ репера в этом репере($d\vec{x}=\vec{e}_i\omega^i$, $d\vec{e}_i=e_j\omega^j_i$), $D\omega$ – внешний дифференциал формы $\omega$, выражения $\omega^i\wedge\omega^j$– внешние произведения форм $\omega^i$ и $\omega^j$, т.е. определители $\begin{vmatrix}\omega^i & \omega^j\\ \psi^i & \psi^j\end{vmatrix}$, где формы $\omega^i$ и $\psi^i$ – координаты дифференциалов $d\vec{x}$ и $\delta\vec{x}$, которые мы будем предполагать ортогональными. Формы $\omega^j_i$ связаны условием

(2) $$\omega^j_i = -\omega^i_j\ .$$

В случае натуральных реперов $\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}$ координаты тензора кривизны выражаются через координаты $a_{ij}=\vec{e}_i\vec{e}_j$ метрического тензора и их производные, в случае же ортогональных реперов этот способ вычисления координат тензора кривизны не применим.

П.А. Широков в опубликованной посмертно работе [2] показал, что тензор кривизны симметрического пространства римана $V_{2n}$ изометричного комплексному эрмитову эллиптическому пространству $\mathbb{C}\bar{S}_n$ в натуральном репере этого простран-

§ 1,2 написаны Б.А. Розенфельдом, § 3,6 – Л.П. Кострикиной, § 4 – Н.В. Душиной, § 5 – Т.И. Юхтиной, § 7 – Т.А. Бурцевой, § 8 – В.В. Малютиным.
AMS Subject Classification (1980): 53

ства имеют вид

(3) $$R_{ij,kl}=(1/r^2)(a_{ik}a_{jl}-a_{il}a_{jk}+b_{ik}b_{jl}-b_{jk}b_{il}+2b_{ij}b_{kl})$$

где тензор $b_{ij}=-b_{ji}$ связан с тензором $a_{ij}$ соотношением

(4) $$b_{ij}b_{kl}a^{jl} = a_{ik} .$$

Как сообщил А.П. Широков, участвовавший в подготовке к печати работы [2], эта формула "была получена в нормальных координатах симметрического пространства с использованием упрощений, вытекающих из обращения в нуль ковариантной производной тензора кривизны". А.П. Широков сообщил, что в записях П.А. Широкова промежуточные вычисления не были обнаружены, но сама формула была выписана совершено четко неоднократно применялась.

Формулы (3) и (4) для случая $r=1$ приведены также в книге В.В. Вишневского, А.П. Широкова, В.В. Шурыгина [3], с.429.

В настоящей работе находится вид тензора кривизны $R_{ij,kl}$ симметрических римановых пространств $V_{2n}$, $V_{4n}$ и $V_{16}$ ранга 1, изометричных эрмитовым эллиптическим пространствам $\mathbb{C}\bar{S}_n$, $\mathbb{H}\bar{S}_n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}_2$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, телом $\mathbb{H}$ кватернионов и альтернативным телом $\mathbb{O}$ октав и симметрических псевдоримановых пространств ${}^nV_{2n}$, ${}^{2n}V_{4n}$ и ${}^8V_{16}$ ранга 1, изометричных эрмитовым эллиптическим пространствам ${}'\mathbb{C}\bar{S}_n$, ${}'\mathbb{H}\bar{S}_n$ и плоскости ${}'\mathbb{O}\bar{S}_2$ над алгебрами ${}'\mathbb{C}$ двойных чисел, ${}'\mathbb{H}$ антикватернионов и ${}'\mathbb{O}$ антиоктав [4], с.622 и 683, в адаптированных ортонормированных реперах, состоящих из векторов унитарно-ортонормированных реперов $\varepsilon_i$ $(\varepsilon_i\varepsilon_j=\delta_{ij})$ касательных эрмитовых евклидовых пространств $\mathbb{C}\bar{E}_n$, ${}'\mathbb{C}\bar{E}_n$, $\mathbb{H}\bar{E}_n$, ${}'\mathbb{H}\bar{E}_n$ и плоскостей $\mathbb{O}\bar{E}_2$ и ${}'\mathbb{O}\bar{E}_2$ изометричных евклидовым и псевдоевклидовым пространствам $E_{2n}$, ${}^nE_{2n}$, $E_{4n}$, ${}^{2n}E_{4n}$, $E_{16}$ и ${}^8E_{16}$, и произведений $\varepsilon_i\cdot i_\alpha$ векторов $\varepsilon_i$ на базисные элементы $i_\alpha$ алгебр $\mathbb{C}$, ${}'\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, ${}'\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ и ${}'\mathbb{O}$. В работе находится также вид тензора кривизны $R_{ij,kl}$ в этих пространствах высших рангов, образующих вещественные реализации эрмитовых эллиптических пространств над тензорными произведениями этих алгебр.

Знание тензора $R_{ij,kl}$ в этих пространствах позволяет составить уравнения структуры (1) соответственных пространств $V_{2n}$, ${}^nV_{2n}$, $V_{4n}$, ${}^{2n}V_{4n}$, $V_{16}$ и ${}^8V_{16}$ в этих реперах.

В случае ортонормированного репера пространства $V_n$, $a_{ij}=\delta_{ij}$ и координаты $R_{kl,i}{}^j$ равны координатам $R_{kl,ij}$, в случае ортонормированного репера пространства ${}^lV_n$, $a_{ij}=\sigma_i\delta_{ij}$ $(\sigma_i=\pm1)$, формы $\omega_i^j$ связаны условиями

(5) $$\omega_i^j = -\sigma_i\sigma_j\omega_j^i ,$$

а $R_{kl,i}{}^j = \sigma_j R_{kl,ij}$.

Координаты $R_{ij,kl}$ тензора кривизны обладают свойствами симметрии

(6) $$R_{ij,kl} = -R_{ji,kl} = -R_{ij,lk} = R_{kl,ij}$$

и удовлетворяют тождеству Риччи

(7) $$R_{ij,kl} + R_{jk,il} + R_{ki,jl} = 0 ,$$

Секционная кривизна К площадки, определяемой единичными или мнимоединичными ортогональными векторами $\vec{a}=\{a^i\}$ и $\vec{b}=\{b^i\}$ имеет вид

(8) $$K = 2R_{ij,kl}a^i b^j a^k b^l .$$

Применяемые в этой статье методы пригодны также для вычисления координат $R_{kl,i}^{\cdot\cdot\cdot j}$ тензора кривизны полуримановых симметрических пространств [5], образующих вещественные реализации эрмитовых эллиптических пространств $^{\circ}\mathbb{C}\overline{S}_n$, $^{\circ}\mathbb{H}\overline{S}_n$ и плоскости $^{\circ}\mathbb{O}\overline{S}_2$ над алгебрами $^{\circ}\mathbb{C}$ дуальных чисел, $^{\circ}\mathbb{H}$ полукватернионов и $^{\circ}\mathbb{O}$ полуоктав [4;с.443], [6], [7], [8] (в случае этихпространств в силу вырожденности метрического тензора $a_{ij}$ все координаты $R_{ij,kl}$ ковариантного тензора кривизны равны нулю).

В случае пространства $V_n$ постоянной кривизны $1/r^2$, т.е. гиперсферы радиуса $r$ в пространстве $E_{n+1}$, тензор кривизны имеет вид

(9) $$R_{ij,kl} = (1/2r^2)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) .$$

## 2. Симметрические пространства

Так как вещественные пространства $V_{2n}$, $^nV_{2n}$, $V_{4n}$, $^{2n}V_{4n}$, $V_{16}$ и $^8V_{16}$ изометричные эрмитовым пространствам $\mathbb{C}\overline{S}_n$, $'\mathbb{C}\overline{S}_n$, $\mathbb{H}\overline{S}_n$, $'\mathbb{H}\overline{S}_n$ и плоскостям $\mathbb{O}\overline{S}_2$, $'\mathbb{O}\overline{S}_2$, являющиеся симметрическими римановыми и псевдоримановыми пространствами, группами движений которых в первых двух случаях являются простые группы Ли класса $A_n$, во вторых двух случаях - простые группы Ли класса $C_{n+1}$, а в третьих двух случаях особые простые группы Ли класса $F_4$, рассмотрим вычисление координат тензора кривизны в общих симметрических римановых и псевдоримановых пространствах, группами движений которых являются простые группы Ли.

