

МАНОЈЛО МАРАВИЋ

О ЈЕДНОМ ПОСТУПКУ ЗБИРЉИВОСТИ ДИВЕРГЕНТНИХ РЕДОВА

У В О Д

Познато је да се сваком до сада употребљеном поступку збирљивости може придружити функција $T(t, \epsilon)$, ($\epsilon > 0$) која одређује такозвани размак конвергенције $(t, t+T)$ уоченог поступка. Тако, на пример, поступку C одговара функција $T(t, \epsilon) = \epsilon t$, а $Borel$ -овом поступку функција $T(t, \epsilon) = \epsilon \sqrt{t}$.

Према томе можемо извршити поделу поступака збирљивости на класе, тако да истој класи припадају сви они поступци који имају исту функцију $T(t, \epsilon)$.

Функција $T(t, \epsilon)$ стоји у вези са питањем инверзије посматраног поступка збирљивости. Инверзне теореме дају услове (услове конвергенције) које мора да задовољава функција да бисмо могли закључити њезину конвергенцију, знајући да је она збирљива дотичним поступком. У сваком случају ти услови зависе од самог поступка о коме је реч. Један врло општи облик услова конвергенције јесте

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq \tau \leq t+T(t, \epsilon)} \{A(\tau) - A(t)\} \geq -w(\epsilon) \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Од нарочитог су интереса они поступци збирљивости који зависе од неког параметра θ , али тако да различитим вредностима параметра одговарају различите функције $T(t, \epsilon)$, тј. различите дужине размака конвергенције. Такав је на пример $Valiron$ -ов поступак [13] (специјалан случај) дефинисан са

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} x^\theta} \int_0^\infty \exp \left\{ - \left(\frac{t-x}{x^{\theta/2}} \right)^2 \right\} A(t) dt$$

коме одговара функција $T(t, \epsilon) = \epsilon t^{\theta/2}$.

$Valiron$ -ов поступак има, између осталог, примена у теорији збирљивости обичних $Fourier$ -ових редова, али до сада није успело да се он примени у теорији збирљивости генералисаних $Fourier$ -ових редова.

Овде ћемо специјално испитивати један поступак збирљивости који зависи од параметра θ , тако да једној вредности параметра одговара један размак конвергенције. Овај поступак може се са успехом примењивати на проблеме збирљивости генералисаних Fourier-ових редова [2]. Њему одговара једна троугласта матрица, а дефинисан је са

$$G_{\theta}^{\kappa}(\mu, x) = \sum_{\mu_n \leq x} (1 - e^{(\mu_n - x)x^{-\theta}})^{\kappa} a_n, \quad (0.1)$$

$$(0 \leq \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty),$$

где је $0 < \theta < 1$ и $\kappa > 0$.

Дефиниција 1.— Ако $G_{\theta}^{\kappa}(\mu, x) \rightarrow A$, $x \rightarrow \infty$, онда кажемо да је ред $\sum a_n$ збирљив поступком G_{θ}^{κ} ка суми A , што означавамо са

$$\sum a_n = A (G_{\theta}^{\kappa}).$$

Општије овај поступак можемо дефинисати преко Stieltjes-ова интеграла са

$$G_{\theta}^{\kappa}(x) = \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa} d\{A(t)\}, \quad (0.2)$$

при чему је $A(t)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку. Не ограничавајући општост, можемо узети да је $A(0) = 0$ и у том случају израз (0.2) може се написати у облику

$$G_{\theta}^{\kappa}(x) = \frac{\kappa}{x^{\theta}} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt. \quad (0.2')$$

Израз (0.1) је специјалан случај изрази (0.2) кад у овом за $A(t)$ узмемо степенасту функцију.

Дефиниција 2.— Ако $G_{\theta}^{\kappa}(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow \infty$, онда кажемо да је функција $A(t)$ збирљива поступком G_{θ}^{κ} ка суми A , што означавамо са

$$A(x) \rightarrow A (G_{\theta}^{\kappa}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Овај поступак, слично Valiron-овом, има особину да у односу на θ претставља један непрекидан низ међусобно битно различитих поступака, тако да сваком θ одговара услов конвергенције облика $a_n = o(\mu_n^{-\theta})$ и размак конвергенције облика $(t, T) \equiv (t, t + \varepsilon t^{\theta})$, ма какав био позитивни број ε . Међутим, поступак G_{θ}^{κ} има једно преимућство над Valiron-овим, што је дефинисан троугластом матрицом.

У вези с овим поступком поставља се велики број питања од којих ћемо се у овом раду бавити следећим:

У глави I доказаћемо једну „директну“ теорему, или теорему Abel-ове природе, тј. такву теорему која даје гранична својства поступка збирљивости кад се знају одговарајућа гранична својства функције. Ту теорему доказаћемо под претпоставком да је

$$A(t) \sim t^{\beta} e^{\lambda t^{\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где је $\beta > -1$, $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$.

У глави II бавићемо се једном врстом интермедијерне теореме у којој се на основу тога, што Riesz ова средина $\sigma^k(x)$ тежи одређеном брзином граничној вредности, закључује да $G_{\theta}^*(x)$ тежи тој истој граници за све $x > k$, где је k позитиван цео број. У овој глави доказана је и лема 2.1 која ће нам заједно са овом теоремом бити потребна у глави VI при доказивању теореме 6.1.

У глави III бавићемо се упоређивањем збирљивости G_{θ}^* за разне вредности θ . Наиме, ако функције $A(x)$ и $G_{\theta}^*(x)$ задовољавају извесне услове типа „O“ или „o“, онда и функција $G_r^*(x)$ ($0 < r < \kappa$) задовољава један такав услов о чему говори теорема 3.1, која је доказана под једном доста специјалном претпоставком.

У глави IV доказаћемо лему 4.1 у којој се из $A(x) \rightarrow A(G_{\theta}^*)$, $x \rightarrow \infty$, а уз претпоставку $A(t) = O(1)$, закључује да је $A(x^b)$ ($b = (1-\theta)^{-1}$) збирљиво ка A поступком $\tilde{G}_{\theta}^*$ чије је језгро Wiener-ово. Ову лему користићемо у глави V при доказивању инверзне теореме поступка G_{θ}^* . Користећи ову лему на основу Wiener-ове теореме доказаћемо теорему инклузије 4.1 која у ствари није теорема праве инклузије због учињене претпоставке о функцији $A(t)$ ($A(t) = O(1)$).

У глави V бавићемо се питањем инверзије поступка G_{θ}^* . Наиме, из чињенице да $G_{\theta}^*(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow \infty$, а уз претпоставку да функција $A(t)$ задовољава услов конвергенције

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq \tau \leq t + \varepsilon t^{\theta}} \{A(\tau) - A(t)\} \geq -w(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (0.3)$$

следи

$$A(t) \rightarrow A, \quad t \rightarrow \infty.$$

Овај доказ изведен је у три етапе. У првој етапи (теорема 5.2) доказује се да из услова

$$\min_{t \leq \tau \leq T} \{A(\tau) - A(t)\} > -m, \quad \alpha(T) = \lambda \alpha(t),$$

где је

$$\alpha(t) = e^{t^{1-\theta}}, \quad \lambda > 1$$

(који је садржан у услову (0.3)) и из $G_{\theta}^{\lambda}(x) = O(1)$, $x \rightarrow \infty$ следи $A(t) = O(1)$, $t \rightarrow \infty$. У другој етапи, користећи лему 4.1 и на основу Wiener-ове теореме бирајући једно специјално језгро, закључујемо да

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} A(t) dt \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty. \quad (0.4)$$

У трећој етапи из (0.3) и (0.4) закључујемо конвергенцију функције $A(t)$.

На крају, у глави VI бавићемо се применом поступка G_{θ}^{λ} на проблеме збирљивости генералисаних Fourier-ових редова. Теорема 6.1, која је изложена у овој глави, претставља под извесним специјалним условима једно пооштрење теореме В. Г. Авакумовића [2]. Доказ те теореме изведен је применом теореме 2.1, леме 2.1 и једне од Левитанових процена [9] брзине којом Riesz-ове средине генералисаног Fourier-овог реда функције $f(\Pi)$ по ортонормираним сопственим функцијама једног диференцијалног задатка са граничним условом теже својој граничној вредности.

ГЛАВА I

У овој глави доказаћемо једну теорему Abel-ове природе за поступак G_{θ}^{λ} .

ТЕОРЕМА 1.1. *Претпоставке:* (i) $0 < \alpha \leq 1 - \theta$, $\beta > -1$, $\lambda > 0$.
(ii) $A(t)$ је функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и

$$A(t) \sim \varphi(t) = t^{\beta} e^{\lambda t^{\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Тврђење:

$$\frac{G_{\theta}^{\lambda}(x)}{\varphi(x)} \rightarrow C(\lambda, \alpha), \quad x \rightarrow \infty$$

где је

$$C(\lambda, \alpha) = \begin{cases} x \int_0^{\infty} (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-(1+\lambda\alpha)\xi} d\xi, & \text{за } \alpha = 1 - \theta \\ 1, & \text{за } \alpha < 1 - \theta. \end{cases}$$

Доказ: Ставимо

$$\frac{G_{\theta}^{\lambda}(x)}{\varphi(x)} = \frac{x}{x^{\theta}} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{\varphi(t)}{\varphi(x)} \left\{ \frac{A(t)}{\varphi(t)} \right\} dt,$$

при чему на основу претпоставке (ii)

$$\frac{A(t)}{\varphi(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Према томе, тврђење ове теореме биће доказано ако докажемо да је поступак

$$\frac{x}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{\varphi(t)}{\varphi(x)} B(t) dt,$$

примењен на функцију $B(t) = A(t)/\varphi(t)$, регуларан у смислу теорије збирљивости, тј. да овако дефинисан поступак задовољава услове Тоерплитц-Штур-ове теореме*.

Ставимо ли

$$K(t, x) = \begin{cases} \frac{x}{x^\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta e^{-\lambda(x^\alpha - t^\alpha)}, & \text{за } 0 \leq t \leq x \\ 0, & \text{за } t > x \end{cases}$$

(тако да је

$$\frac{G_\theta^*(x)}{\varphi(x)} = \int_0^\infty K(t, x) B(t) dt,$$

* Као што је познато [5], та теорема гласи: Нека је

$$F(x) = \int_0^\infty K(t, x) B(t) dt.$$

Да би из

$$B(t) \rightarrow B, \quad t \rightarrow \infty,$$

следило

$$F(x) \rightarrow BC, \quad x \rightarrow \infty$$

за сваку функцију $B(t)$ ограничене варијације, довољно је да буде

$$\int_0^\infty |K(t, x)| dt < H, \quad \text{где } H \text{ не зависи од } x,$$

затим да

$$\int_0^T |K(t, x)| dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{за свако коначно } T,$$

и да

$$\int_0^\infty K(t, x) dt \rightarrow C, \quad x \rightarrow \infty.$$

онда, будући да је језгро $K(t, x) \geq 0$, треба да докажемо да

$$\int_0^T K(t, x) dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{за свако коначно } T \quad (1.1)$$

и да

$$\int_0^\infty K(t, x) dt \rightarrow C, \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Услов (1.1) је очевидно испуњен, па треба само да покажемо да је испуњен и услов (1.2). Учинимо ли у интегралу

$$\int_0^\infty K(t, x) dt = \frac{x}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{-(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{-(t-x)x^{-\theta}} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta e^{-\lambda(x^\alpha - t^\alpha)} dt$$

смену $x^{-\theta}(t-x) = -\xi$, добићемо

$$\int_0^\infty k(\xi, x) d\xi = x \int_0^{x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} (1 - x^{\theta-1}\xi)^\beta e^{-\lambda E(\xi, x)} d\xi \quad (1.3)$$

где је

$$E(\xi, x) = x^\alpha \{1 - (1 - x^{\theta-1}\xi)^\alpha\} = \alpha x^{\alpha-(1-\theta)} \xi + O(x^{\alpha-2(1-\theta)} \xi^2) \geq 0.$$

1) Ако је $\beta \geq 0$, онда је $(1 - x^{\theta-1}\xi)^\beta \leq 1$, па је

$$x (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} (1 - x^{\theta-1}\xi)^\beta e^{-\lambda E(\xi, x)} \leq x (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} \in L(0, \infty).$$

На основу познате Lebesgue-ове теореме можемо тада у интегралу (1.3) прелаз $x \rightarrow \infty$ испред знака интеграла заменити истим прелазом иза знака интеграла, па тако у том случају добијамо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^{x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} (1 - x^{\theta-1}\xi)^\beta e^{-\lambda \alpha x^{\alpha-(1-\theta)} \xi + O(x^{\alpha-2(1-\theta)} \xi^2)} d\xi$$

$$= \begin{cases} x \int_0^\infty (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-(1+\lambda\alpha)\xi} d\xi, & \text{за } \alpha = 1 - \theta \\ x \int_0^\infty (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} d\xi = 1, & \text{за } \alpha < 1 - \theta. \end{cases}$$

2) Ако је $-1 < \beta < 0$, онда ћемо ставити

$$\int_0^{\infty} k(\xi, x) d\xi = \kappa \int_0^{\delta x^{1-\theta}} + \kappa \int_{\delta x^{1-\theta}}^{x^{1-\theta}} = J_1 + J_2 \quad (1.4)$$

где је $0 < \delta < 1$.