Если $G$ - простая группа Ли, $\mathbb{G}$ - ее алгебра Ли, $\{e_I\}$- базис алгебры $\mathbb{G}$, а структурные уравнения группы $G$ имеют вид

(10) $$[\vec{e}_I\vec{e}_J] = C_{IJ}^K\vec{e}_K ,$$

то инвариантная риманова или псевдориманова метрика Картана в группе $G$ определяется евклидовой псевдоевклидовой метрикой в алгебре $\mathbb{G}$, метрический тензор которой с точностью до вещественного множителя $\lambda$ имеет вид

(11) $$a_{IJ} = \lambda C_{IK}^L C_{JL}^K ,$$

[9;с.463], а координаты тензора кривизны с точностью до вещественного множителя $\rho$ имеют вид

(12) $$R_{IJ,K}{}^L = \rho C_{IJ}^H C_{HK}^L$$

[9;с.454].

Если $V$ - симметрическое римановс или псевдориманово пространство с группой движений $G$ и стационарной подгруппой $G_o$, то алгебра Ли $\mathbb{G}$ может быть записана в виде прямой суммы

(13) $$\mathbb{G} = \mathbb{G}_o \oplus \mathbb{E}$$

где $\mathbb{G}_o$ – алгебра Ли подгруппы $G_o$, а $\mathbb{E}$ – линейное пространство, которое можно отождествить с касательным пространством к пространству $V$, причем при инволютном автоморфизме $g \to \sigma g \sigma$ группы $\mathbb{G}$, определяемом отражением $\sigma$ от точки пространства $V$, элементы подалгебры $\mathbb{G}_o$ остаются инвариантными, а векторы пространства $\mathbb{E}$ умножаются на $-1$. В этом случае базис $\{\vec{e}_I\}$ в алгебре $\mathbb{G}$ может быть выбран таким образом, что векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют базис подалгебры $\mathbb{G}_o$, а векторы $\vec{e}_i$ образуют базис пространства $\mathbb{E}$. В этом случае формулы (10) могут быть записаны в виде

(14) $$[\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}\vec{e}_\gamma, \quad [\vec{e}_\alpha \vec{e}_i] = C^j_{\alpha i}\vec{e}_j, \quad [\vec{e}_i \vec{e}_j] = C^\alpha_{ij}\vec{e}_\alpha,$$

а формула (12) принимает вид

(15) $$R_{ij,k}{}^{l} = \rho C^\alpha_{ij} C^l_{\alpha k}.$$

Поэтому координата $R_{ij,k}{}^{l}$ тензора кривизны симметрического пространства равна произведению множителя $\rho$ на коэффициент разложения двойного коммутатора $[[\vec{e}_i \vec{e}_j]\vec{e}_k]$ при базисном элементе $\vec{e}_l$. В том случае, когда группа $G$ и алгебра $\mathbb{G}$ состоят из матриц с элементами из ассоциативной алгебры, за коммутатор $[AB]$ двух элементов алгебры $\mathbb{G}$ можно принять выражение $AB-BA$, где $AB$ – произведение матриц $A$ и $B$.

Формулы (14) и (15) имеют место также в симметрических пространствах аффинной связности, и, следовательно, в симметрических полуримановых пространствах, поэтому указанный способ вычисления координат $R_{ij,k}{}^{l}$ тензора кривизны применим и в случае полуримановых пространств, являющихся вещественными реализациями эрмитовых эллиптических пространств и плоскостей над алгебрами $^\circ\mathbb{C}$, $^\circ\mathbb{H}$ и $^\circ\mathbb{O}$.

## 3. Комплексное пространство

В случае пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$ кривизны $1/r^2$ прямые этого пространства, являющиеся его голоморфными подмногообразиями, изометричны сфере радиуса $r/2$ пространства $E_3$ [4;с.630]. Поэтому голоморфные секционные кривизны этого пространства равны постоянному числу $4/r^2$. Для пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$ выражение тензора кривизны в комплексном репере приведено Ш. Кобаяси и К. Номидзу [10;с.159], а для изометричного ему риманова пространства $V_{2n}$ в адаптированном ортогональном репере, состоящем из векторов $\vec{e}_{2i-1} = \vec{\varepsilon}_i, \vec{e}_{2i} = \vec{\varepsilon}_i i$ ("А-репере") В.Ф. Кириченко [11;с.576], в последнем случае координаты тензора кривизны выражаются с помощью корневых векторов группы. В указанном репере дифференциальные формы пространства $V_{2n}$ кроме условий (2) связаны условиями

(16) $$\omega^{2j-1}_{2i-1} = \omega^{2j}_{2i}, \quad \omega^{2j-1}_{2i} = -\omega^{2j}_{2i-1}.$$

Для получения явного выражения координат $R_{ij,kl}$ тензора кривизны риманова пространства $V_{2n}$, изометричного пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$ в адаптированном ортогональном репере, заметим, что группа $G$ движенийпространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$ представляется комплексными унимодулярными унитарными матрицами$(n+1)$-го порядка, а алгебра Ли $\mathbb{G}$ этой группы представляется комплексными косоэрмитовыми матрицами $(n+1)$-го порядка со следами, равными нулю.

Симметрическому пространству $V_{2n}$ изометричному пространству $\mathbb{C}\bar{S}_n$, соответствует разложение алгебры Ли $\mathbb{G}$ группы $G$ движений этого пространства в виде прямой суммы (14), причем если мы будем обозначать матрицы $(n+1)$-го порядка, у которых на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца$(i,j=0,1,..,n)$ стоит 1, а все остальные элементы равны 0, через $E_{ij}$, комплексные матрицы, представляющие матрицы подпространства $\mathbb{E}$ имеют вид

$$A = E_{oi}a^i - E_{io}\bar{a}^i . \tag{17}$$

Так как подпространство $\mathbb{E}$ можно отождествить с касательным пространством $E_{2n}$ в точке пространства $V_{2n}$, изометричного пространству $\mathbb{C}S_n$ матрицы (17) изображают векторы пространства $E_{2n}$, причем вектору адаптированного репера пространства $V_{2n}$, изображающему вектор $\vec{\varepsilon}_i i_\alpha$, соответствует матрица (17) вида

$$A_{i\alpha} = E_{oi}i_\alpha - E_{io}\bar{i}_\alpha . \tag{18}$$

Поэтому двойной коммутатор $[[A_{i\alpha}A_{j\beta}]A_{k\gamma}]$ имеет вид

$$\begin{aligned}[[A_{i\alpha}A_{j\beta}]A_{k\gamma}] = &- E_{oi}\delta_{jk}i_\gamma(\bar{i}_\beta i_\alpha) + E_{oj}\delta_{ik}i_\gamma(\bar{i}_\alpha i_\beta) + E_{ok}\delta_{ij}(i_\beta\bar{i}_\alpha - i_\alpha\bar{i}_\beta)i_\gamma \\ &+ E_{io}\delta_{jk}(\bar{i}_\alpha i_\beta)i_\gamma - E_{jo}\delta_{ik}(\bar{i}_\beta i_\alpha)\bar{i}_\gamma + E_{ko}\delta_{ij}\bar{i}_\gamma(i_\beta\bar{i}_\alpha - i_\alpha\bar{i}_\beta)\end{aligned} \tag{19}$$

откуда получим равенство

$$\begin{aligned}R_{i\alpha,j\beta;k\gamma}{}^{l\delta}\vec{\varepsilon}_l i_\delta = \rho(&-\vec{\varepsilon}_i\delta_{jk}i_\gamma(\bar{i}_\beta i_\alpha) + \vec{\varepsilon}_j\delta_{ik}i_\gamma(\bar{i}_\alpha i_\beta) + \\ &+ \vec{\varepsilon}_k\delta_{ij}(i_\beta\bar{i}_\alpha - i_\alpha\bar{i}_\beta)i_\gamma) .\end{aligned} \tag{20}$$

В силу ассоциативности поля $\mathbb{C}$ произведения $i_\gamma(\bar{i}_\beta i_\alpha)$ и $i_\gamma(\bar{i}_\alpha i_\beta)$ в формуле (20) можно записать в виде $(i_\gamma\bar{i}_\beta)i_\alpha$ и $(i_\gamma\bar{i}_\alpha)i_\beta$. В силу соотношения $\vec{\varepsilon}_i=\delta_i^l\vec{\varepsilon}_l$ в левой части формулы (20) можно убрать вектор $\vec{\varepsilon}_l$, а в правой – заменить векторы $\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\varepsilon}_j$ и $\vec{\varepsilon}_k$ символами Кронекера $\delta_i^l$, $\delta_j^l$ и $\delta_k^l$. Для определения константы $\rho$ заметим, что, как мы упоминали, постоянная голоморфная секционная кривизна пространства $CS_n$ кривизны $1/r^2$ равна $4/r^2$, а полагая в полученном выражении для $R_{i\alpha,j\beta,k\gamma}{}^{l\delta}$ $i=j=k=l, \alpha=\gamma\neq\beta=\delta$, мы получим, что $R_{i\alpha,i\beta,i\alpha}{}^{i\beta} = 4\rho$ откуда следует, что $\rho=1/r^2$.

С другой стороны, полагая в том же выражении $i=k\neq j=l$ и $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, мы получим секционную кривизну пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$ в площадках, касательных к "нормальной $n$-цепи" изометричной многообразию $x^i=\bar{x}^i$ и, следовательно, вещественному пространству $S_n$ кривизны $1/r^2$.

Для упрощения полученной формулы воспользуемся уравнениями структуры алгебры

$$(21)\qquad i_\alpha i_\beta = c^\gamma_{\alpha\beta} i_\gamma$$

причем матрицы $(c^\gamma_{0\beta})$ и $(c^\gamma_{1\beta})$, состоящие из структурных констант $c^\gamma_{\alpha\beta}$, входящих в эти уравнения, имеют вид

$$(22)\qquad (c^\gamma_{0\beta}) = (\delta^\gamma_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (c^\gamma_{1\beta}) = (\varepsilon^\gamma_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и разложениями

$$(23)\qquad \bar{i}_\alpha i_\beta = \delta_{\alpha\beta} i_0 - \varepsilon_{\alpha\beta} i_1,\ i_\alpha \bar{i}_\beta = \delta_{\alpha\beta} i_0 + \varepsilon_{\alpha\beta} i_1,\ (\delta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\varepsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученное выражение для координат $R_{i\alpha,j\beta,k\gamma}{}^{l\delta}$ можно переписать более компактно, заменяя пары индексов $i\alpha, j\beta, k\gamma, l\delta$ индексами $I,J,K,L$ в виде

$$(24)\qquad R_{IJ,K}{}^L = (1/2r^2)(\delta_{IK}\delta^L_J - \delta_{JK}\delta^L_I - \varepsilon_{IK}\varepsilon^L_J + \varepsilon_{JK}\varepsilon^L_I - 2\varepsilon_{IJ}\varepsilon^L_K).$$

Опуская индекс L с помощью метрического тензора $a_{IJ}$, который в случае ортонормированного репера имеет вид $\delta_{IJ}$, мы получим формулу

$$(25)\qquad R_{IJ,KL} = (1/2r^2)(\delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK} + \varepsilon_{IK}\varepsilon_{JL} - \varepsilon_{IL}\varepsilon_{JK} + 2\varepsilon_{IJ}\,{}_{KL}).$$

Именно этот вид принимает формула (3), найденная П.А. Широковым, в случае адаптированного ортонормированного репера в пространстве $V_{2n}$ изометричном пространству $\mathbb{C}\bar{S}_n$.

Матрицы $(\delta_{IJ})$, $(\delta^I_J)$, $(\varepsilon_{IJ})$ и $(\varepsilon^I_J)$, входящие в состав формул (24) и (25), представляют собой матрицы (2n+2)-го порядка, на главной диагонали которых стоят соответственные матрицы второго порядка $(\delta_{\alpha\beta})$, $(\delta^\alpha_\beta)$, $(\varepsilon_{\alpha\beta})$ и $(\varepsilon^\alpha_\beta)$, а остальные элементы этих матриц равны нулю.

Формула (26) показивает, что ненулевыми координатами тензора $R_{IJ,KL}$ в случае пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$ являются координаты

$$(26)\qquad R_{2i-1,2i,2i-1,2i} = 2/r^2,$$

$$(27)\qquad R_{2i-1,2j-1,2i-1,2j-1} = R_{2i-1,2j,2i-1,2j} = R_{2i,2j,2i,2j} = 1/2r^2,$$

$$(28)\qquad R_{2i-1,2i,2j-1,2j} = 1/2r^2,\ R_{2i,2j-1,2i-1,2j} = R_{2j-1,2i-1,2i,2j} = -(1/2r^2).$$

Заметим, что кординаты (28) удовлетворяют соотношению Риччи (7).

Подставляя значения (25) в формулу (8), мы получим, что секционная кривизна K площадки, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается через угол наклона $\alpha$ этой площадки, определенный П.А. Широковым в работе [2], по формуле $K = \frac{1+3\cos\alpha}{r^2}$, если считать, что множитель 1/2 включен в тензоры $\underset{\sim}{a}_{ij}$, $\underset{\sim}{b}_{ij}$.

## § 4. Двойное пространство

В случае пространства ${}'\mathbb{C}\bar{S}_n$ кривизны $1/r^2$ с унитарно-ортонормированным репером $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ в изометричном ему псевдоримановом пространстве ${}^nV_{2n}$ будем пользоваться адаптированным ортонормированным репером, состоящим из векторов $\vec{e}_{2i-1} = \vec{\varepsilon}_i$ и $\vec{e}_{2i} = \vec{\varepsilon}_i e_i$.

В этом репере дифференциальные формы $\omega_I^J$ пространства $^nV_{2n}$ кроме условий (5), связаны условиями

(29) $$\omega^{2j-1}_{2i-1} = \omega^{2j}_{2i}, \ \omega^{2j-1}_{2i} = \omega^{2j}_{2i-1}.$$

Группа G движений пространства $'\mathbb{C}\bar{S}_n$ представляется двойными унимодулярными матрицами (n+1)-го порядка, а алгебра Ли $\mathbb{G}$ этой группы представляется двойными косоэрмитовыми матрицами (n+1)-го порядка, удовлетворяющими условию $SpA = 0$.

Симметрическому пространству $^nV_{2n}$, изометричному пространству $'\mathbb{C}\bar{S}_n$, соответствует разложение алгебры Ли $\mathbb{G}$ группы G движений этого пространства в виде прямой суммы (13), причем двойные матрицы, представляющие матрицы подпространства $\mathbb{E}$ имеют вид (17). В этом случае подпространство $\mathbb{E}$ можно отождествить с касательным пространством $^nE_{2n}$ в точке пространства $^nV_{2n}$, изометричного пространству $'\mathbb{C}\bar{S}_n$; матрицы (17) здесь также изображают касательные векторы пространства $^nV_{2n}$, причем вектору адаптированного репера пространства $^nV_{2n}$, изображающему вектор $\vec{\varepsilon}_i i_\alpha$, соответствует матрица (17) вида (18). В случае пространства $'\mathbb{C}\bar{S}_n$ имеют место также формулы (19) и (20) и, так же как в случае пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$, показывается, что множитель $\rho$ в формуле (20) равен $1/r^2$. Для упрощения формулы (20) воспользуемся уравнениями структуры (21) алгебры $'\mathbb{C}$, причем матрицы $(c^\gamma_{0\beta})$ и $(c^\gamma_{1\beta})$, состоящие из структурных констант $c^\gamma_{\alpha\beta}$, входящих в эти уравнения, имеют вид

(30) $$(c^\gamma_{0\beta}) = (\delta^\gamma_\beta) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \ (c^\gamma_{1\beta}) = (\eta^\gamma_\beta) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

а также разложениями

(31) $$\bar{i}_\alpha i_\beta = \gamma_{\alpha\beta} i_0 - \varepsilon_{\alpha\beta} i_1, \ i_\alpha \bar{i}_\beta = \gamma_{\alpha\beta} i_0 + \varepsilon_{\alpha\beta} i_1, \ (\gamma_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \ (\varepsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

В этом случае формулы (24( и (25) заменяются на формулы

(32) $$R_{IJ,K}{}^L = (1/2r^2)(\gamma_{IK}\delta^L_J - \gamma_{JK}\delta^L_I - \varepsilon_{IK}\eta^L_J + \varepsilon_{JK}\eta^L_I - 2\varepsilon_{IJ}\eta^L_K)$$

и

(33) $$R_{IJ,KL} = (1/2r^2)(\gamma_{IK}\gamma_{JL} - \gamma_{IL}\gamma_{JK} - \varepsilon_{IK}\varepsilon_{JL} + \varepsilon_{IL}\varepsilon_{JK} - 2\varepsilon_{IJ}\varepsilon_{KL}).$$

Матрицы $(\delta^J_I)$ и $(\varepsilon_{IJ})$, входящие в формулы (32) и (33), имеют тот же вид, что и аналогичные матрицы в формулах (24) и (25), а матрицы $(\eta^J_I)$ и $(\gamma_{IJ})$, входящие в эти формулы, представляют собой матрицы (2n+2)-го порядка, по главной диагонали которых стоят соответственные матрицы второго порядка $(\eta^\beta_\alpha)$ и $(\gamma_{\alpha\beta})$; матрица $(\gamma_{IJ})$ является матрицей метрическоготензора пространства $^nV_{2n}$ в адаптированном ортонормированном репере.