Најпре ћемо проценити интеграл

$$J_2 = \kappa \int_{\delta x^{1-\theta}}^{x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{\kappa-1} e^{-\xi} (1 - x^{\theta-1} \xi)^{\beta} e^{-\lambda E(\xi, x)} d\xi.$$

Како је овде $e^{-\lambda E(\xi, x)} < 1$, то је

$$J_2 < \kappa \int_{\delta x^{1-\theta}}^{x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{\kappa-1} e^{-\xi} (1 - x^{\theta-1} \xi)^{\beta} d\xi.$$

Извршимо ли замену $\xi = x^{1-\theta} \cdot u$ у интегралу на десној страни ове неједначине, добићемо

$$\begin{aligned} J_2 &< \kappa x^{1-\theta} \int_{\delta}^1 (1 - e^{-ux^{1-\theta}})^{\kappa-1} e^{-ux^{1-\theta}} (1-u)^{\beta} du \leq \\ &< \kappa \frac{x^{1-\theta}}{e^{\delta x^{1-\theta}}} \int_{\delta}^1 (1 - e^{-ux^{1-\theta}})^{\kappa-1} (1-u)^{\beta} du. \end{aligned}$$

Како је за $\kappa \geq 1$, $(1 - e^{-ux^{1-\theta}})^{\kappa-1} \leq 1$, а за $0 < \kappa < 1$

$$(1 - e^{-ux^{1-\theta}})^{\kappa-1} \leq \frac{1}{(1 - e^{-\delta x^{1-\theta}})^{1-\kappa}} \leq K, \text{ за све } x \geq x_0 > 0,$$

то је

$$0 < J_2 < \kappa K \frac{x^{1-\theta}}{e^{\delta x^{1-\theta}}} \int_{\delta}^1 (1-u)^{\beta} du = \kappa K \frac{(1-\delta)^{1+\beta}}{1+\beta} \frac{x^{1-\theta}}{e^{\delta x^{1-\theta}}},$$

тј.

$$J_2 = o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Посматрајмо сада интеграл

$$J_1 = \kappa \int_0^{\delta x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{\kappa-1} e^{-\xi} (1 - x^{\theta-1} \xi)^{\beta} e^{-\lambda E(\xi, x)} d\xi.$$

Пошто функција $(1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta}$ монотono расте, то је

$$(1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta} \leq (1-\delta)^{\beta}, \text{ за све } 0 \leq \xi \leq \delta x^{1-\theta}$$

и с обзиром на то да је

$$e^{-\lambda E(\xi, x)} \leq 1$$

следи

$$\begin{aligned} x(1-e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} (1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta} e^{-\lambda E(\xi, x)} &\leq \\ &\leq x(1-\delta)^{\beta} (1-e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} \in L(0, \infty). \end{aligned} \quad (1.6)$$

На основу (1.4), (1.5) и (1.6), а применом Lebesgue-ове теореме добивамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^{x^{1-\theta}} (1-e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} (1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta} e^{-\lambda \alpha x^{\alpha-(1-\theta)}\xi} + O(x^{\alpha-2(1-\theta)}\xi^2) d\xi \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^{\delta x^{1-\theta}} (1-e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} (1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta} \cdot \\ \cdot e^{-\lambda \alpha x^{\alpha-(1-\theta)}\xi} + O(x^{\alpha-2(1-\theta)}\xi^2) d\xi + o(1) \\ = \begin{cases} x \int_0^{\infty} (1-e^{-\xi})^{x-1} e^{-(1+\lambda \alpha)\xi} d\xi, & \text{за } \alpha = 1-\theta, \\ x \int_0^{\infty} (1-e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} d\xi = 1, & \text{за } \alpha < 1-\theta, \end{cases} \end{aligned}$$

чиме је теорема 1.1 доказана.

ГЛАВА II

У овој глави изложићемо теорему која даје једну везу између Riesz-овог и G_0^* поступка збирљивости. Показаћемо да из чињенице, кад Riesz-ова средина једне функције тежи граничној вредности одређеном брзином, следи да је та функција збирљива поступком G_0^* ка истој тој вредности. У ту сврху са $\sigma^k(x)$ означимо Riesz-ову средину реда k . Riesz-ов збир реда k

$$x^k \sigma^k(x) = k \int_0^x (x-t)^{k-1} A(t) dt, \quad (A(0) = 0) \quad (2.1)$$

је непрекидна функција, ако је $k > 0$, и диференцијабилна са непрекидним изводима, ако је $k > 1$ [4].

ТЕОРЕМА 2.1. Из

$$\sigma^k(x) = A + o(x^{k(\theta-1)}), \quad x \rightarrow \infty$$

слиди

$$G_{\theta}^x(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty$$

за свако $x > k$, где је k цео позитиван број.

Доказ. Без ограничења општости можемо узети да је $A = 0$. Диференцирањем израза (2.1) добијамо

$$\frac{d}{dx} \{x^k \sigma^k(x)\} = k(k-1) \int_0^x (x-t)^{k-2} A(t) dt,$$

.....

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \{x^k \sigma^k(x)\} = k! \int_0^x A(t) dt,$$

$$\frac{d^k}{dx^k} \{x^k \sigma^k(x)\} = k! A(x).$$

Из ове последње једначине имамо да је

$$A(x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \{x^k \sigma^k(x)\}. \quad (2.2)$$

Применимо на ову функцију поступак G_{θ}^x :

$$G_{\theta}^x(x) = \frac{x}{k! x^{\theta}} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{d^k}{dt^k} \{t^k \sigma^k(t)\} dt. \quad (2.3)$$

Парцијалном интеграцијом добијамо

$$\begin{aligned} G_{\theta}^x(x) &= \frac{x}{k! x^{\theta}} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \{t^k \sigma^k(t)\} \Big|_0^x - \\ &- \frac{x}{k! x^{\theta}} \int_0^x \frac{d}{dt} \{(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \{t^k \sigma^k(t)\} dt. \end{aligned}$$

С обзиром на то да је $x > k$ и да је

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \{t^k \sigma^k(t)\} = k! \int_0^t A(\tau) d\tau$$

следи

$$G_{\theta}^x(x) = -\frac{x}{k! x^{\theta}} \int_0^x \frac{d}{dt} \{(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \{t^k \sigma^k(t)\} dt.$$

Уопште, ако десну страну (2.3) k -пута парцијално интегришемо, добићемо

$$G_{\theta}^x(x) = \frac{(-1)^k x}{k! x^{\theta}} \int_0^x \frac{d^k}{dt^k} \{(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\} t^k \sigma^k(t) dt. \quad (2.4)$$

Ставимо

$$\sigma^k(x) = \varepsilon(x) \cdot x^{-\alpha}, \quad (0 < \alpha < k)$$

где

$$\varepsilon(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Уврстимо ли овај израз за $\sigma^k(x)$ у (2.4), имаћемо

$$\begin{aligned} G_{\theta}^x(x) &= \frac{(-1)^k x}{k! x^{\theta}} \int_0^x \frac{d^k}{dt^k} \{(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\} \varepsilon(t) t^{k-\alpha} dt \\ &= (-1)^k \cdot I \end{aligned} \quad (2.5)$$

Сада ћемо испитати како се понаша интеграл I кад $x \rightarrow \infty$. Узастопни изводи функције

$$z = (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}$$

имају облик

$$\frac{d^v z}{dt^v} = \frac{1}{x^{\nu\theta}} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-(\nu+1)} e^{(t-x)x^{-\theta}} P_{\nu}(e^{(t-x)x^{-\theta}}),$$

где је P_{ν} полином степена ν по аргументу $e^{(t-x)x^{-\theta}}$.

Нуле овог полинома по аргументу $e^{(t-x)x^{-\theta}}$ не зависе од x , већ само од x , а за оне вредности $t = t_{\mu}^{(\nu)}$ за које се он анулира, важи асимптотска релација

$$t_{\mu}^{(\nu)} = x - x^{\theta} K_{\mu}^{(\nu)}(x) \sim x, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Нека полином P_k има m нула $t_\mu^{(k)}$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) у размаку $(0, x)$. Према томе функција $z^{(k)}(t)$ имаће сталан знак у сваком размаку

$$t_\mu^{(k)} < t < t_{\mu+1}^{(k)}, \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, m), \text{ где је } t_0^{(k)} = 0 \text{ и } t_{m+1}^{(k)} = x.$$

Ту особину функције $z^{(k)}(t)$ и асимптотску релацију

$$t_\mu^{(k)} \sim x, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

користићемо при процени интеграла I који ћемо написати у облику

$$\begin{aligned} I &= \frac{x}{k! x^\theta} \left(\int_0^N + \int_N^{t_1^{(k)}} + \int_{t_1^{(k)}}^{t_2^{(k)}} + \dots + \int_{t_{\mu-1}^{(k)}}^{t_\mu^{(k)}} + \dots + \int_{t_{m-1}^{(k)}}^{t_m^{(k)}} + \int_{t_m^{(k)}}^x \right) \\ &= H_0 + H_1 + H_2 + \dots + H_\mu + \dots + H_m + H_{m+1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

У размаку $(0, N)$ је $|e(t)| \leq C_0$, па је

$$|H_0| \leq \frac{C_0 x}{k! x^\theta} \int_0^N \left| \frac{d^k}{dt^k} \{ (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \} \right| t^{k-\alpha} dt.$$

Ако је у овом размаку $z^{(k)}(t) > 0$, онда у њему функција $z^{(k-1)}(t)$ расте, па је

$$\begin{aligned} |H_0| &\leq \frac{C_0 x N^{k-\alpha}}{k! x^\theta} \int_0^N \frac{d^k}{dt^k} \{ (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \} dt = \\ &\leq \frac{C_0 x N^{k-\alpha}}{k! x^\theta} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \{ (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \} \Big|_0^N = \\ &\leq \frac{C_0 x N^{k-\alpha}}{k! x^\theta} \frac{1}{x^{(k-1)\theta}} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-k} e^{(t-x)x^{-\theta}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$P_{k-1} (e^{(t-x)x^{-\theta}}) \Big|_0^N \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Иста ствар је и у случају кад би у том размаку било $z^{(k)}(t) < 0$, тј. кад би у њему функција $z^{(k-1)}(t)$ опадала.

Посматрајмо сада интеграл H_1 . У размаку $(N, t_1^{(k)})$ је $|e(t)| \leq \delta_1(N)$. Пошто смо у интегралу H_0 узели да је $z^{(k)}(t) > 0$, то је

онда и овде $z^{(k)}(t) > 0$, јер је $t_1^{(k)}$ прва по реду тачка где $z^{(k)}(t)$ мења знак, па према томе имамо да је

$$\begin{aligned}
 |H_1| &\leq \frac{x}{k! x^\theta} \int_N^{t_1^{(k)}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \{ (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \} \right| \cdot |\varepsilon(t)| t^{k-\alpha} dt \\
 &\leq \frac{x \delta_1(N)}{k! x^\theta} x^{k-\alpha} \int_N^{t_1^{(k)}} \frac{d^k}{dt^k} \{ (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \} dt = \\
 &\leq \frac{x \delta_1(N)}{k!} x^{k-\alpha-k\theta} \left\{ \left(1 - e^{(t_1^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right)^{x-k} e^{(t_1^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right. \\
 &\quad \cdot P_{k-1} \left(e^{(t_1^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right) - \left(1 - e^{(N-x)x^{-\theta}} \right)^{x-k} e^{(N-x)x^{-\theta}} P_{k-1} \left(e^{(N-x)x^{-\theta}} \right) \Big\} = \\
 &\leq C_1(x, k) \delta_1(N) x^{k-\alpha-k\theta}, \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

јер $e^{(t_1^{(k)}-x)x^{-\theta}}$ не зависи од x .

Посматрајмо сада, уопште, интеграл H_μ . У размаку $(t_{\mu-1}^{(k)}, t_\mu^{(k)})$ је $|\varepsilon(t)| \leq \delta_\mu(N)$, и нека је у њему $z^{(k)}(t) > 0$, тј. нека ту функција $z^{(k-1)}(t)$ расте. Тада је

$$\begin{aligned}
 |H_\mu| &\leq \frac{x \delta_\mu(N)}{k! x^\theta} x^{k-\alpha} \int_{t_{\mu-1}^{(k)}}^{t_\mu^{(k)}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \{ (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \} \right| dt = \\
 &\leq \frac{x \delta_\mu(N)}{k!} x^{k-\alpha-k\theta} \left\{ \left(1 - e^{(t_\mu^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right)^{x-1} e^{(t_\mu^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right. \\
 &\quad \cdot P_{k-1} \left(e^{(t_\mu^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right) - \\
 &\quad \left. - \left(1 - e^{(t_{\mu-1}^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right)^{x-1} e^{(t_{\mu-1}^{(k)}-x)x^{-\theta}} P_{k-1} \left(e^{(t_{\mu-1}^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Пошто $e^{(t_\mu^{(k)}-x)x^{-\theta}}$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) не зависи од x , то је

$$|H_\mu| \leq C_\mu(x, k) \delta_\mu(N) x^{k-\alpha-k\theta}, \quad (\mu = 2, 3, \dots, m) \tag{2.10}$$

До истог закључка долазимо и у случају ако је у размаку $(t_{\mu-1}^{(k)}, t_\mu^{(k)})$ $z^{(k)}(t) < 0$.