Вид (33) для тензора кривизны $R_{IJ,KL}$ пространства $^nV_{2n}$ изометричного пространству $'\mathbb{C}\bar{S}_n$, была найдена М. Прванович в работе [12;с.209], где множитель $\frac{1}{r^2}$ обозначается $K/2$.

Формула (20) имеет место и в случае дуального эрмитова эллиптического пространства ${}^{\circ}\mathbb{C}\bar{S}_{n_2}$, в котором, также как для пространств $\mathbb{C}\bar{S}_n$ и ${}'\mathbb{C}\bar{S}_n$ показывается, что $\rho = 4/r^2$. Для упрощения этой формулы следует воспользоваться уравнениями структуры (21) алгебры ${}^{\circ}\mathbb{C}$, причем матрицы $(c^{\gamma}_{0\beta})$ и $(c^{\gamma}_{1\beta})$, состоящие из структурных констант $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$, входящих в эти уравнения, имеют вид, отличающийся от вида формул (30) тем, что здесь матрица $(\eta^{\beta}_{\alpha})$ имеет вид $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и разложениями, отличающимися от разложений (31) тем, что здесь матрица $(\gamma_{\alpha\beta})$ имеет вид $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. В этом случае имеет место формула (32), где матрицы $(\gamma_{IK})$, $(\delta^I_J)$, $(\varepsilon_{IJ})$ и $(\eta^I_J)$ – матрицы $(2n+2)$-го порядка, по главной диагонали которых стоят матрицы второго порядка $(\gamma_{\alpha\beta})$, $(\delta^{\beta}_{\alpha})$, $(\varepsilon_{\alpha\beta})$ и $(\eta^{\alpha}_{\beta})$, причем матрицы $(\eta^{\alpha}_{\beta})$ и $(\gamma_{\alpha\beta})$ имеют указанный выше вид; матрица $(\gamma_{IJ})$ здесь также является матрицей метрического тензора полуриманова пространства $V^n_{2n}$ изометричного пространству ${}^{\circ}\mathbb{C}S_n$. Этот вид принимает формула для тензора кривизны пространства, изометричного пространству ${}^{\circ}\mathbb{C}S_n$, найденная Н.В. Талантовой и А.П. Широковым в работе [13], с.109.

## § 5. Кватернионное пространство

В случае пространства $\mathbb{H}\bar{S}_n$ кривизны $\frac{1}{r^2}$ с унитарно-ортонормированным репером $\{\varepsilon_i\}$ в изометричном ему римановом пространстве $V_{4n}$ будем пользоваться адаптированным репером, состоящим из векторов $\vec{e}_{4i-3} = \vec{\varepsilon}_i, \vec{e}_{4i-2} = \vec{\varepsilon}_i i_1, \vec{e}_{4i-1} = \vec{\varepsilon}_i i_2, \vec{e}_{4i} = \vec{\varepsilon}_i i_3$ $(i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k)$. В этом репере дифференциальные формы $\omega^j_i$ пространства $V_{4n}$ кроме условий (2) удовлетворяют условиям

$$
\begin{gathered}
\omega^{4j-3+\beta}_{4i-3+\alpha} = \omega^{4j-3+\gamma}_{4i-3} c^{\beta}_{\gamma\alpha} \quad (i \neq j), \\
\omega^{4i-3+\beta}_{4i-3+\alpha} - \omega^{4i-3+\gamma}_{4i-3} c^{\beta}_{\gamma\alpha} = \omega^{4j-3+\beta}_{4j-3+\alpha} - \omega^{4j-3+\gamma}_{4j-3} c^{\beta}_{\gamma\alpha} \quad (i \neq j)
\end{gathered} \tag{34}
$$

где $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ – структурные константы алгебры $\mathbb{H}$, входящие в структурные уравнения (21) для этой алгебры (см. [14], с. 54).

Группа G движений пространства $\mathbb{H}\bar{S}_n$ представляется кватернионными унимодулярными унитарными матрицами $(n+1)$-го порядка, а алгебра Ли $\mathfrak{G}$ этой группы представляется кватернионными косоэрмитовыми матрицами $(n+1)$-порядка, удовлетворяющими условию $\mathrm{ReSp}A = 0$. Так же как в случае пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$, показывается, что в случае пространства $\mathbb{H}\bar{S}_n$ матрицы алгебры Ли группы движений этого пространства, изображающие векторы пространства $E_{4n}$, касательного к пространству $V_{4n}$, изометричному пространству $\mathbb{H}\bar{S}_n$, имеют вид (17). В этом случае подпространство $\mathbb{E}$ можно отождествить с касательным пространством $E_{4n}$ в точке пространства $V_{4n}$ изометричного пространству $\mathbb{H}\bar{S}_n$, матрицы (17) здесь также изображают касательные векторы пространства $V_{4n}$, причем вектору адаптированного репера пространства $V_{4n}$, изображающему вектор $\vec{\varepsilon}_i i_{\alpha}$, соответствует матрица (18). В случае пространства $\mathbb{H}\bar{S}_n$ имеют место также формулы (19) и (20) и, так же как в случае пространства $\mathbb{C}\overline{S}_n$, доказывается, что множитель $\varrho$ в формуле (20) равен $1/r^2$.

Для упрощения формулы (20) воспользуемся уравнениями (21) структуры алгебры $\mathbb{H}$, причем матрицы $(c^{\gamma}_{0\beta})$, $(c^{\gamma}_{1\beta})$, $(c^{\gamma}_{2\beta})$ и $(c^{\gamma}_{3\beta})$, состоящие из структурных констант $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$, входящих в эти формулы, имеют вид

(35) $(c^{\gamma}_{0\beta})=(\delta^{\gamma}_{\beta})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, (c^{\gamma}_{1\beta})=(\varepsilon^{\gamma}_{1\beta})=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}, (c^{\gamma}_{2\beta})=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}, (c^{\gamma}_{3\beta})=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$

и разложениями

(36) $\quad i_\alpha \bar{i}_\beta = \delta_{\alpha\beta} i_0 + \sum_\lambda \varepsilon_{\lambda\alpha\beta} i_\lambda \ (\lambda>0), \quad {}_{1\delta}(\varepsilon_{\lambda\alpha\beta}) = (\varepsilon^{\alpha}_{\lambda\beta}).$

Полученное выражение для координат $R_{i\alpha,j\beta,k\gamma}{}^{l\delta}$ может быть переписано в аналогичном формуле (24) виде

(37) $\quad R_{IJ,K}{}^{L} =(1/2r^2)(\delta_{IK}\delta^L_J -\delta_{JK}\delta^L_I -\sum_\lambda( \varepsilon_{\lambda IK}\varepsilon^L_{\lambda J} - \varepsilon_{\lambda JK}\varepsilon^L_{\lambda I} + 2\varepsilon_{\lambda IJ}\varepsilon^L_{\lambda K})).$

Опуская индекс L с помощью метрического тензора $a_{IJ}$, который в случае ортонормированного репера имеет вид $\delta_{IJ}$, мы получим формулы

(38) $\quad R_{IJ,KL} = (1/2r^2)(\delta_{IK}\delta_{JL} -\delta_{IL}\delta_{JK} +\sum_\lambda(\varepsilon_{\lambda IK}\varepsilon_{\lambda JL} - \varepsilon_{\lambda IL}\varepsilon_{\lambda JK} +2\varepsilon_{\lambda IJ}\varepsilon_{\lambda KL})).$

Матрицы $(\delta_{IJ})$, $(\delta^I_J)$, $(\varepsilon_{\lambda IJ})$ и $(\varepsilon^I_{\lambda J})$ здесь представляют собой матрицы $(4n+4)$-го порядка, по главной диагонали которых стоят соответственные матрицы четвертого порядка $(\delta_{\alpha\beta})$, $(\delta^\alpha_\beta)$, $(\varepsilon_{\lambda\alpha\beta})$ и $(\varepsilon^\alpha_{\lambda\beta})$, а остальные элементы равны нулю.