На крају посматрајмо интеграл H_{m+1} . У размаку $(t_m^{(k)}, x)$ је $|\varepsilon(t)| \leq \delta_{m+1}(N)$, а $z^{(k)}(t)$ је сталног знака, рецимо да је $z^{(k)}(t) > 0$.

У том случају функција $z^{(k-1)}(t)$ расте у овом размаку, а како је $z^{(k-1)}(x) = 0$, то је она у њему негативна. Према томе је

$$\begin{aligned} |H_{m+1}| &\leq \frac{x}{k! x^\theta} \int_{t_m^{(k)}}^x \left| \frac{d^k}{dt^k} \left\{ (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \right\} \right| \varepsilon(t) t^{k-\alpha} dt \leq \\ &\leq \frac{x}{k! x^\theta} \delta_{m+1}(N) x^{k-\alpha} \int_{t_m^{(k)}}^x \frac{d^k}{dt^k} \left\{ (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \right\} dt = \\ &\leq \frac{x \delta_{m+1}(N)}{k!} x^{k-\alpha-k\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-k} e^{(t-x)x^{-\theta}} \cdot \\ &\quad \cdot P_{k-1}(e^{(t-x)x^{-\theta}}) \Big|_{t_m^{(k)}}^x = - \frac{x \delta_{m+1}(N)}{k!} x^{k-\alpha-k\theta} \\ &\quad \cdot \left\{ \left(1 - e^{(t_m^{(k)}-x)x^{-\theta}} \right)^{x-k} e^{(t_m^{(k)}-x)x^{-\theta}} P_{k-1}\left(e^{(t_m^{(k)}-x)x^{-\theta}}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Израз у великој загради не зависи од x и негативан је, јер је у посматраном размаку $z^{(k-1)}(t) < 0$. На основу тога добијамо

$$|H_{m+1}| \leq C_{m+1}(x, k) \delta_{m+1}(N) x^{k-\alpha-k\theta}. \quad (2.11)$$

До истог закључка долазимо и у случају кад је $z^{(k)}(t) < 0$, у размаку $(t_m^{(k)}, x)$.

Како је

$$G_\theta^x(x) = (-1)^k I$$

и пошто можемо изабрати N тако да буде

$$\delta_\mu(N) \leq \delta(N), \quad (\mu = 1, 2, \dots, m+1),$$

то с обзиром на неједначине (2.8), (2.9), (2.10) и (2.11) добијамо

$$\left| \frac{G_\theta^x(x)}{x^{k-\alpha-k\theta}} \right| \leq \frac{o(1)}{x^{k-\alpha-k\theta}} + C(x, k) \delta(N)$$

где је

$$C(x, k) = \sum_{\mu=1}^{m+1} C_\mu(x, k).$$

Дакле, за $k - \alpha - k\theta \geq 0$ је

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{G_\theta^x(x)}{x^{k-\alpha-k\theta}} \right| \leq C(x, k) \delta(N).$$

Пошто је $t_n^{(k)} \sim x$, $x \rightarrow \infty$ ($n = 1, 2, \dots, m$), то можемо бирати N произвољно велико, тако да $\delta(N) \rightarrow 0$, па је

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{G_{\varepsilon}^x(x)}{x^{k-\alpha-k\theta}} \right| = 0,$$

а одатле за $\alpha = k(1-\theta)$ излази

$$G_{\theta}^x(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

чиме је теорема 2.1 доказана.

Б) Посматраћемо сада случај кад позитивно k није цео број. У ту сврху претходно ћемо доказати следећу лему:

ЛЕМА 2.1 — Из

$$\sigma^k(x) = o(x^{-\alpha}), \quad x \rightarrow \infty$$

слиди

$$\sigma^{k'}(x) = o(x^{-\alpha}), \quad x \rightarrow \infty$$

где је $0 < k < k'$, $0 < \alpha < 1 + k$.

Доказ. Дакле, треба да докажемо да из

$$x^{\alpha} \sigma^k(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

слиди

$$x^{\alpha} \sigma^{k'}(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

за $0 < k < k'$, $0 < \alpha < 1 + k$.

У ту сврху искористићемо везу између Riesz-ових збирова различитих редова [4]

$$A^{k+l}(x) = \frac{\Gamma(k+l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l)} \int_0^x (x-t)^{l-1} A^k(t) dt,$$

где је $k > 0$ и $l > 0$. За $k+l = k'$ имамо

$$A^{k'}(x) = x^{k'} \sigma^{k'}(x) = \frac{\Gamma(k'+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k'-k)} \int_0^x (x-t)^{k'-k-1} A^k(t) dt,$$

тј.

$$\sigma^{k'}(x) = \frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'} \Gamma(k+1) \Gamma(k'-k)} \int_0^x (x-t)^{k'-k-1} A^k(t) dt$$

ОДНОСНО

$$\begin{aligned} x^\alpha \sigma^{k'}(x) &= x^\alpha \frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'} \Gamma(k+1) \Gamma(k'-k)} \int_0^x (x-t)^{k'-k-1} t^k \sigma^k(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'-\alpha} \Gamma(k+1) \Gamma(k'-k)} \int_0^x (x-t)^{k'-k-1} t^{k-\alpha} \{t^\alpha \sigma^k(t)\} dt \quad (2.12) \end{aligned}$$

Да бисмо доказали ову лему треба само да покажемо да је поступак збирљивости (2.12), примењен на функцију $t^\alpha \sigma^k(t)$, регуларан. Језгро овог поступка дефинисано је са

$$K(t, x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'-\alpha} \Gamma(k+1) \Gamma(k'-k)} (x-t)^{k'-k-1} t^{k-\alpha}, & \text{за } 0 \leq t \leq x \\ 0, & \text{за } t > x. \end{cases}$$

Пошто је $K(t, x) \geq 0$, то треба само да видимо да ли је задовољен други и трећи услов Toeplitz-Schur-ове теореме [5]. Други је очевидно задовољен, па остаје само да проверимо да ли је задовољен и трећи, тј. да испитамо интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K(t, x) dt &= \frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'-\alpha} \Gamma(k+1) \Gamma(k'-k)} \int_0^x (x-t)^{k'-k-1} t^{k-\alpha} dt = \\ &= \frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'-\alpha} \Gamma(k+1) \Gamma(k'-k)} J. \end{aligned}$$

У интегралу J извршићемо замену $t = xu$, па ћемо добити

$$J = x^{k'-\alpha} \int_0^1 u^{(k-\alpha+1)-1} (1-u)^{(k'-k)-1} du.$$

Пошто је $k'-k > 0$ и $k-\alpha+1 > 0$ (јер је $0 < \alpha < 1+k$), то је

$$J = x^{k'-\alpha} B(k-\alpha+1, k'-k) = \frac{x^{k'-\alpha} \Gamma(k-\alpha+1) \Gamma(k'-k)}{\Gamma(k'-\alpha+1)},$$

па је

$$\int_0^\infty K(t, x) dt = \frac{\Gamma(k'+1) \Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(k'-\alpha+1)} = C(k, k', \alpha),$$

чиме је лема 2.1 доказана.

ТЕОРЕМА 2.2 — Нека позитивно k није цео број и нека је

$$\theta' = 1 + \frac{(\theta - 1)k}{[k] + 1}.$$

Из

$$\sigma^k(x) = o\{x^{k(\theta-1)}\}, \quad x \rightarrow \infty$$

следи

$$G_{\theta'}^x(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{за све } x > [k] + 1.$$

Доказ: На основу леме 2.1 из

$$\sigma^k(x) = o\{x^{k(\theta-1)}\}, \quad x \rightarrow \infty$$

следи

$$\sigma^{[k]+1}(x) = o\{x^{k(\theta-1)}\} = o\{x^{([k]+1)(\theta'-1)}\}. \quad (2.13)$$

Пошто је $[k] + 1$ цео позитиван број, то из (2.13) на основу теореме 2.1 излази

$$G_{\theta'}^x(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{за све } x > [k] + 1,$$

чиме је теорема 2.2 доказана.

ГЛАВА III

Као што је познато М. Riesz [4] је доказао једну тако звану „convexity“ теорему за свој поступак збирљивости. Наиме, ако Riesz-ов збир k -тог реда $A^k(x)$ и функција $A(x)$ задовољавају извесне услове типа „О“ или „о“, онда и Riesz-ов збир $A^r(x)$ ($0 < r < k$) задовољава један такав услов који је повезан са условима које задовољавају $A^k(x)$ и $A(x)$.

Овде ћемо доказати једну „convexity“ теорему која се односи на G_{θ}^x поступак збирљивости. То је доста специјална теорема јер поред услова типа „О“ односно „о“ што их задовољавају функције $G_{\theta}^x(x)$ и $A(x)$, увели смо и претпоставку (3.1) која ограничава општост теореме.

У следећем излагању $G_{\theta}^x(A; x)$ значи да је поступак G_{θ}^x примењен на функцију A .

ТЕОРЕМА 3.1. Нека су $U(x)$, $V(x)$ и $W(x)$ позитивне неоппадајуће функције, дефинисане за $x > 0$. Нека је $U(x) < V(x)$, а

$$G_{\theta}^x(U; x) \leq C_0 |G_{\theta}^x(A; x)|. \quad (3.1)$$

Тада

(i) Из

$$-U(x) \leq A(x) \leq V(x) \quad (3.2)$$

и

$$|G_{\theta}^x(A; x)| \leq W(x) \quad (3.3)$$

следи

$$|G_{\theta}^r(A; x)| \leq C \{V(x)\}^{1-\frac{r}{x}} \{W(x)\}^{\frac{r}{x}}, \text{ за свако } 0 < r < x.$$

(ii) Из

$$-U(x) \leq A(x) = o\{V(x)\} \quad (3.4)$$

и

$$|G_{\theta}^x(A; x)| \leq W(x)$$

следи

$$G_{\theta}^r(A; x) = o\left(\{V(x)\}^{1-\frac{r}{x}} \{W(x)\}^{\frac{r}{x}}\right), \text{ за свако } 0 < r < x.$$

(iii) Из

$$-U(x) \leq A(x) \leq V(x)$$

и

$$G_{\theta}^x(A; x) = o\{W(x)\} \quad (3.5)$$

следи

$$G_{\theta}^r(A; x) = o\left(\{V(x)\}^{1-\frac{r}{x}} \{W(x)\}^{\frac{r}{x}}\right), \text{ за свако } 0 < r < x.$$

Примедба: Претпоставка $-U(x) \leq A(x) \leq V(x)$,
 $U(x) < V(x)$, тј. $|A(x)| \leq V(x)$ имплицира $|G_{\theta}^r(A; x)| \leq V(x) \cdot$
 $\cdot (1 - e^{-x^{1-\theta}})^r$, јер је

$$\begin{aligned} |G_{\theta}^r(A; x)| &\leq \frac{r}{x^{\theta}} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} |A(t)| dt \leq \\ &\leq V(x) (1 - e^{-x^{1-\theta}})^r. \end{aligned}$$

Доказ тврђења (i) — Ставимо

$$\begin{aligned} G_{\theta}^r(A; x) &= \frac{r}{x^{\theta}} \int_0^{\xi} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt + \\ &+ \frac{r}{x^{\theta}} \int_{\xi}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt = \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

и

$$1 - e^{(\xi-x)x^{-\theta}} = \phi(x). \quad (3.7)$$

Касније ћемо функцију $\Phi(x)$ погодно одредити помоћу $V(x)$ и $W(x)$, претпостављајући да увек можемо одредити $\xi > 0$ једначином (3.7).