Формула (38) показывает, что ненулевыми координатами тензора $R_{IJ,KL}$ в случае пространства $\mathbb{H}\overline{S}_n$ являются координаты

(39) $\quad R_{IJ,IJ} = 2/r^2, \ \{I,J\}\subset\{4i-3,\ 4i-2,\ 4i-1,\ 4i\}$ ,

(40) $\quad R_{IJ,IJ} = 1/2r^2, \ \ I\in\{4i-3,4i-2,4i-1,4i\},\ J\in\{4j-3,4j-2,4j-1,4j\}, i\neq j,$

(41) $\quad R_{IJ,KL} = 1/r^2,\ R_{JK,IL} = R_{KI,JL} = -(1/r^2),\ \{I,J\}\subset\{4i-3,4i-2,4i-1,4i\},$
$\{K,L\}\subset\{4j-3,4j-2,4j-1,4j\}, I<J, K<L, i\neq j.$

## § 6. Антикватернионное пространство

В случае пространства ${}'\mathbb{H}S_n$ кривизны $1/r^2$ с унитарно-ортонормиранным репером $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ в изометричном ему псевдоримановом пространстве ${}^{2n}V_{4n}$ имеем адаптированный ортонормированный репер, состоящий из векторов $\vec{e}_{4i-3} =\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{e}_{4i-2} =\vec{\varepsilon}_i i_1$, $\vec{e}_{4i-1} = \vec{\varepsilon}_i i_2$, $\vec{e}_{4i} = \vec{\varepsilon}_i i_3$ $(i_1=i,\ i_2=e,\ i_3=f)$.

В этом репере дифференциальные формы $\omega^J_I$ пространства ${}^{2n}V_{4n}$ кроме условий (5) связаны условиями (30), где $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ – структурные константы алгебры H. Группа G движений пространства ${}'\mathbb{H}\overline{S}_n$ представляется антикватернионными унимодулярными унитарными матрицами $(n+1)$-го порядка, а алгебра Ли $\mathbb{G}$ этой группы представляется антикватернионными косоэрмитовыми матрицами (n+1)-го порядка, удовлетворяющими условию $\mathrm{ReSp}A=0$. Так же как в случае пространства $'\mathbb{C}\bar{S}_n$ показывается, что в случае пространства $'\mathbb{H}\bar{S}_n$ матрицы алгебры Ли группы движений этого пространства, изображающие векторы пространства ${}^{2n}E_{4n}$ касательного к пространству ${}^{2n}V_{4n}$, изометричному пространству $'\mathbb{H}S_n$ имеют вид (17), причем матрица, изображающая вектор $\vec{e}_{i}i_{\alpha}$ адаптированного ортонормированного репера пространства ${}^{2n}V_{4n}$ имеет вид (18). В случае пространства $'\mathbb{H}\bar{S}_n$ имеют место также формулы (19) и (20) и, так же как в случае пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$, $'\mathbb{C}\bar{S}_n$ и $\mathbb{H}\bar{S}_n$, показывается, что множитель $\rho$ в формуле (20) равен $1/r^2$. Для упрощения формулы (20) воспользуемся уравнениями (21) структуры алгебры $'\mathbb{H}$, причем матрицы $(c^{\gamma}_{0\beta})$, $(c^{\gamma}_{1\beta})$, $(c^{\gamma}_{2\beta})$ и $(c^{\gamma}_{3\beta})$, состоящие из структурных констант $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$, входящих в эти формулы, имеют вид

$$(42)\qquad (c^{\gamma}_{0\beta})=(\delta^{\gamma}_{\beta})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ (c^{\gamma}_{1\beta})=(\eta^{\gamma}_{1\beta})=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ (c^{\gamma}_{2\beta})=(\eta^{\gamma}_{2\beta})=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\ (c^{\gamma}_{3\beta})=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

и разложениями

$$(43)\qquad i_{\alpha}\bar{i}_{\beta}=\gamma_{\alpha\beta}i_0+\sum_{\lambda}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta}i_{\lambda},\ \gamma_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\ (\varepsilon_{\lambda\alpha\beta})=(\eta^{\alpha}_{\lambda\beta})(\gamma_{\alpha\beta}),$$

т.е. матрица $(\varepsilon_{1\alpha\beta})$ в случае пространства $'\mathbb{H}\bar{S}_n$ умножением на матрицу $(\gamma_{\alpha\beta})$, а матрицы $(\varepsilon_{2\alpha\beta})$ и $(\varepsilon_{3\alpha\beta})$ для пространства $'\mathbb{H}\bar{S}_n$ совпадают с одноименными матрицами для пространства $\mathbb{H}\bar{S}_n$.

Полученное выражение для координат $R_{i\alpha,j\beta,k\gamma}{}^{l\delta}$ может быть переписано в аналогичном формуле (37) виде

$$(44)\qquad R_{IJ,K}{}^{L}=(1/2r^2)(\gamma_{IK}\delta^{L}_{J}-\gamma_{JK}\delta^{L}_{I}-\sum_{\lambda}(\varepsilon_{\lambda IK}\eta^{L}_{\lambda J}-\varepsilon_{\lambda JK}\eta^{L}_{\lambda I}+2\varepsilon_{\lambda IJ}\eta^{L}_{\lambda K})).$$

Опуская индекс L с помощью метрического тензора $a_{IJ}$, который в случае ортонормированного репера пространства ${}^{2n}V_{4n}$ имеет вид $\gamma_{IJ}$ и замечая, что $(\eta^{L}_{\lambda I})(\gamma_{JK})=(\varepsilon_{\lambda LI})$, мы получим формулы

$$(45)\qquad R_{IJ,KL}=(1/2r^2)(\gamma_{IK}\gamma_{JL}-\gamma_{IL}\gamma_{JK}-\sum_{\lambda}\sigma_{\lambda}(\varepsilon_{\lambda IK}\varepsilon_{\lambda JL}-\varepsilon_{\lambda IL}\varepsilon_{\lambda JK}+2\varepsilon_{\lambda IJ}\varepsilon_{\lambda KL})),\ \sigma_{\lambda}=i_{\lambda}^{2}.$$

Формула (20) имеет место и в случае полукватернионного эрмитова эллиптического пространства ${}^{0}\mathbb{H}\bar{S}_n$, для которого, так же как для пространств $\mathbb{H}\bar{S}_n$ и $'\mathbb{H}\bar{S}_n$, мы получим, что для пространства ${}^{0}\mathbb{H}\bar{S}_n$ имеет место аналог формулы (44).

## § 7. Октавная плоскость

В случае октавной эрмитовой эллиптической плоскости $\mathbb{O}\bar{S}_2$ кривизны $1/r^2$ с унитарно-ортонормированным репером $\{\varepsilon_i\}$ в изометричном ей римановом пространстве $V_{16}$ будем пользоваться адаптированным ортонормированным репером, состоящим из векторов $\vec{e}_1=\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{e}_2=\vec{\varepsilon}_1 i_1, \ldots,\ \vec{e}_8=\vec{\varepsilon}_1 i_7,\ \vec{e}_9=\vec{\varepsilon}_2,\ \vec{e}_{10}=\vec{\varepsilon}_2 i_1, \ldots, \vec{e}_{16}=\vec{\varepsilon}_2 i_7$.