Интеграл J_1 написаћемо у облику

$$J_1 = \frac{r}{x^\theta} \int_0^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt.$$

Пошто је $0 < r < x$ и $0 \leq t \leq \xi < x$, то је функција $(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-x}$ позитивна и монотонно расте, па према другој теорему о средњој вредности интеграла имамо

$$J_1 = \frac{r}{x^\theta} \{\Phi(x)\}^{r-x} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt, \quad 0 \leq u \leq \xi.$$

Овај последњи интеграл написаћемо у облику

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} \frac{x}{x^\theta} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{A(t) + U(t)\} dt - \\ &\quad - \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} \frac{x}{x^\theta} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} U(t) dt, \end{aligned}$$

одакле излази

$$J_1 \leq \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} \frac{x}{x^\theta} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{A(t) + U(t)\} dt.$$

Пошто је $A(t) + U(t) \geq 0$, то је

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} \frac{x}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{A(t) + U(t)\} dt = \\ &\leq \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} \frac{x}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt + \\ &\quad + \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} \frac{x}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} U(t) dt = \\ &\leq \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} G_\theta^x(A; x) + \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} G_\theta^x(U; x). \end{aligned}$$

С обзиром на претпоставку (3.1) имамо

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} |G_0^x(A; x)| + C_0 \frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} |G_0^x(A; x)| \leq \\ &\leq C_1 \{\Phi(x)\}^{r-x} |G_0^x(A; x)|, \end{aligned}$$

где је $C_1 = (1 + C_0)r/x$. На основу претпоставке (3.3) следи

$$J_1 \leq C_1 \{\Phi(x)\}^{r-x} W(x). \quad (3.8)$$

Са друге стране је

$$\begin{aligned} J_1 &\geq -\frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} \frac{x}{x^\theta} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} U(t) dt = \\ &\geq -\frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} \frac{x}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} U(t) dt \geq \\ &\geq -\frac{r}{x} \{\Phi(x)\}^{r-x} C_0 |G_0^x(A; x)|. \end{aligned}$$

С обзиром на (3.3) добивамо

$$J_1 \geq -C_2 \{\Phi(x)\}^{r-x} W(x), \quad (C_2 = C_0 r/x). \quad (3.9)$$

Пошто је $C_2 < C_1$, то на основу (3.8) и (3.9) излази

$$|J_1| \leq C_1 \{\Phi(x)\}^{r-x} W(x). \quad (3.10)$$

Сада ћемо проценити интеграл J_2 .

$$\begin{aligned} |J_2| &= \left| \frac{r}{x^\theta} \int_\xi^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{r}{x^\theta} \int_\xi^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} |A(t)| dt \leq \\ &\leq V(x) \frac{r}{x^\theta} \int_\xi^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} dt = \\ &\leq \{\Phi(x)\}^r V(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

На основу (3.6), (3.10) и (3.11) добивамо

$$|G_0^r(A; x)| \leq C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\kappa} W(x) + \{\Phi(x)\}^r V(x). \quad (3.12)$$

Функцију $\Phi(x)$ одредићемо тако да буде

$$\{\Phi(x)\}^{r-\kappa} W(x) = \{\Phi(x)\}^r V(x),$$

одакле излази

$$\Phi(x) = \left\{ \frac{W(x)}{V(x)} \right\}^{1/\kappa}, \quad (3.13)$$

Уврстимо ли (3.13) у (3.12), добићемо

$$|G_0^r(A; x)| \leq C \{V(x)\}^{1-\frac{r}{\kappa}} \{W(x)\}^{\frac{r}{\kappa}}, \quad (C = 1 + C_1), \text{ за све } 0 < r < \kappa,$$

чиме је тврђење (i) доказано.

Доказ тврђења (ii): Пошто је $A(x) = o\{V(x)\}$, то датом броју $\varepsilon > 0$ можемо одредити одговарајући број x_0 такав да буде

$$|A(x)| < \varepsilon V(x), \text{ за све } x \geq x_0.$$

1) Претпоставимо најпре да је $0 < x_0 < \xi$. Израз за $G_0^r(A; x)$ писаћемо у облику

$$\begin{aligned} G_0^r(A; x) &= \frac{r}{x_0^\theta} \int_0^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt + \\ &+ \frac{r}{x_0^\theta} \int_{\xi}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt = \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Овде је као и у случају (i)

$$|J_1| \leq C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\kappa} W(x), \quad \left(C_1 = (1 + C_0) \frac{r}{\kappa} \right), \quad (3.15)$$

где је

$$1 - e^{(\xi-x)x^{-\theta}} = \Phi(x),$$

а касније ћемо погодено одредити функцију $\Phi(x)$.

Сада ћемо проценити интеграл J_2 . Пошто је $\xi > x_0$, то је $|A(t)| < \varepsilon V(t)$ за $t \geq \xi$, па је

$$|J_2| < \varepsilon V(x) \frac{r}{x^\theta} \int_{\xi}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} dt = \varepsilon \{\Phi(x)\}^r V(x). \quad (3.16)$$

На основу (3.14), (3.15) и (3.16) добивамо

$$|G_\theta^x(A; x)| < C_1 \{\Phi(x)\}^{r-x} W(x) + \varepsilon \{\Phi(x)\}^r V(x). \quad (3.17)$$

Функцију $\Phi(x)$ одредићемо тако да буде

$$\{\Phi(x)\}^{r-x} W(x) = \varepsilon \{\Phi(x)\}^r V(x),$$

а одавде је

$$\Phi(x) = \left\{ \frac{W(x)}{\varepsilon V(x)} \right\}^{1/x}. \quad (3.18)$$

Уврстимо ли (3.18) у (3.17) добивамо

$$|G_\theta^x(A; x)| < (1 + C_1) \varepsilon^{1-\frac{r}{x}} \{V(x)\}^{1-\frac{r}{x}} \{W(x)\}^{r/x}.$$

Пошто је $1 - \frac{r}{x} > 0$, а ε можемо узети произвољно мало, то је

$$G_\theta^r(A; x) = o\left(\{V(x)\}^{1-\frac{r}{x}} \{W(x)\}^{r/x}\right), \text{ за све } 0 < r < x.$$

2) Посматрајмо сада случај кад је $\xi < x_0 < x$. Израз за $G_\theta^r(A; x)$ писаћемо у облику

$$\begin{aligned} G_\theta^r(A; x) &= \frac{r}{x^\theta} \int_0^{x_0} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt + \\ &+ \frac{r}{x^\theta} \int_{x_0}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt = \\ &= J_1^* + J_2^*. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Најпре ћемо проценити интеграл J_1^* . Како је $0 \leq t \leq x_0 < x$, то је за $r \geq 1$

$$(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} < 1,$$

па је

$$|J_1^*| < \frac{r}{x^\theta} \int_0^{x_0} |A(t)| dt = o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.20')$$

Ако је $0 < r < 1$, онда функција

$$(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}$$

монотонно расте, па је за $0 \leq t \leq x_0 < x$

$$(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \leq (1 - e^{(x_0-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(x_0-x)x^{-\theta}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

На основу тога је

$$|J_1^*| \leq \frac{r}{x^\theta} (1 - e^{(x_0-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(x_0-x)x^{-\theta}} \int_0^{x_0} |A(t)| dt = o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.20'')$$

Сада ћемо проценити интеграл J_2^* . Како је $|A(t)| < \varepsilon V(t)$ за $t \geq x_0$, то је

$$|J_2^*| < \varepsilon V(x) \frac{r}{x^\theta} \int_{x_0}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} dt =$$

$$< \varepsilon V(x) (1 - e^{(x_0-x)x^{-\theta}})^r <$$

$$< \varepsilon V(x) (1 - e^{(\xi-x)x^{-\theta}})^r = \varepsilon \{\Phi(x)\}^r V(x),$$

тј.

$$|J_2^*| < \varepsilon^{1-r/\kappa} \{V(x)\}^{1-r/\kappa} \{W(x)\}^{r/\kappa}. \quad (3.21)$$

Пошто је $1 - r/\kappa > 0$, а ε можемо учинити произвољно малим, то с обзиром на (3.19), (3.20') односно (3.20'') и (3.21) добивамо

$$G_\theta^r(A; x) = o(\{V(x)\}^{1-r/\kappa} \{W(x)\}^{r/\kappa}), \quad \text{за све } 0 < r < \kappa,$$

чиме је тврђење (ii) доказано.

Д о к а з тврђења (iii): Пошто је $G_\theta^\kappa(A; x) = o\{W(x)\}$, то датом броју $\varepsilon > 0$ можемо одредити одговарајући број x_0 , такав да је

$$|G_\theta^\kappa(A; x)| < \varepsilon W(x), \quad \text{за све } x \geq x_0. \quad (3.22)$$

1) Претпоставимо најпре да је $0 < x_0 < \xi$, и ставимо

$$\begin{aligned} G_\theta^r(A; x) &= \frac{r}{x^\theta} \int_0^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt + \\ &+ \frac{r}{x^\theta} \int_\xi^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt = \\ &= K_1 + K_2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

На исти начин као и у случају (i), узимајући само $x \geq x_0$, а с обзиром на (3.22) добивамо

$$|K_1| \leq C_1 \{\Phi(x)\}^{r-x} \in W(x). \quad (3.24)$$

И овде је

$$|K_2| \leq \{\Phi(x)\}^r V(x). \quad (3.25)$$

Из (3.23), (3.24) и (3.25) следи

$$|G_\theta^r(A; x)| \leq C_1 \{\Phi(x)\}^{r-x} \in W(x) + \{\Phi(x)\}^r V(x). \quad (3.26)$$

Функцију $\Phi(x)$ одредићемо тако да буде

$$\{\Phi(x)\}^{r-x} \in W(x) = \{\Phi(x)\}^r V(x),$$

одакле излази

$$\Phi(x) = \left\{ \frac{\in W(x)}{V(x)} \right\}^{1/x}. \quad (3.27)$$

Уврстимо ли (3.27) у (3.26) добивамо

$$|G_\theta^r(A; x)| \leq (1 + C_1) \in^{r/x} \{V(x)\}^{1-r/x} \{W(x)\}^{r/x}.$$

Пошто е можемо учинити произвољно малим, то је

$$G_\theta^r(A; x) = o(\{V(x)\}^{1-r/x} \{W(x)\}^{r/x}), \text{ за све } 0 < r < x.$$

2) Претпоставимо сада да је $0 < \xi < x_0$, и ставимо

$$\begin{aligned} G_\theta^r(A; x) &= \frac{r}{x^\theta} \int_0^{x_0} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt + \\ &+ \frac{r}{x^\theta} \int_{x_0}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt = \\ &= K_1^* + K_2^*. \end{aligned} \quad (3.28)$$

С обзиром на претпоставку (3.2) имамо

$$\begin{aligned} |K_2^*| &\leq \frac{r}{x^\theta} \int_{x_0}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} |A(t)| dt \leq \\ &\leq V(x) (1 - e^{(x_0-x)x^{-\theta}})^r < \\ &< V(x) (1 - e^{(\xi-x)x^{-\theta}})^r = \{\Phi(x)\}^r V(x). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Као и у случају (ii) и овде је

$$K_1^* = o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Из (3.27), (3.28), (3.29) и (3.30) следи

$$G_{\theta}^r(A; x) = o(\{V(x)\}^{1-r/\kappa} \{W(x)\}^{r/\kappa}), \text{ за све } 0 < r < \kappa,$$

чиме је тврђење (iii) доказано.

Г Л А В А IV

Сада ћемо доказати једну теорему инклузије за поступак G_{θ}^{κ} у односу на κ , али с обзиром на учињену претпоставку о функцији $A(t)$, то није теорема праве инклузије. Наиме, претпоставићемо да је $A(t) = O(1)$, $t \rightarrow \infty$, па ћемо на основу Wiener-ове теорије доказати споменућу теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. Из $G_{\theta}^{\kappa}(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow \infty$, уз претпоставку $A(t) = O(1)$, $t \rightarrow \infty$, следи

$$G_{\theta}^{\kappa'}(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty,$$

за свако позитивно κ' веће или мање од κ .

У сврху доказа ове теореме претходно ћемо доказати једну лему коју ћемо касније користити и у глави V при доказивању теореме Tauber-ове природе. Без ограничења општости ставимо $A = 0$.

ЛЕМА 4.1. Из $G_{\theta}^{\kappa}(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$, уз претпоставку $A(t) = O(1)$, $t \rightarrow \infty$, следи

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\theta}^{\kappa}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(y-\eta) A(\eta^{\beta}) d\eta = \\ &= \beta \kappa \int_0^y \{1 - e^{-\beta(y-\eta)}\}^{\kappa-1} e^{-\beta(y-\eta)} A(\eta^{\beta}) d\eta \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

где је $\beta = (1-\theta)^{-1}$, а $k(y-\eta)$ је једно Wiener-ово језгро.