В этом репере дифференциальные формы $\omega_I^J$ пространства ${}^8V_{16}$ кроме условий (5) связаны 84 независимыми линейными условиями

$$\omega_{1+\alpha}^{1+\beta}-\omega_1^{1+\gamma}c_{\gamma\alpha}^{\beta} = \omega_{2+\alpha}^{2+\beta}-\omega_2^{2+\gamma}c_{\gamma\alpha}^{\beta} \qquad \text{(21 условие)} \tag{46}$$
$$(\omega_{1+\alpha}^{1+\gamma}-\omega_1^{1+\varepsilon}c_{\varepsilon\alpha}^{\gamma})c_{\gamma\beta}^{\delta} + (\omega_{1+\beta}^{1+\gamma}-\omega_1^{1+\varepsilon}c_{\varepsilon\beta}^{\gamma})c_{\alpha\gamma}^{\delta}=(\omega_{1+\gamma}^{1+\delta}-\omega_1^{1+\varepsilon}c_{\varepsilon\gamma}^{\delta})c_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (7\ )$$

([14],с. 54).

Алгебра Ли группы движений плоскости $\mathbb{O}\bar{S}_2$ представляется октавными косоэрмитовыми матрицами третьего порядка, удовлетворяющими условию $SpA=0$ и вещественными матрицами седьмого порядка алгебры Ли группы автоморфизмов тела $\mathbb{O}$ октав, являющейся компактной особой простой группой Ли класса $G_2$ [15].

Так же как в случае пространства $\mathbb{C}\bar{S}_n$ показывается, что в случае плоскости $\mathbb{O}\bar{S}_2$ матрицы алгебры Ли группы движений этой плоскости, изображающие векторы пространства $E_{16}$ касательного к пространству $V_{16}$, изометричному плоскости $\mathbb{O}\bar{S}_2$, имеют вид (17), однако в отличие от пространств $\mathbb{C}\bar{S}_n$ и $\mathbb{H}\bar{S}_n$, построенных над ассоциативными алгебрами, в случае плоскости $\mathbb{O}\bar{S}_2$ следует различать случаи, когда базисные элементы $i_\alpha$ алгебры $\mathbb{O}$ принадлежат одной ассоциативной подалгебре, и случаи, когда эти элементы не принадлежат такой подалгебре.

В первом случае координаты $R_{i\alpha,j\beta,k\gamma}^{\ \ \ \ \ \ \ \ \ 1\delta}$ вычисляются по той же формуле (20), что ив случае пространств $\mathbb{C}\bar{S}_n$, $\mathbb{H}\bar{S}_n$. Во втором случае коммутатор $[AB]$ двух матриц $A$ и $B$ вычисляется не по формуле $[AB]=AB - BA$, а по более сложной формуле, найденной Э.Б. Винбергом [16]:

$$[AB] = AB - BA - \tfrac{1}{3}Sp(AB - BA) + D_{A,B}, \tag{47}$$

где $D_{A,B}$ – элемент алгебры Ли группы автоморфизмов альтернативного тела $\mathbb{O}$, вычисляемый по формуле

$$D_{A,B} = \frac{1}{6}\sum_{ij}\sum D_{a_{ij}b_{ij}}, \tag{48}$$

где $D_{a_{ij}b_{ij}}$ – элемент указанной алгебры Ли, определяемый одноименными элементами $a_{ij}$ и $b_{ij}$ матриц $A$ и $B$, причем действие элемента этой алгебры Ли, определяемого двумя октавами $a$ и $b$, на октаву $c$ определяется по формуле

$$D_{a,b}c = [a[bc]] - [b[ac]] + [[ab]c], \tag{49}$$

где "коммутатор" $[ab]$ октав $a$ и $b$ имеет вид $[ab] = ab- ba$, а действие элемента этой алгебры Ли на октавную матрицу $C$ состоит из действий (49) на каждый элемент матрицы $C$.

В случае, когда базисные элементы $i_\alpha$, $i_\beta$, $i_\gamma$ алгебры $\mathbb{O}$ входящие в формулу (20), принадлежат к одной ассоциативной подалгебре этой алгебры (в этом случае элемент $i_\delta$ также принадлежит к этой подалгебре), вычисление координат $R_{IJ,K}{}^L$ и $R_{IJ,KL}$ тензора кривизны пространства $V_{16}$ изометричного плоскости $\mathbb{O}\bar{S}_2$ не отличается от вычислений этих координат для пространства $V_8$ изометричного плоскости $\mathbb{H}\bar{S}_2$. В случае, когда базисные элементы $i_\alpha$, $i_\beta$, $i_\gamma$ алгебры $\mathbb{O}$, входящие в формулу (21), не принадлежат к одной ассоциативной подалгебре алгебры $\mathbb{O}$, то из слагаемых двойного коммутатора $[[A_{i\alpha}A_{j\beta}]A_{k\gamma}]$, которое определяется только первыми слагаемыми выражений (47) для коммутаторов, входящих в состав двойного коммутатора, имеет тот же вид (20), что и в случае ассоциативных алгебр (заметим, что в этом случае произведения $i_\gamma(\bar{i}_\beta i_\alpha)$ и $i_\gamma(\bar{i}_\alpha i_\beta)$ в формуле (20) следует заменить произведениями $-(i_\gamma\bar{i}_\beta)i_\alpha$ и $-(i_\gamma\bar{i}_\alpha)i_\beta$.

Слагаемое $-\frac{1}{3}Sp(A_{i\alpha}A_{j\beta}-A_{j\beta}A_{i\alpha})\cdot I$ коммутатора $[A_{i\alpha}A_{j\beta}]$ отлично от нуля только при $i=j$, так как элементы $i_\alpha$, $i_\beta$, $i_\gamma$, не принадлежащие ассоциативной подалгебре алгебры $\mathbb{O}$, обладают свойствами $i_\alpha{}^2=-1$ и $i_\alpha i_\beta=-i_\beta i_\alpha$, вследствие чего это слагаемое равно $-\frac{1}{3}Sp(E_{oo}\cdot 2i_\alpha i_\beta+E_{ii}\cdot 2i_\alpha i_\beta)\cdot I$, т.е. $-\frac{4}{3}i_\alpha i_\beta\cdot I$ и разность $\Delta_{i\alpha,i\beta}=A_{i\alpha}A_{i\beta}-A_{i\beta}A_{i\alpha}-\frac{1}{3}Sp(A_{i\alpha}A_{i\beta}-A_{i\beta}A_{i\alpha})\cdot I$ равна $\frac{2}{3}(E_{oo}+E_{ii})i_\alpha i_\beta-\frac{4}{3}E_{jj}i_\alpha i_\beta$ и $\Delta_{i\alpha,i\beta}A_{k\gamma}-A_{k\gamma}\Delta_{i\alpha,i\beta}$ при $i=k$ равна $\frac{4}{3}(E_{oi}+E_{io})(i_\alpha i_\beta)i_\gamma$, при $i\neq k$ равна $2(E_{ok}+E_{ko})(i_\alpha i_\beta)i_\gamma$.

С другой стороны, элемент алгебры Ли группы автоморфизмов алгебры $\mathbb{O}$ также отличен от нуля только в случае $i=j$ и так как выражение (49) при $a=i_\alpha$, $b=i_\beta$, $c=i_\gamma$ равно $-4(i_\alpha i_\beta)i_\gamma$, $D_{A_{i\alpha}A_{i\beta}}A_{k\gamma}=-\frac{8}{6}(E_{ok}+E_{ko})(i_\alpha i_\beta)i_\gamma$. Поэтому при $i=k$ выражения $\Delta_{i\alpha,i\beta}A_{i\gamma}-A_{i\gamma}\Delta_{i\alpha,i\beta}$ и $D_{A_{i\alpha}A_{i\beta}}A_{i\gamma}$ взаимно уничтожаются и координаты $R_{i\alpha,i\beta;i\gamma}{}^{i\delta}$ и $R_{i\alpha,i\beta;i\gamma,i\delta}$ равны нулю и в том случае, когда элементы $i_\alpha$, $i_\beta$, $i_\gamma$ не принадлежат к ассоциативной подалгебре алгебры $\mathbb{O}$.

В обоих случаях координаты $R_{IJ,K}{}^L$ и $R_{IJ,KL}$ тензора кривизны пространства $V_{16}$ изометричного плоскости $\mathbb{O}\bar{S}_2$ вычисляются по тем же формулам (37) и (38), что и в случае пространства $\mathbb{H}\bar{S}_n$ с той разницей, что здесь индекс $\lambda$ пробегает не три значения 1,2,3, а семь значений 1,2,...,7, а матрицы $(\delta_{IJ})$, $(\delta^I_J)$, $(\varepsilon_{\lambda IJ})$, $(\varepsilon^I_{\lambda J})$ являются матрицами 16-го порядка, вдоль главной диагонали которых стоят соответственные матрицы восьмого порядка $(\delta_{\alpha\beta})$, $(\delta^\alpha_\beta)$, $(\varepsilon_{\lambda\alpha\beta})$, $(\varepsilon^\alpha_{\lambda\beta})$, определяемые аналогично одноименным матрицам четвертого порядка для пространства $\mathbb{H}\bar{S}_n$.

Формулы аналогичные формулам (37) и (38) имеют место и для плоскости $'\mathbb{O}S_2$ над алгеброй $'\mathbb{O}$ антиоктав, а формула, аналогичная формуле (37), имеет место и для плоскости $^\circ\mathbb{O}\bar{S}_2$ над алгеброй $^\circ\mathbb{O}$ полуоктав.

## 8. Пространства над тензорными произведениями

Аналогичная теория может быть построена для пространств над тензорными произведениями алгебр, рассматривавшихся в §§ 3–7. Будем обозначать эрмитово эллиптическое пространство над тензорным произведением $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}$ алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ символом $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})\tilde{\bar{S}}_n$: это обозначение связано с тем, что абсолютный поляритет в пространствах $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})\tilde{\bar{S}}_n$ имеет вид $u_i=\tilde{\bar{x}}^i$, где знаки $-$ и $\sim$ обозначают переходы к сопряженным элементам в алгебрах $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Заметим, что пространства $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C})\tilde{\bar{S}}_n$, $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})\tilde{\bar{S}}_n$, $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{H})\tilde{\bar{S}}_n$ допускают интерпретации в виде, соответственно, произведения двух пространств $\mathbb{C}\bar{S}_n$ [17], многообразия прямых пространства $\mathbb{C}\bar{S}_{2n+1}$ [18] и многообразия трехмерных плоскостей пространства $S_{4n+3}$ [19], а группы движений плоскостей $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\tilde{\bar{S}}_2$, $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{H})\tilde{\bar{S}}_2$ и $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\tilde{\bar{S}}_2$ изоморфны, соответственно, компактным особым простым группам Ли классов $E_6, E_7$ и $E_8$ [20]. Алгебры Ли $\mathbb{G}$ групп движений пространств в случае ассоциативных алгебр $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$ представляются косоэрмитовыми матрицами $(n+1)$-го порядка с элементами из алгебр $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}$ связанными условиями $SpA=0$ или $\mathrm{Re}SpA=0$, а в случае неассоциативных алгебр $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}$ – косоэрмитовыми матрицами третьего порядка, связанными условиями $SpA=0$ и элементами алгебр Ли групп автоморфизмов алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Если размерносты алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ равны, соответственно, $r$ и $s$, а базисы этих алгебр состоят, соответственно, из элементов $i_1, i_2, \ldots, i_r$ и $I_1, I_2, \ldots, I_s$, то будем пользоваться в римановых и псевдоримановых пространствах $(\cong(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})\tilde{\bar{S}}_n)$ адаптированными реперами, состоящими из векторов, изображающих векторы $\vec{\varepsilon}_i i_\alpha I_A$, где $\vec{\varepsilon}_i$ – векторы унитарно-ортонормированных реперов пространств $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})\tilde{\bar{S}}_n$.

Симметрическим римановым или псевдоримановым пространствам, образующим вещественные реализации пространств $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})\tilde{\bar{S}}_n$ также соответствуют разложения алгебр Ли $\mathbb{G}$ групп $G$ движений этих пространств в виде прямых сумм (14), причем матрицы, представляющие матрицы подпространств $\mathbb{E}$ здесь имеют вид

$$A = E_{oi}a^i - E_{io}\tilde{\bar{a}}^i . \tag{50}$$

причем вектору адаптированного репера симметрического пространства, изображающего вектор $\vec{\varepsilon}_i i_\alpha I_A$, соответствует матрица (50) вида

$$A_{i\alpha A} \mathrel{\underline{=}} E_{oi} i_\alpha I_A \; E_{io} \bar{i}_\alpha \tilde{I}_A . \tag{51}$$

В случае ассоциативных алгебр $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}$, составляя двойной коммутатор $[[A_{i\alpha A} A_{j\beta B}] A_{k\gamma\Gamma}]$, мы получим равенство

$$R_{i\alpha A,\, j\beta B,\, k\gamma\Gamma}^{\;\;l\delta\Delta} = (1/2r^2)(-\vec{\varepsilon}_i \delta_{jk} i_\gamma (\bar{i}_\beta i_\alpha) I_\Gamma (\tilde{I}_B I_A) + \vec{\varepsilon}_j \delta_{ik} i_\gamma (\bar{i}_\alpha i_\beta) I_\Gamma (\tilde{I}_A I_B) + \vec{\varepsilon}_k \delta_{ij} (i_\beta \bar{i}_\alpha - i_\alpha \bar{i}_\beta) i_\gamma (I_B \tilde{I}_A - I_A \tilde{I}_B) I_\Gamma). \tag{52}$$

Определяя матрицу $(\varepsilon_{\alpha\beta})$ с помощью элементов $i_\alpha$, $i_\beta$ по формуле (23) и аналогичную матрицу $(\varepsilon_{AB})$ с помощью элементов $I_A$, $I_B$, мы определим тензоры

$(\varepsilon_{IJ})$ и $(\mathcal{E}_{IJ})$, матрицы которых определяются с помощью матриц $(\varepsilon_{\alpha\beta})$ и $(\mathcal{E}_{AB})$ так же, как матрица $(\varepsilon_{IJ})$в § 3. С помощью матриц $(\varepsilon_{\alpha\beta})$ и $(\mathcal{E}_{AB})$ определим также матрицу $(\varepsilon\mathcal{E})_{IJ}$, по главной диагонали которой стоят матрицы четвертего порядка $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, а остальные элементы равны нулю. С помощью тензоров $\varepsilon_{IJ}, \mathcal{E}_{IJ}$ и $(\varepsilon\mathcal{E})_{IJ}$ таким же образом, как в § 3 была получена формула (25) мы получим выражение тензора кривизны симметрического пространства, образующего вещественную реализацию пространства $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C})\tilde{\bar{S}}_n$ в виде

$$R_{IJ,KL} = (1/2r^2)(\delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK} + \varepsilon_{IK}\varepsilon_{JL} - \varepsilon_{IL}\varepsilon_{JK} + \mathcal{E}_{IK}\mathcal{E}_{JL} - \mathcal{E}_{IL}\mathcal{E}_{JK} - (\varepsilon\mathcal{E})_{IK}(\varepsilon\mathcal{E})_{JL} + (\varepsilon\mathcal{E})_{IL}(\varepsilon\mathcal{E})_{JK} - 2(\varepsilon\mathcal{E})_{IJ}(\varepsilon\mathcal{E})_{KL}). \tag{53}$$

Совершенно аналогично мы получим выражения тензоров кривизны симметрических пространств, образующих вещественные реализации пространств $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})\tilde{\bar{S}}_n$ и $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{H})\tilde{\bar{S}}_n$ в виде

$$R_{IJ,KL} = (1/2r^2)(\delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK} + \sum_{\lambda}(\varepsilon_{\lambda IK}\varepsilon_{\lambda JL} - \varepsilon_{\lambda IL}\varepsilon_{\lambda JK}) + \sum_{\Lambda}(\mathcal{E}_{\Lambda IK}\mathcal{E}_{\Lambda JL} - \mathcal{E}_{\Lambda IL}\mathcal{E}_{\Lambda JK}) - \sum_{\lambda\Lambda}\sum((\varepsilon_{\lambda}\mathcal{E}_{\Lambda})_{IK}(\varepsilon_{\lambda}\mathcal{E}_{\Lambda})_{JL} + (\varepsilon_{\lambda}\mathcal{E}_{\Lambda})_{IL}(\varepsilon_{\lambda}\mathcal{E}_{\Lambda})_{JK} - 2(\varepsilon_{\lambda}\mathcal{E}_{\Lambda})_{IJ}(\varepsilon_{\lambda}\mathcal{E}_{\Lambda})_{KL})), \tag{54}$$