Доказ леме 4.1: Језгро нашег поступка

$$G_{\theta}^{\kappa}(x) = \frac{\kappa}{x^{\theta}} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt \quad (4.1)$$

није Wiener-ово језгро, па ћемо зато са овог поступка прећи на један нови поступак са Wiener-овим језгром и на њему ћемо изводити закључке. Ради тога у интегралу (4.1) извршићемо замену

$$t = (x^\alpha - u)^\beta = x^{\alpha\beta} \left(1 - \frac{u}{x^\alpha}\right)^\beta = x^{\alpha\beta} \left\{1 - \left(\frac{\beta}{1}\right) \frac{u}{x^\alpha} + O\left(\frac{u^2}{x^{2\alpha}}\right)\right\}. \quad (4.2)$$

Одавде излази

$$\frac{t-x}{x^\theta} = \frac{x^{\alpha\beta} - \beta u x^{\alpha(\beta-1)} + O(u^2 x^{\alpha(\beta-2)}) - x}{x^\theta}.$$

Нека је $\alpha\beta=1$ и $\alpha(\beta-1)=\theta$, тј. $\alpha=1-\theta$, $\beta=(1-\theta)^{-1}$, па је

$$\frac{t-x}{x^\theta} = -\beta u + O(u^2 x^{\theta-1}). \quad (4.3)$$

На основу (4.2) и (4.3) интеграл (4.1) узима облик

$$G_\theta^\kappa(x) = \beta x \int_0^{x^{1-\theta}} \left\{1 - e^{-\beta u + O(u^2 x^{\theta-1})}\right\}^{\kappa-1} e^{-\beta u + O(u^2 x^{\theta-1})} \cdot A\{(x^{1-\theta} - u)^\beta\} \left(1 - \frac{u}{x^{1-\theta}}\right)^{\beta-1} du.$$

Ставимо ли $x^{1-\theta}=y$, онда овај израз постаје

$$G_\theta^\kappa(y) = \beta x \int_0^y \left\{1 - e^{-\beta u + O\left(\frac{u^2}{y}\right)}\right\}^{\kappa-1} e^{-\beta u + O\left(\frac{u^2}{y}\right)} \cdot \left(1 - \frac{u}{y}\right)^{\beta-1} A\{(y-u)^\beta\} du. \quad (4.4)$$

Посматрајмо сада нови поступак збирљивости

$$\tilde{G}_\theta^\kappa(y) = \beta x \int_0^y (1 - e^{-\beta u})^{\kappa-1} e^{-\beta u} A\{(y-u)^\beta\} du. \quad (4.5)$$

Ако у овом интегралу извршимо замену $y-u=\eta$, добићемо

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\theta^\kappa(y) &= \beta x \int_0^y \{1 - e^{-\beta(y-\eta)}\}^{\kappa-1} e^{-\beta(y-\eta)} A(\eta^\beta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(y-\eta) A(\eta^\beta) d\eta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где је

$$k(y, \eta) = k(y - \eta) = \begin{cases} \beta \kappa \{1 - e^{-\beta(y-\eta)}\}^{x-1} e^{-\beta(y-\eta)}, & \text{за } 0 \leq \eta \leq y \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Лако је видети да је $\tilde{G}_\theta^x$ регуларан поступак збирљивости.

Да бисмо доказали тврђење ове леме треба да покажемо да

$$G_\theta^x(y) - \tilde{G}_\theta^x(y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

Одузмемо ли (4.5) од (4.4) добивамо

$$G_\theta^x(y) - \tilde{G}_\theta^x(y) = \beta \kappa \int_0^y \left\{ \left(1 - e^{-\beta u + O\left(\frac{u^2}{y}\right)} \right)^{x-1} e^{-\beta u + O\left(\frac{u^2}{y}\right)} \left(1 - \frac{u}{y} \right)^{\beta-1} - \right. \\ \left. - (1 - e^{-\beta u})^{x-1} e^{-\beta u} \right\} A \{(y-u)^\beta\} du.$$

Ради краћег писања увешћемо функцију $\Phi_y(u)$ дефинисану на следећи начин:

$$\Phi_y(u) = \begin{cases} \beta \kappa \left\{ \left(1 - e^{-\beta u + O\left(\frac{u^2}{y}\right)} \right)^{x-1} e^{-\beta u + O\left(\frac{u^2}{y}\right)} \left(1 - \frac{u}{y} \right)^{\beta-1} - \right. \\ \quad \left. - (1 - e^{-\beta u})^{x-1} e^{-\beta u} \right\} A \{(y-u)^\beta\}, & \text{за } 0 \leq u \leq y, \\ 0, & \text{за } u > y, \end{cases}$$

па је

$$G_\theta^x(y) - \tilde{G}_\theta^x(y) = \int_0^\infty \Phi_y(u) du. \quad (4.7)$$

Према нашим уведеним заменама је

$$\frac{t-x}{x^\theta} = \frac{(x^\alpha - u)^\beta - x}{x^\theta} = \frac{(y-u)^\beta - y^\beta}{y^{\beta\theta}} = -\beta u + O\left(\frac{u^2}{y}\right).$$

Посматрајмо функцију $g(u) = y^{-\beta\theta} \{(y-u)^\beta - y^\beta\}$, за $0 \leq u \leq y$, где је $\beta = (1-\theta)^{-1}$. Како је

$$g'(u) = -\beta y^{-\beta\theta} (y-u)^{\beta-1} < 0$$

и

$$g''(u) = \beta(\beta-1) y^{-\beta\theta} (y-u)^{\beta-2} = \theta(1-\theta)^{-2} y^{-\beta\theta} (y-u)^{\beta-2} > 0,$$

то функција $g(u)$ монотono опада у размаку $0 \leq u \leq y$ и у њему је конвексна према доле. С обзиром на то и на чињеницу да је $g(0) = 0$ и $g(y) = -y$ следи

$$g(u) \leq -u, \quad (0 \leq u \leq y).$$

Пошто је права $-\beta u$ тангента криве $g(u)$, то је на основу напред реченог

$$g(u) \geq -\beta u, \quad (0 \leq u \leq y),$$

тј.

$$-\beta u \leq g(u) \leq -u \quad (0 \leq u \leq y). \quad (4.8)$$

Ставимо

$$\psi(u, y) = (1 - e^{-\beta u + O(u^2/y)})^{x-1} e^{-\beta u + O(u^2/y)} = (1 - e^{g(u)})^{x-1} e^{g(u)}.$$

Пошто функција $(1 - e^{-v})^{x-1} \cdot e^{-v}$ монотono опада кад је $0 < x < 1$, то је с обзиром на (4.8)

$$\psi(u, y) \leq (1 - e^{-\beta u})^{x-1} e^{-\beta u} \in L^1(0, \infty), \text{ за } 0 < x < 1. \quad (4.9)$$

Ако је $x \geq 1$, онда је на основу (4.8)

$$\psi(u, y) \leq e^{-u} \in L^1(0, \infty). \quad (4.10)$$

Како је с обзиром на учињену претпоставку о функцији $A(t)$

$$|A\{(y-u)^\beta\}| \leq K, \quad K = \text{const.} \quad (4.11)$$

и пошто је

$$\left(1 - \frac{u}{y}\right)^{\beta-1} \leq 1, \text{ за све } 0 \leq u \leq y, \quad (4.12)$$

јер је $\beta-1 = \theta(1-\theta)^{-1} > 0$, то на основу (4.9), (4.10), (4.11) и (4.12) постоји функција $F(u)$, која не зависи од y , таква да је

$$|\Phi_y(u)| \leq F(u) \in L^1(0, \infty). \quad (4.13)$$

Како

$$e^{y^{-\beta\theta}\{(y-u)^\beta - y^\beta\}} = e^{-\beta u + O(u^2/y)} \rightarrow e^{-\beta u}, \quad y \rightarrow \infty,$$

то је

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \Phi_y(u) = 0 \quad (4.14)$$

у сваком коначном размаку од u , па на основу (4.13) и (4.14) можемо применити Lebesgue-ову теорему. тј. у интегралу (4.7)

можемо прелаз $y \rightarrow \infty$ испред знака интеграла заменити истим прелазом иза знака интеграла и тако добивамо

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \{G_{\theta}^{\kappa}(y) - \tilde{G}_{\theta}^{\kappa}(y)\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \Phi_y(u) du = \int_0^{\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \Phi_y(u) du = 0,$$

чиме је тврђење леме 4.1 доказано.

Још остаје да покажемо да је језгро

$$k(y, \eta) = k(y - \eta) = \beta \kappa \{1 - e^{-\beta(y-\eta)}\}^{\kappa-1} e^{-\beta(y-\eta)}$$

поступка $\tilde{G}_{\theta}^{\kappa}$ Wiener-ово, тј. треба да покажемо да

$$(i) \quad k(\tau) \in L^1(-\infty, \infty) \text{ и}$$

$$(ii) \quad k^*(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iv\tau} k(\tau) d\tau \neq 0, \text{ за све } -\infty < v < \infty.$$

Пошто је $k(y - \eta) = 0$ за $\eta > y$ и $\eta < 0$, то је $k(\tau) = 0$ за $\tau < 0$ и $\tau > y$, па је услов (i) очевидно задовољен, те остаје само да покажемо да је

$$k^*(v) = \beta \kappa \int_0^y e^{iv\tau} (1 - e^{-\beta\tau})^{\kappa-1} e^{-\beta\tau} d\tau \neq 0, \text{ за све } -\infty < v < \infty.$$

У ту сврху у горњем интегралу извршићемо замену $1 - e^{-\beta\tau} = z$, па ћемо добити

$$\begin{aligned} k^*(v) &= \kappa \int_0^{1-e^{-\beta y}} z^{\kappa-1} (1-z)^{-iv/\beta} dz \\ &= \kappa \int_0^1 z^{\kappa-1} (1-z)^{(1-iv/\beta)-1} dz - \kappa \int_{1-e^{-\beta y}}^1 z^{\kappa-1} (1-z)^{-iv/\beta} dz. \end{aligned}$$

Пошто је $\kappa > 0$ и $Re\{1 - iv/\beta\} > 0$, то је

$$k^*(v) = \kappa \frac{\Gamma(\kappa) \Gamma\left(1 - \frac{iv}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\kappa + 1 - \frac{iv}{\beta}\right)} - \kappa \int_{1-e^{-\beta y}}^1 z^{\kappa-1} (1-z)^{-iv/\beta} dz \neq 0$$

за све $-\infty < v < \infty$, пошто први члан десне стране ове једначине не може бити једнак другом, а први је различит од нуле за све $-\infty < v < \infty$, јер функција $\Gamma(\kappa + 1 - iv/\beta)$ нема полова.

Доказ теореме 4.1: 1) На основу Wiener-ове теореме из

$$\tilde{G}_\theta^x(y) = \int_{-\infty}^{\infty} k(y-\eta) A(\eta^\beta) d\eta \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty,$$

при чему је $k(\tau) \in W$ (Wiener-ово језгро) и $A(t) = O(1)$, следи

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(y-\eta) A(\eta^\beta) d\eta \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad \text{за свако } k_1(\tau) \in L^1(-\infty, \infty).$$

Специјално можемо изабрати

$$2) \text{ Из } k_1(\tau) = \bar{k}_1(\tau) = \beta x' (1 - e^{-\beta \tau})^{x'-1} e^{-\beta \tau}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(y-\eta) A(\eta^\beta) d\eta \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty$$

и

$$A(t) = O(1)$$

следи

$$\tilde{G}_\theta^{x'}(y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty,$$

а одатле на основу леме 4.1 излази

$$G_\theta^{x'}(y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty$$

за свако позитивно x' веће или мање од x , чиме је теорема 4.1 доказана.

Г Л А В А V

Сада ћемо доказати инверзну теорему или такозвану теорему Таубер-ове природе за поступак G_θ^x која гласи:

ТЕОРЕМА 5.1 Из збирљивости G_θ^x функције $A(x)$, шј. из

$$G_\theta^x(x) = \frac{x}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) dt \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty$$

и услова конвергенције

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{t \leq \tau \leq t + \varepsilon t^\theta} \{A(\tau) - A(t)\} \geq -w(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

следи

$$A(t) \rightarrow A, \quad t \rightarrow \infty.$$

Као што је напоменуто у уводу, доказ ове теореме извешћемо у три етапе [7].

ТЕОРЕМА 5.2. Из

$$G_0^*(x) = O(1), \quad x \rightarrow \infty$$

и услова

$$\min_{t \leq \tau \leq T} \{A(\tau) - A(t)\} > -m, \quad \alpha(T) = \lambda \alpha(t) \quad (5.2)$$

(који је садржан у услову (5.1)), где је

$$\alpha(t) = e^{t^{1-\theta}} \quad \text{и} \quad \lambda > 1$$

следи

$$A(t) = O(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

У сврху доказа ове теореме увешћемо функцију $A^*(x)$ дефинисану са

$$A^*(x) = \max_{0 \leq t \leq x} \{-A(t)\}.$$

Из конструкције ове функције видимо:

- (а) $A^*(x)$ не опада,
- (б) $A^*(x) \geq -A(x)$,
- (в) $A^*(x)$ је најмања неоппадајућа функција која задовољава услов (б), тј. која је $\geq -A(x)$.

За доказ теореме 5.2 биће нам потребне следеће леме:

ЛЕМА 5.1. Из услова (5.2) следи

$$A(y) - A(x) > -m - m_1(y^{1-\theta} - x^{1-\theta}), \quad \text{за свако } y \geq x \geq 0,$$

где је $m_1 = m/\log \lambda$.

ЛЕМА 5.2. Постоји број $M > 0$ такав да је

$$A(x) < \frac{1 - (1 - e^{-1})^x}{(1 - e^{-1})^x} A^*(x) + M.$$

ЛЕМА 5.3. Постоји број $0 < \delta < 1$ и број $C > 0$ такви да је

$$-A(x) < \delta A^*(x) + C, \quad \text{за све } x \geq x_0.$$

Доказ леме 5.1: Означимо са $\beta(t)$ инверзну функцију функције $\alpha(t)$, тј.

$$\beta(t) = (\log t)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Ставимо ли $t=\beta(x)$ и $\tau=\beta(\zeta)$, онда, будући да су $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ монотонно растуће функције, услов (5.2) можемо написати у облику

$$\min_{x \leq \zeta \leq \lambda x} \{A(\beta(\zeta)) - A(\beta(x))\} > -m. \quad (5.2')$$

Нека је $y > x$ неки број такав да је

$$\lambda^n x < y \leq \lambda^{n+1} x. \quad (5.3)$$

Према неједначини (5.2') имамо

$$\begin{aligned} A\{\beta(\lambda x)\} - A\{\beta(x)\} &> -m \\ A\{\beta(\lambda^2 x)\} - A\{\beta(\lambda x)\} &> -m \\ &\dots \dots \dots \\ A\{\beta(\lambda^n x)\} - A\{\beta(\lambda^{n-1} x)\} &> -m, \\ A\{\beta(y)\} - A\{\beta(\lambda^n x)\} &> -m, \end{aligned}$$

одакле сабирањем добивамо

$$A\{\beta(y)\} - A\{\beta(x)\} > -m - mn.$$

Пошто је на основу (5.3)

$$-n > -\frac{1}{\log \lambda} \log \frac{y}{x}$$

то је

$$A\{\beta(y)\} - A\{\beta(x)\} > -m - m_1 \log \frac{y}{x}, \text{ где је } m_1 = m/\log \lambda.$$

Ако у овој последњој неједначини место $\beta(y)$ напишемо y , а место $\beta(x)$ напишемо x , добићемо

$$\begin{aligned} A(y) - A(x) &> -m - m_1 \log \frac{\alpha(y)}{\alpha(x)} = \\ &= -m - m_1 (y^{1-\theta} - x^{1-\theta}), \text{ за свако } y \geq x \geq 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

чиме је лема 2.1 доказана.

Доказ леме 5.2: Пођимо од израза

$$\begin{aligned} G_\theta^x(x) &= x \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) \frac{dt}{x^\theta} = \\ &= x \int_0^{x-x^\theta} + x \int_{x-x^\theta}^x = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

У интегралу J_1 минорираћемо $A(t)$ помоћу $A^*(t)$, тј. са $A(t) \geq -A^*(t)$, а у интегралу J_2 минорираћемо $A(t)$ помоћу неједначине (5.4). Пошто смо узели да је $A(0)=0$, то је $A^*(t) \geq 0$, па је

$$\begin{aligned} J_1 &= \kappa \int_0^{x-x^0} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) \frac{dt}{x^{\theta}} \geq \\ &\geq -\kappa \int_0^{x-x^0} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A^*(t) \frac{dt}{x^{\theta}} \geq \\ &\geq -A^*(x-x^0) \kappa \int_0^{x-x^0} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^{\theta}} = \\ &\geq -A^*(x-x^0) \{ (1 - e^{-x^{1-\theta}})^{\kappa} - (1 - e^{-1})^{\kappa} \} \geq \\ &\geq -A^*(x-x^0) \{ 1 - (1 - e^{-1})^{\kappa} \}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Сада ћемо минорирати интеграл J_2 . Пошто је у њему $t \geq x - x^0$, то је према (5.4)

$$A(t) > A(x - x^0) - m - m_1 \{ t^{1-\theta} - (x - x^0)^{1-\theta} \},$$

па је

$$\begin{aligned} J_2 &> \{ A(x - x^0) - m \} \kappa \int_{x-x^0}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^{\theta}} - \\ &- m_1 \kappa \int_{x-x^0}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{ t^{1-\theta} - (x - x^0)^{1-\theta} \} \frac{dt}{x^{\theta}}. \end{aligned}$$

Посматрајмо најпре интеграл

$$J = \int_{x-x^0}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\kappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{ t^{1-\theta} - (x - x^0)^{1-\theta} \} \frac{dt}{x^{\theta}}$$

који, заменом $x^{-\theta}(t-x) = -\xi$, постаје

$$J = \int_0^1 (1 - e^{-\xi})^{\kappa-1} e^{-\xi} \{ (x - x^0 \xi)^{1-\theta} - (x - x^0)^{1-\theta} \} \frac{d\xi}{x^{\theta}}.$$

Пошто је

$$\begin{aligned}(x-x^0\xi)^{1-\theta} - (x-x^0)^{1-\theta} &= x^{1-\theta} \{(1-x^{\theta-1}\xi)^{1-\theta} - (1-x^{\theta-1})^{1-\theta}\} = \\ &= x^{1-\theta} O(x^{\theta-1}) = O(1)\end{aligned}$$

то је

$$J = O(1) \int_0^1 (1-e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} d\xi = O(1), \text{ тј. } 0 < J \leq M_1.$$

Према томе је

$$J_2 > (1-e^{-1})^x A(x-x^0) - M_2, \quad (5.7)$$

где је $M_2 = m(1-e^{-1})^x + m_1 M_1$.

На основу (5.5), (5.6) и (5.7) добивамо

$$G_\theta^x(x) > -\{1-(1-e^{-1})^x\} A^*(x-x^0) + (1-e^{-1}) \cdot A(x-x^0) - M_2.$$

Како је према претпоставци $|G_\theta^x(x)| \leq M_3$, то је

$$M_3 > -\{1-(1-e^{-1})^x\} A^*(x-x^0) + (1-e^{-1})^x A(x-x^0) - M_2,$$

а одатле је

$$A(x-x^0) < \frac{1-(1-e^{-1})^x}{(1-e^{-1})^x} A^*(x-x^0) + M_4,$$

где је

$$M_4 = \frac{M_2 + M_3}{(1-e^{-1})^x}.$$

Ако место $x-x^0$ напишемо x , добивамо

$$A(x) < \frac{1-(1-e^{-1})^x}{(1-e^{-1})^x} A^*(x) + M_4, \quad (5.8)$$

чиме је лема 5.2 доказана.

Доказ леме 5.3: Нека је $0 < \gamma < 1$. Ставимо

$$\begin{aligned}G_\theta^x(x) &= x \int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) \frac{dt}{x^\theta} = \\ &= x \int_0^{x-\gamma x^\theta} + x \int_{x-\gamma x^\theta}^x = K_1 + K_2.\end{aligned} \quad (5.9)$$

Интеграл K_1 мајорираћемо помоћу неједначине (5.4), а интеграл K_2 помоћу неједначине (5.8). Како је у интегралу K_1 $0 \leq t \leq x - \gamma x^\theta < x$, то је према (5.4)

$$A(t) < A(x) + m + m_1 (x^{1-\theta} - t^{1-\theta}),$$

па је

$$K_1 < \{A(x) + m\} x \int_0^{x-\gamma x^\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^\theta} + \\ + m_1 x \int_0^{x-\gamma x^\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} (x^{1-\theta} - t^{1-\theta}) \frac{dt}{x^\theta}.$$

Последњи интеграл на десној страни ове неједначине, заменом $x^{1-\theta}(t-x) = -\xi$, постаје

$$K = \int_{\gamma}^{x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} \{x^{1-\theta} - (x - x^\theta \xi)^{1-\theta}\} d\xi.$$

Како је

$$x^{1-\theta} - (x - x^\theta \xi)^{1-\theta} = x^{1-\theta} \{1 - (1 - x^{\theta-1} \xi)^{1-\theta}\} = x^{1-\theta} O(x^{\theta-1} \xi) = \xi O(1),$$

то је

$$K = O(1) \int_{\gamma}^{x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{x-1} e^{-\xi} \xi d\xi = O(1), \quad \text{тј. } 0 < K \leq M_5.$$

Према томе је

$$K_1 < \{A(x) + m\} \{(1 - e^{-x^{1-\theta}})^x - (1 - e^{-\gamma})^x\} + M_5. \quad (5.10)$$

На основу неједначине (5.8) следи

$$K_2 < \frac{1 - (1 - e^{-1})^x}{(1 - e^{-1})^x} x \int_{x-\gamma x^\theta}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A^*(t) \frac{dt}{x^\theta} + \\ + M_4 x \int_{x-\gamma x^\theta}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^\theta} \leq \\ < \frac{1 - (1 - e^{-1})^x}{(1 - e^{-1})^x} A^*(x) x \int_{x-\gamma x^\theta}^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{x-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^\theta} + \\ + M_4 (1 - e^{-\gamma})^x =$$

$$< \left(\frac{1 - e^{-\gamma}}{1 - e^{-1}} \right)^x \{1 - (1 - e^{-1})^x\} A^*(x) + M_6, \quad (5.11)$$

где је $M_6 = M_4 (1 - e^{-\gamma})^x$.

Како је по претпоставци $|G_0^x(x)| \leq M_3$, то је на основу (5.9), (5.10) и (5.11)

$$\begin{aligned} -M_3 \leq G_0^x(x) &< \{A(x) + m\} \{(1 - e^{-x^{1-\theta}})^x - (1 - e^{-\gamma})^x\} + \\ &+ \left(\frac{1 - e^{-\gamma}}{1 - e^{-1}} \right)^x \{1 - (1 - e^{-1})^x\} A^*(x) + M_5 + M_6, \end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned} -A(x) &< \left(\frac{1 - e^{-\gamma}}{1 - e^{-1}} \right)^x \frac{1 - (1 - e^{-1})^x}{(1 - e^{-x^{1-\theta}})^x - (1 - e^{-\gamma})^x} A^*(x) + m + \\ &+ \frac{M_3 + M_5 + M_6}{(1 - e^{-x^{1-\theta}})^x - (1 - e^{-\gamma})^x}. \end{aligned}$$

Како је $1 - e^{-\gamma} < 1 - e^{-1}$, а пошто x можемо узети довољно велико, рецимо $x \geq x_0$, то је онда и

$$\frac{1 - (1 - e^{-1})^x}{(1 - e^{-x^{1-\theta}})^x - (1 - e^{-\gamma})^x} \leq 1, \text{ за све } x \geq x_0.$$

Последњи члан ове неједначине мањи је од позитивне константе M_7 за све $x \geq x_0$. Према томе добивамо

$$-A(x) < \delta A^*(x) + M_7, \quad 0 < \delta < 1, \text{ за све } x \geq x_0, \quad (5.12)$$

чиме је лема 5.3 доказана.

Доказ теореме 5.2: Најпре ћемо доказати да је функција $A^*(x)$ ограничена. На основу њезине особине (б), тј. да је она најмања неоппадајућа функција која је $\geq -A(x)$ и на основу (5.12) добивамо

$$A^*(x) \leq \delta A^*(x) + M_7, \text{ за све } x \geq x_0,$$

одакле излази

$$A^*(x) \leq \frac{M_7}{1 - \delta} = M_8, \text{ за све } x \geq x_0, \quad (5.13)$$

тј.

$$A^*(x) = O(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

Из $-A(x) \leq A^*(x)$ и неједначине (5.13) следи

$$A(x) \geq -M_8, \text{ за све } x \geq x_0, \quad (5.14)$$

а на основу неједначина (5.8) и (5.13) следи

$$A(x) \leq M_8 \frac{1 - (1 - e^{-1})^x}{(1 - e^{-1})^x} + M_4 = M_9. \quad (5.15)$$

Из (5.14) и (5.15) закључујемо да је

$$A(x) = O(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (5.16)$$

чиме је теорема 5.2 доказана.

В) У теорему 5.2 резоновали смо на језгру које није Wiener-ово и доказали смо да је $A(x) = O(1)$, $x \rightarrow \infty$. При доказивању теореме 5.1 користићемо лему 4.1 која тврди да из

$$G_0^x(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty \text{ и } A(x) = O(1), \quad x \rightarrow \infty$$

следи

$$\tilde{G}_0^x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t) A(t^b) dt \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty \quad (5.17)$$

где је $k(x-t)$ једно Wiener-ово језгро дефинисано са:

$$k(x-t) = \begin{cases} bx \{1 - e^{-b(x-t)}\}^{x-1} e^{-b(x-t)}, & \text{за } 0 \leq t \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и $b = (1 - \theta)^{-1}$.

Из (5.17) на основу Wiener-ове теореме следи

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t) A(t^b) dt \rightarrow A \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(t) dt, \quad x \rightarrow \infty$$

за сваку функцију $k_1(t) \in L^1(-\infty, +\infty)$. Према томе можемо за $k_1(t)$ изабрати специјалну функцију из класе L^1 дефинисану на следећи начин:

$$k_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{за } 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

па је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t) A(t^b) dt = \int_{x-\epsilon}^x A(t^b) dt \rightarrow A \int_0^\epsilon dt = A\epsilon, \quad x \rightarrow \infty$$

тј.