где тензоры $\varepsilon_{\lambda IJ}$ определяются так же как для пространства $\mathbb{H}\bar{S}_n$, тензоры $\mathcal{E}_{\Lambda IJ}$ определяются аналогично с помощью элементов $I_A, I_B$, а тензоры $(\varepsilon_{\lambda}\mathcal{E}_{\Lambda})_{IJ}$ определяются аналогично тензору $(\varepsilon\mathcal{E})_{IJ}$ для пространства $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C})\tilde{\bar{S}}_n$. В случае неассоциативных алгебр в общем случае коммутатор $[AB]$ двух матриц вычисляется не по формуле $[AB] = AB - AB$, а по найденной Э.Б. Винбергом [16] формуле

$$[AB] = AB - BA - (1/3)Sp(AB - BA)\cdot I + D^{\mathbb{A}}_{A,B} + D^{\mathbb{B}}_{A,B}, \tag{55}$$

где $D^{\mathbb{A}}_{A,B}$ и $D^{\mathbb{B}}_{A,B}$ – элементы алгебр Ли групп автоморфизмов алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, вычисляемые по формуле (48), в которой слагаемые $D_{a_{ij},b_{ij}}$ заменены слагаемыми $D^{\mathbb{A}}_{a_{ij},b_{ij}}$ и $D^{\mathbb{B}}_{a_{ij},b_{ij}}$, причем для элементов $a$ и $b$ алгебры $\mathbb{A}$ и элементов $A$ и $B$ алгебры $\mathbb{B}$

$$D^{\mathbb{A}}_{aA,bB} = (A,B)D^{\mathbb{A}}_{a,b}, \quad D^{\mathbb{B}}_{aA,bB} = (a,b)D^{\mathbb{B}}_{A,B} \tag{56}$$

где $(a,b)$ и $(A,B)$ – скалярные произведения элементов $a$ и $b$ алгебры $\mathbb{A}$ и $A$ и $B$ алгебры $\mathbb{B}$, рассматриваемых как векторы, при метрике евклидова пространства $E_8$ в алгебре $\mathbb{O}$, а действия элементов $D^{\mathbb{A}}_{a,b}$ и $D^{\mathbb{B}}_{A,B}$ алгебр Ли групп автоморфизмов алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ на элементы $c$ и $C$ этих алгебр определяются по формуле (49). Составляя двойной коммутатор $[[A_{i\alpha}A_{j\beta B}]A_{k\gamma\Gamma}]$ с помощью формулы (55) мы получим выражения тензоров кривизны симметрических пространств, образующих вещественные реализации пространств $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})\tilde{\bar{S}}_n$ в случае неассоциативных алгебр $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}$ по той же формуле (54), что в случае пространств $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})\tilde{\bar{S}}_n$ и $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{H})\tilde{\bar{S}}_n$ с той разницей, что в случае, когда алгебра $\mathbb{A}$ или $\mathbb{B}$ является алгеброй $\mathbb{O}$ октав, индексы $\lambda$ или $\Lambda$ пробегают семь значений $1,2,\ldots,7$.

Аналогично могут быть получены значения тензора $R_{IJ,KL}$ для симметрических пространств, образующих реализации пространств $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})\widetilde{S}_n$ в случае, когда одна из алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ или обе эти алгебры являются алгебрами ${}^1\mathbb{C}, {}^1\mathbb{H}$ или ${}^1\mathbb{O}$ и значения тензора $R^{\cdot\cdot\cdot L}_{IJ,K}$ для симметрических пространств, образующих реализации пространств $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})\widetilde{S}_n$ в случае, когда одна из алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ является алгеброй ${}^0\mathbb{C}$, ${}^0\mathbb{H}$, ${}^0\mathbb{O}$.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Э. КАРТАН, Риманова геометрия в ортогональном репере, Изд-во Моск унив., 1960, с.307.

[2] П.А. ШИРОКОВ, Об одном типе симметрических пространств, Матем. сборник 41(83)(1957), 361-372 [ в книге: П.А. Широков, Изабранные работы по геометрии, Казань, 1966].

[3] В.В. ВИШНЕВСКИЙ, А.П. ШИРОКОВ, В.В. ШУРЫГИН, Пространства над алгебрами, Изд-во Казанского унив., Казань, 1985, с. 264.

[4] Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД, Неевклидовы геометрии, ГИТТЛ, Москва, 1956, с. 744.

[5] Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД, Л.М. КАРПОВА, Симметрические полуримановы пространства, Изв. вузов, Математика 1(1964), 100-116.

[6] Л.М. МАРКИНА, Дуальные эрмитовы неевклидовы пространства, Уч. зап. МОНИ им. Н.К. Крупской 272(1969), 147-165.

[7] И.Г. ЛУЩИЦКАЯ, Полукватернионные пространства, Автореферат диссертации на соискание уч. степени кандидата физ.-мат. наук, Ташкент, 1968.

[8] Д.Б. ПЕРСИЦ, Геометрия над вырожденными октавами, Докл. АН СССР 173(1967), 1010-1013.

[9] Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД, Неевклидовы пространства, Наука, Москва, 1969, с. 547.

[10] Ш. КОБАЯСИ, К. НОМИДЗУ, Основы дифференциальной геометрии, Наука, Москва, 1981, с. 414.

[11] В.Ф. КИРИЧЕНКО, О геометрии однородных К-пространств, Матем. заметки 30 (1981), 569- 582.

[12] M. PRVANOVIĆ, Holomorphically projective transformations in a locally product space, Math. Balkanica 1(1971), 195-213.

[13] Н.В. ТАЛАНТОВА, А.П. ШИРОКОВ, Проективные модели унитарных пространств постоянной кривизны над алгеброй дуальных чисел, Труды геом. семинара, вып. 16, Казань, 1984, 103-110.

[14] Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД, С.Л. АТАНАСЯН, Т.А. ТИМОШЕНКО, Геометрия расслоений Хопфа, Изв. вузов, Математика 6(1987), 52-57.

[15] Г. ФРЕЙДЕНТАЛЬ, Октавы, особые группы Ли и октавная геометрия, Математика, сборник переводов 1(1957), 117-153.

[16] Э.Б. ВИНБЕРГ, Конструкци особых простых алгебр Ли , Труды сем. по векторному и тензорному анализу, вып. 13, МГУ, Москва, 1966, 7-9.

[17] Н.Т. АББАСОВ, Бикомплексные эллиптические пространства, Ученые записки Азерб. гос. унив., серия физ.-мат. наук 2(1962), 3-9.

[18] Н.Т. АББАСОВ, Бикватернионные эллиптичиские пространства, Ученые записки Азерб. гос. унив., серия физ.-мат. наук 2 (1963), 3-9.

[19] Л.В. РУМЯНЦЕВА, Квадрикватернионные эллиптические пространства, Ученые записки Азерб. гос. унив., серия физ.-мат. наук 3 (1963), 35-38.

[20] Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД, Геометрические интерпретации компактных простых групп Ли класса E, Докл. АН СССР 106 (1956), 600-603.

**B.A. Rozenfel'd, T.A. Burceva, N.V. Dušina,**
**L.P. Kostrikina, V.V. Maljutin, T.I. Juhtina**

## TENZORI KRIVINE ERMITOVIH ELIPTIČKIH PROSTORA

U odnosu na adaptirani ortonormirani reper odreden je tenzor krivine sledećih prostora: simetričnih rimanovih prostora $V_{2n}, V_{4n}$ i $V_{16}$ ranga 1 koji su izometrični ermitovim eliptičkim prostorima $\mathbb{C}\bar{S}_n$, $\mathbb{H}\bar{S}_n$ i ravni $\mathbb{O}\bar{S}_2$; simetričnih pseudorimanovih prostora ${}^{n}V_{2n}$, ${}^{2n}V_{4n}$ i ${}^{8}V_{16}$ ranga 1. Daje se i oblik tenzora krivine simetričnih prostora višeg ranga koji su realna interpretacija ermitovih eliptičkih prostora nad tenzorskim proizvodom algebri.

Б.А. Розенфельд, ул. Удальцова 10, кв.11, Москва 117 415, СССР