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^x A(t^b) dt \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty,$$

или што је исто,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} A(t^b) dt \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty.$$

С) Доказ теореме 5.1. Из

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} A(t^b) dt \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty$$

и услова конвергенције (5.1)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \inf \min_{u \leq v \leq u + \varepsilon' u^\theta} \{A(v) - A(u)\} \geq -\omega(\varepsilon') \rightarrow 0, \quad \varepsilon' \rightarrow 0 \quad (5.18)$$

слиди тврђење ове теореме тј. слиди

$$A(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty.$$

Да бисмо то доказали, пре свега треба да видимо како гласи услов конвергенције за функцију $A(t^b)$. Тврдимо да је за њу размак конвергенције $(t^b, (t+\varepsilon)^b)$. Из

$$(t+\varepsilon)^b = t^b \left\{ 1 + \binom{b}{1} \frac{\varepsilon}{t} + \binom{b}{2} \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^2 + \dots \right\}$$

видимо да можемо учинити да буде

$$(t+\varepsilon)^b < t^b + \varepsilon' t^{b-1}$$

ако само ε изаберемо довољно мало. Ставимо ли $t^b = u$, онда горња неједначина добива облик

$$(t+\varepsilon)^b < u + \varepsilon' u^\theta.$$

Дакле, размак $(t^b, (t+\varepsilon)^b)$ садржан је у размаку $(u, u + \varepsilon' u^\theta)$, па је

$$\min_{t \leq \tau \leq t+\varepsilon} \{A(\tau^b) - A(t^b)\} \geq \min_{u \leq v \leq u + \varepsilon' u^\theta} \{A(v) - A(u)\} = W(\varepsilon', u) = W(\varepsilon', t^b).$$

С обзиром на услов (5.18) имамо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf W(\varepsilon', t^b) \geq -w(\varepsilon') \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(јер $\varepsilon' \rightarrow 0$, кад $\varepsilon \rightarrow 0$), а то значи да је

$$W(\varepsilon', t^b) \geq -w(\varepsilon') + o(1),$$

па је

$$\min_{t \leq \tau \leq t+\varepsilon} \{A(\tau^b) - A(t^b)\} \geq -w(\varepsilon') + o(1). \quad (5.19)$$

Ставимо

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} A(\tau^b) d\tau = \sigma_\varepsilon(x)$$

и образујмо разлику

$$\sigma_\varepsilon(x) - A(x^b) = \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \{A(\tau^b) - A(x^b)\} d\tau.$$

На основу (5.19) имамо

$$\sigma_\varepsilon(x) - A(x^b) \geq \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \min_{x \leq \tau \leq x+\varepsilon} \{A(\tau^b) - A(x^b)\} d\tau \geq -w(\varepsilon') + o(1),$$

па је

$$A(x^b) \leq \limsup \sigma_\varepsilon(x) + w(\varepsilon') \leq A + w(\varepsilon').$$

Како, с обзиром на (5.18), $w(\varepsilon') \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, то је

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} A(x^b) \leq A. \quad (5.20)$$

Посматрајмо сада разлику

$$\sigma_\varepsilon(x) - A((x+\varepsilon)^b) = \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \{A(\tau^b) - A((x+\varepsilon)^b)\} d\tau.$$

Како је

$$\max_{x \leq \tau \leq x+\varepsilon} \{A(\tau^b) - A((x+\varepsilon)^b)\} \leq w(\varepsilon') + o(1),$$

то је

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon(x) - A((x+\varepsilon)^b) &\leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \max_{x \leq \tau \leq x+\varepsilon} \{A(\tau^b) - A((x+\varepsilon)^b)\} d\tau \leq w(\varepsilon') + o(1), \end{aligned}$$

а одавде је

$$A((x+\varepsilon)^b) \geq \sigma_\varepsilon(x) - w(\varepsilon') + o(1),$$

па је

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} A((x+\varepsilon)^b) \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \sigma_\varepsilon(x) - w(\varepsilon') = A - w(\varepsilon').$$

Пошто $w(\epsilon') \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, то је

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} A(x^b) \geq A. \quad (5.21)$$

На основу (5.20) и (5.21) следи

$$A(x^b) \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty,$$

тј.

$$A(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty,$$

чиме је теорема 5.1 доказана.

Глава VI

1⁰. Свакој функцији $f(x)$, интеграбилној у размаку $0 \leq x \leq 2\pi$, можемо придружити један Fourier-ов ред

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vx + b_v \sin vx).$$

Непрекидност функције $f(x)$ у тачки $x = x_0$ није довољна за конвергенцију овог реда у тој тачки, већ су за то потребни извесни суплементарни услови који намећу прилично ограничење посматраној функцији.

2⁰ У вези с тим намеће се питање, постоје ли поступци збирљивости који могу успешно сумирати Fourier-ове редове, јасно, постављајући функцији $f(x)$ мање ограничење него што се то захтева у случају обичне конвергенције.

Такве природе је Fejér-ова теорема, која казује да је Fourier-ов ред функције $f(x)$ збирљив $(C, 1)$ ка суми

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$$

за свако x за које овај израз има смисла. Специјално, Fourier-ов ред функције $f(x)$ је збирљив $(C, 1)$ ка суми $f(x)$ у свакој тачки x у којој је функција $f(x)$ непрекидна.

Hardy и Littlewood [6] су доказали: Ако је

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = o\left(\frac{1}{\log \frac{1}{|h|}}\right), \quad h \rightarrow \pm 0, \quad (6.1)$$

онда је Fourier-ов ред функције $f(x)$ збирљив B у тачки x_0 ка суми $f(x_0)$, тј.

$$e^{-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n(x_0)}{n!} y^n \rightarrow f(x_0), \quad y \rightarrow \infty$$

где је

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^n (a_v \cos v x_0 + b_v \sin v x_0).$$

Услов (6.1) захтева од функције више него непрекидност у тачки x_0 .*

Morgan [12] је доказао једну општију теорему. Полазећи од претпоставке

$$f(x_0+h) - f(x_0) = o \left\{ \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{h}\right)} \right\}, \quad h \rightarrow 0$$

која је општија од претпоставке (6.1), а где позитивна функција $\varphi(x)$ за велике вредности од x задовољава извесне суплементарне услове, он је доказао да је

$$S(u; x_0) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{v \leq u} (a_v \cos v x_0 + b_v \sin v x_0)$$

збирљиво V_0 ка суми $f(x_0)$, тј. да је

$$S(u; x_0) \rightarrow f(x_0) \quad (V_0), \quad u \rightarrow \infty.$$

3°. Може се извршити једна природна генерализација обичних Fourier-ових редова и такви редови зову се генералисани Fourier-ови редови. Теорија ових редова много се разликује од теорије обичних Fourier-ових редова.

Нека је D нека коначна област m -димензионалног Еуклидовога простора, а $\bar{D}$ граница те области. Са D^* означимо затворену област, тј. $D^* = D + \bar{D}$.

Посматрајмо диференцијални задатак са граничним условом

$$\begin{aligned} \Delta U + \lambda U &= 0 & \text{у } D \\ U &= 0 & \text{на } \bar{D}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Означимо са $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ сопствене вредности проблема (6.2), а са $\Phi_1(P), \Phi_2(P), \Phi_3(P), \dots$ одговарајуће сопствене функције. Нека је функција $f(\Pi)$ интеграбилна у области D^* и нека $P \in D$. Ставимо

$$a_v = \int_{D^*} f(\Pi) \Phi_v(\Pi) dV_\Pi,$$

* Moore [11] је доказао да постоје непрекидне функције чији Fourier-ови редови нису збирљиви B у неким тачкама.

зу a_ν коефицијенти генералисаног Fourier-овог реда по соп-
стим функцијама $\Phi_\nu(P)$, аташираног функцији $f(\Pi)$ у тачки
 $\Pi=P$, тј.

$$f(P) \sim \sum a_\nu \Phi_\nu(P). \quad (6.3)$$

4°. На проблеме збирљивости генералисаних Fourier-ових редова
примењени су до сада Riesz-ов и G_0^X - поступак. Применом Riesz-
овог поступка бавили су се Bochner [3], Minakshisundaram
[10], Левитан [9] и Avadhanani [1], а применом G_0^X поступка
В. Г. Авакумовић [2].

Ако је $f(\Pi)$ апсолутно интеграбилна функција у области D , а
равна нули на $\bar{D}$, S. Minakshisundaram [10] је доказао да је у сва-
кој тачки, где је $f(\Pi)$ непрекидно, Fourier-ов ред $f(P) \sim \sum a_\nu \Phi_\nu(P)$
збирљив (R, λ, k) , само ако је $k > 3/2$.

Ако је $f^2(\Pi)$ интеграбилна функција у области D^* , Левитан
[9] и Avadhanani [1] су показали да исто важи за $k \geq 1/2$, док за
 $0 \leq k < 1/2$ збирљивост (R, λ, k) реда $\sum a_\nu \Phi_\nu(P)$, као што је познато,
није локална особина функције $f(\Pi)$.

5°. Нека $f(\Pi) \in L^2(D^*)$, $P \in D$, $k \geq 0$. Riesz-ову средину реда k
развитка (6.3) означимо са

$$\sigma_k(P; x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \sum_{\lambda_\nu \leq x} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k a_\nu \Phi_\nu(P), \quad (6.4)$$

а Riesz-ову средину развитка у обични m -струки Fourier-ов инте-
грал функције, равне $f(\Pi)$ за $\Pi \in D^*$, а нули иначе, означимо са

$$\sigma_k^*(P; x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d_t \{\sigma^*(P; \sqrt{t})\}, \quad (6.5)$$

где је

$$\sigma^*(P; \sqrt{t}) = \int_{D^*} f(\Pi) \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \frac{t^{-1/4}}{r^{m/2}} J_{m/2}(r\sqrt{t}) dV_\Pi.$$

Са r смо означили растојање тачака P и Π , а са $J_p(x)$ Bessel-ову
функцију реда p . Означимо са ε произвољан позитиван број, а са
 D_ε множину тачака области D чије отстојање од $\bar{D}$ није мање
од ε . Левитан [9] је доказао следећу теорему:

Нека је $k^* = (m-1)/2$, $k > k^*$, $k = l + \delta l \geq 0$ цео број,
 $0 \leq \delta < 1$, Постоји константа $C = C_\varepsilon$ таква, да ако $P \in D_\varepsilon$, онда за
 $x \rightarrow \infty$ важе следеће процене:

$$1) \text{ Ако је } l \geq k^* + 1, \text{ онда је } |\sigma_k(P; x) - \sigma_k^*(P; x)| < \frac{C_\varepsilon}{\sqrt{x}}; \quad (6.6)$$

2) Ако је $l \leq k^*$, онда је $|\sigma_k(P; x) - \sigma_k^*(P; x)| < \frac{C_8}{x^{(k-k^*)/2}}$ (6.7)

3) Ако је $k^* < l < k^* + 1$, онда је $|\sigma_k(P; x) - \sigma_k^*(P; x)| \leq \frac{C_8}{x^{\delta/2}}$. (6.8)

Из процена (6.6), (6.7), (6.8) и једне Bochner-ове теореме [3] следи: Ако $f(\Pi) \in L^2(D^*)$, онда је развитак функције $f(\Pi)$ по сопственим функцијама диференцијалног задатка са граничним условом (6.2) збирљив Riesz-овим срединама реда већег од $(m-1)/2$ ка суми $f(P)$ у свакој унутрашњој тачки P области D^* у којој је функција $f(\Pi)$ непрекидна. Дакле, под овим условима збирљивост Riesz-овим срединама зависи од локалних особина функције $f(\Pi)$.

Сада се поставља питање за које вредности θ и κ , G_θ^κ -збирљивост реда $\sum a_\nu \Phi_\nu(P)$ зависи само од локалних особина функције $f(\Pi)$. О томе говори теорема V. G. Arakimovića [2] која је један аналогон теореме Hardy-Littlewood-а [6] о B -збирљивости обичних Fourier-ових редова. Да бисмо је краће формулисали, означимо са D једну дводимензионалну област, са $\bar{D}$ њезин руб, а са $D^* = D + \bar{D}$ затворену област. Минимално отстојање тачке P од руба $\bar{D}$ означимо са l_P . Нека је

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{f(r, \varphi) - f(0,0)\} d\varphi,$$

где су r и φ поларне координате тачке Π , а пол је у тачку P , тј. $f(P) = f(0,0)$. Даље нека је

$$\alpha(t) = \sqrt{t} \int_0^{\rho} g(r) J_1(r\sqrt{t}) dr, \quad 0 < \rho \leq l_P.$$

Та теорема гласи: Претпоставке: (i) Нека је функција $f(\Pi)$ апсолутно интеграбилна у области D^* . (ii) Нека је $1/2 < \theta < 1$ и $\kappa > 3/4 \frac{1}{\theta - 1/2}$.

Тврђење: Да би $\sum a_\nu \Phi_\nu(P)$ било збирљиво поступком G_θ^κ ка суми $f(P)$, потребно је и довољно да $\alpha(t)$ буде збирљиво поступком G_θ^κ ка суми нула (локални услов у тачки $\Pi = P$).

6°. Напишимо израз (6.4) у облику интеграла

$$\sigma_k(P; x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d_t \left\{ \sum_{\lambda_\nu \leq t} a_\nu \Phi_\nu(P) \right\} \quad (6.9)$$

и образујмо разлику између (6.9) и (6.5)

$$\sigma_k(P; x) - \sigma_k^*(P; x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d_t \{A(P; \sqrt{t})\} = \sigma^k(x) \quad (6.10)$$

где је

$$A(P; \sqrt{t}) = \sum_{\lambda_v \leq t} a_v \Phi_v(P) - \sigma^*(P; \sqrt{t}).$$

Посматрајмо специјалан случај $m = 2$, тј. $k^* = 1/2$, $k = l + \delta > 1/2$. Са тако дефинисаним k процена (6.7) узима овакав облик: Ако је $l < 1/2$, тј. $l = 0$, $1/2 < \delta < 1$ (јер је $k = 0 + \delta > 1/2$), онда је

$$\sigma^k(x) = \sigma^\delta(x) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}(\delta - \frac{1}{2})}}\right) = o\left(x^{-\left\{\frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{2}\right) - \varepsilon\right\}}\right) \quad (6.11)$$

за свако $\varepsilon > 0$.

На основу (6.11), леме 2.1 и теореме 2.1 можемо доћи до закључка о G_θ^x — збирљивости реда $\sum a_v \Phi_v(P)$. На овај начин, под специјалном претпоставком да $f(\Pi) \in L^2(D^*)$, а у случају кад је $3/4 < \theta < 1$, долазимо до следећег поштрења теореме В. Г. Авакумовића [2].

ТЕОРЕМА 6.1. Претпоставке: (i) $f(\Pi) \in L^2(D^*)$, (ii) $3/4 < \theta < 1$ и $x > 1$.

Тврђење: Да би ред $\sum a_v \Phi_v(P)$ био збирљив G_θ^x ка суми $f(P)$, пошребно је и довољно да $\alpha(t)$ буде збирљиво G_θ^x ка суми нула.

Доказ: Из (6.11) на основу леме 2.1 следи

$$\sigma^1(x) = o\left(x^{-\left\{\frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{2}\right) - \varepsilon\right\}}\right) \quad (6.12)$$

На (6.12) применимо сада теорему 2.1 која у овом случају гласи: Из

$$\sigma^1(x) = o(x^{-(1-\theta)})$$

следи

$$G_\theta^x(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{за свако } x > 1. \quad (6.13)$$

Према томе из (6.12) следиће тврђење (6.13), ако је

$$\frac{1}{2} \left(\delta - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon = 1 - \theta.$$

Како је $1/2 < \delta < 1$, а ε можемо учинити произвољно малим, то је $3/4 < \theta < 1$ и за те θ важи (6.13), тј.

$$\begin{aligned} & \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x d_t \left\{ \sum_{\lambda_\nu \leq t} a_\nu \Phi_\nu(P) - \sigma^*(P; \sqrt{t}) \right\} = \\ &= \sum_{\lambda_\nu \leq x} (1 - e^{(\lambda_\nu - x)x^{-\theta}})^x a_\nu \Phi_\nu(P) - \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x d_t \{ \sigma^*(P; \sqrt{t}) \} = \\ &= o(1), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Пошто је у нашем случају $m=2$, то је

$$\sigma^*(P; \sqrt{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^*} f(\Pi) \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r}.$$

Ставимо ли ово у (6.14), добивамо

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_\nu \leq x} (1 - e^{(\lambda_\nu - x)x^{-\theta}})^x a_\nu \Phi_\nu(P) = \\ &= \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x d_t \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{D^*} f(\Pi) \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} \right\} + o(1) = \\ &= \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x \frac{1}{2\pi} d_t \left\{ \left(\int_{K_\rho} + \int_{D^* - K_\rho} \right) \left(f(\Pi) \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} \right) \right\} + o(1) = \\ &= \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x \frac{1}{2\pi} d_t \left\{ \int_{K_\rho} f(\Pi) \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} \right\} + \\ &+ \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x \frac{1}{2\pi} d_t \left\{ \int_{D^* - K_\rho} f(\Pi) \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} \right\} + o(1) = \\ &= J_1^* + J_2^* + o(1), \end{aligned} \quad (6.15)$$

где смо са K_ρ означили круг полупречника ρ ($0 < \rho \leq l_P$) са центром у тачки P .

Сада ћемо проценити интеграле J_1^* и J_2^* . У сврху процене интеграла J_1^* ставимо

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\pi} \int_{K_\rho} f(\Pi) \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} = \\ &= f(P) \frac{1}{2\pi} \int_{K_\rho} \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_{K_\rho} \{f(\Pi) - f(P)\} \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} = \\ &= H_1 + H_2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Увођењем поларних координата (r, φ) са полом у тачки P , добивамо

$$H_1 = f(P) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\rho J_1(r \sqrt{t}) d(r \sqrt{t}) = f(P) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho \sqrt{t}} J_1(u) du.$$

На основу познате релације $J_1(u) = -J_0'(u)$ имамо

$$\begin{aligned} H_1 &= -f(P) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho \sqrt{t}} J_0'(u) du = \\ &= -f(P) \{J_0(\rho \sqrt{t}) - J_0(0)\} = f(P) + o(1), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Даље је

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\rho \{f(r, \varphi) - f(0, 0)\} \sqrt{t} J_1(r \sqrt{t}) dr = \\ &= \sqrt{t} \int_0^\rho J_1(r \sqrt{t}) dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{f(r, \varphi) - f(0, 0)\} d\varphi = \\ &= \sqrt{t} \int_0^\rho J_1(r \sqrt{t}) g(r) dr = \alpha(t). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Из (6.16), (6.17) и (6.18) излази

$$H = f(P) + o(1) + \alpha(t). \quad (6.19)$$

Пошто је G_θ^* регуларан поступак збирљивости, а с обзиром на претпоставку о функцији $\alpha(t)$ и с обзиром на (6.19) добивамо

$$J_1^* = f(P) + o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.20)$$

Сада ћемо проценити интеграл

$$\begin{aligned} J_2^* &= \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x \frac{1}{2\pi} d_t \left\{ \int_{D^* - K_\rho} f(\Pi) \sqrt{t} J_1(r\sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} \right\} = \\ &= \int_{D^* - K_\rho} f(\Pi) dF_\Pi \frac{1}{2\pi r} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x d_t \{ \sqrt{t} J_1(r\sqrt{t}) \} = \\ &= - \int_{D^* - K_\rho} f(\Pi) h(r; x) dF_\Pi, \end{aligned}$$

где је

$$h(r; x) = - \frac{1}{2\pi r} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^x d_t \{ \sqrt{t} J_1(r\sqrt{t}) \}.$$

В. Г. Авакумовић [2] је доказао да је

$$h(r; x) = O\left(x^{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Одавде излази

$$h(r; x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{за све } x > \{2(2\theta - 1)\}^{-1}. \quad (6.21)$$

Како је $1 > \{2(2\theta - 1)\}^{-1}$ за свако $\theta > 3/4$, то за наше посматране вредности од θ и x важи (6.21), па је према томе

$$J_2^* = o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.22)$$

На основу (6.15), (6.20) и (6.22) излази

$$\sum_{\lambda_\nu \leq x} (1 - e^{(\lambda_\nu - x)x^{-\theta}})^x a_\nu \Phi_\nu(P) = f(P) + o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

чиме је теорема 6.1 доказана.

Упоређујући ову теорему са теоремом В. Г. Авакумовића [2] видимо да је у њој κ мање него што је у теорему В. Г. Авакумовића, јер је

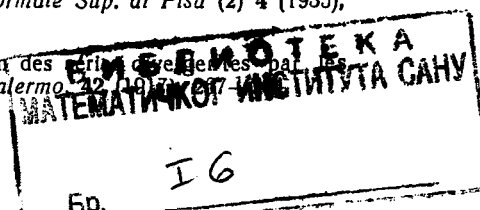
$$\frac{3}{4} \frac{1}{\theta - 1/2} > 1, \quad (1/2 < \theta < 1),$$

али она важи само за $3/4 < \theta < 1$ уз претпоставку $f(\Pi) \in L^2(D^*)$, док споменута теорема В. Г. Авакумовића важи за $1/2 < \theta < 1$ уз општију претпоставку $f(\Pi) \in L^A(D^*)$.

(Саопшћено на седници Мат. института 28-XI-56)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Avadhanl T. V. — On the summability of eigenfunction expansions I, *J. Indian Math. Soc.* XVIII, 1 (1954), 9—18.
- [2] Avakumović V. G. — Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung, *Math. Scand.* 4 (1956), 161—173.
- [3] Bochner S. — Summation of multiple Fourier series by spherical means, *Trans. American Math. Soc.* 40 (1936), 175—207.
- [4] Chandrasekharan K. — Minakshisundaram S. — Typical means Bombay 1952.
- [5] Hardy G. H. — Divergent Series, Oxford at the Clarendon Press, 1949.
- [6] Hardy and Littlewood — Some new convergence criteria for Fourier series, *Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa* (2) 3 (1934), 43—62.
- [7] Карамата Ј. — О једном општем О-инверсном ставу, *Рад Југ. академије*, 261 (81), Загреб 1938.
- [8] Кнопп К. — Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen, IV Auflage, Berlin und Heidelberg, Springer-Verlag, 1947.
- [9] Левитан Б. М. — О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, *Доклады Академии наук СССР*, XC № 2 (1953), 133—135.
- [10] Minakshisundaram S. — On expansion in eigenfunctions of boundary value problems III, *J. Indian Math. Soc.* 6 (1942), 153—167.
- [11] Moore C. N. — On the application of Borel's method to the summation of Fourier series, *Proc. Nat. Acad. Sc.* 11 (1925), 284—287.
- [12] Morgan G. W. — On the new convergence criteria for Fourier series of Hardy and Littlewood, *Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa* (2) 4 (1935), 373—382.
- [13] Valiron G. — Remarques sur la sommation des séries divergentes par les méthodes de M. Borel, *Rendic. Circ. Mat. Palermo* 42 (1907), 247—254.



SUR UN PROCÉDÉ DE SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES

par

M. MARAVIĆ

Ce travail est consacré à l'étude d'un procédé de sommation (G_θ^λ) défini par (0.1) respectivement par (0.2). Ce procédé, ainsi que celui de Valiron, représente une suite continue de procédés essentiellement différents entre eux, de sorte qu'à chaque θ correspond un autre intervalle de convergence de la forme $(t, T) \equiv (t, t+\varepsilon)$, quelque soit le nombre positif λ . Le procédé s'applique avec succès aux problèmes de sommation des séries de Fourier généralisées.

Entre de nombreuses questions que soulève ce procédé, l'auteur s'est borné aux questions suivantes:

Dans le premier chapitre il démontre un théorème de nature abélienne, c'est-à-dire un théorème donnant les propriétés limites du procédé de sommation lorsqu'on connaît les propriétés correspondants de la fonction.

Dans le deuxième chapitre on démontre le théorème 2.1 dans lequel, du fait que la moyenne de Riesz $\sigma^k(x)$ tend vers la valeur limite avec une vitesse déterminée, on conclut que $G_\theta^\lambda(x)$ tend vers cette même valeur limite pour tous les $\lambda > k$, k étant un entier, positif.

Dans le troisième chapitre est donné un théorème ayant trait à la comparaison des sommabilités G_θ^λ pour les différentes valeurs de λ . La démonstration du théorème est donnée sous une supposition spéciale (3.1) qui limite sa généralité.

Dans le quatrième chapitre on donne le lemme 4.1 permettant de conclure que, de $A(x) \rightarrow A(G_\theta^\lambda)$, $x \rightarrow \infty$, en supposant $A(t) = O(1)$, $A(x^b)$ ($b = (1-\theta)^{-1}$) est sommable vers A par le procédé G_θ^λ dont le noyau est celui de Wiener. À l'aide de ce lemme, s'appuyant sur le théorème de Wiener, on démontre le théorème d'inclusion 4.1, qui en réalité, n'est pas le théorème d'inclusion proprement dite à cause de la supposition faite sur la fonction $A(t)$.

Dans le cinquième chapitre on a traité le problème d'inversion du procédé G_θ^λ . On y démontre que de $G_\theta^\lambda(x) \rightarrow A$ $x \rightarrow \infty$ et de la convergence (5.1) suit $A(t) \rightarrow A$, $t \rightarrow \infty$.

Enfin, dans le sixième chapitre on donne une application du procédé G_θ^λ aux problèmes de sommation des séries de Fourier généralisées. On la trouve au théorème 6.1 qui est démontré en appliquant le théorème 2.1, le lemme 2.1 et une évaluation de Levi-tan (6.7).