Зборник радова С. А. Н. L — Математички институт С. А. Н. књ. 5, 1956
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences L
Institut Mathématique № 5, 1956

РАСТКО СТОЈАНОВИЋ

√

КРЕТАЊЕ ЧВРСТОГ ТЕЛА У РИМАНОВИМ ПРОСТОРИМА КОНСТАНТНЕ КРИВИНЕ

УВОД

Намера нам је да у овом раду проучимо кретање чврстог тела у Римановим просторима K_n константне кривине. Такво чврсто тело је у ствари генерализација чврстог тела у еуклидским просторима E_n и мора да садржи дефиницију чврстог тела у E_n као дегенеративни случај.

Проблем кретања чврстог тела ма у каквом Римановом простору V_n први је решавао Th. De Donder[1] [1], који је за кретање чврстог тела дошао до услова израженог једначинама

$$v_{a,b} + v_{b,a} = 0, \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

где су v_a коваријантне координате брзине тачака чврстог тела а $v_{a,b}$ означавају коваријантне изводе координата брзине v_a по координатама x^b. Међутим, De Donder није проучавао интеграбилност тих једначина, већ је чинио претпоставке о метричкој форми простора V_n, па је проучавао кретање у равним просторима и у еуклидским просторима тангенцијалним на V_n ([2]).

Метод De Dondera су применили на даља проучавања P. Melhior ([3] и [4]) и Van Bergen ([5] и [6]), али у својим радовима ти аутори нису дали ни геометриски ни механички аспект проблема, већ су се задржали на основним једначинама (1) које је извео De Donder и на њиховој обради. Van Bergen је у [6] дотакао питање кретања чврстог тела у K_n, где је показао да једначине кретања какве је извео De Donder за равне просторе могу да се примене и на K_n са пројективном метричком формом.

---

[1] Бројеви у заградама [ ] односе се на литературу на крају овог рада.

Ми ћемо у овоме раду да пођемо од израза за инфинитезимално померање чврстог тела у K_n и од једначина сличних једначинама (1), али у облику који ће нам омогућити далеко дубље третирање проблема. При томе ћемо проблем кретања чврстог тела у K_n везати за питање особина група кретања у K_n, јер нам изгледа да резултати теорије инфинитезималних непрекидних трансформационих група и група кретања једини омогућавају потпуно решење постављеног проблема.

Нека је дат неки Риманов простор V_n метричком формом

(2) $$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

где је g_{ij} два пута коваријантан метрички тензор, који је, у општем случају, функција положаја у V_n, а $x^1, x^2, \ldots, x^n$ су координате тачке у V_n.

Под Римановом кривином простора подразумевамо кривину у некој тачки геодезиске површине формиране у тој тачки простора у односу на два правца $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ кроз ту тачку; кривина K је дата изразом

(3) $$K = \frac{R_{hijk}\, \lambda^h \mu^i \lambda^j \mu^k}{(g_{hj}\, g_{ik} - g_{kk}\, g_{ij})\, \lambda^h \mu^i \lambda^j \mu^k},$$

где је R_{hijk} Риман-Кристофелов тензор, а λ^i и μ^i су координате вектора $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$. Ако у некој тачки посматраног простора V_n кривина K не зависи од праваца вектора $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$, кажемо да је у тој тачки простор изотропан и кривина константна, и ту имамо

(4) $$R_{hijk} = K\,(g_{hj}\, g_{ik} - g_{hk}\, g_{ij});$$

ако је V_n читав изотропан, онда је, према Schur-овој теореми [7], $K = \text{const.}$ у целом простору. Такве V_n називамо просторима константне кривине и означаваћемо их са K_n.

Предња разматрања о просторима који су цели изотропни важе само за $n > 2$, и ми ћемо се задржавати само на случајевима када је тај услов испуњен, док је случај $n = 2$ у једном ранијем раду проучен [10].

За систем тачака $M_1, M_2, \ldots$ у Римановом простору константне кривине K_n рећи ћемо да претставља чврсто тело у K_n ако растојање између ма које две тачке M_μ и M_ν, мерено дуж неке арбитрерне криве која пролази кроз те две тачке, у сваком тренутку времена t остаје непромењено када се систем тачака $M_1, M_2, \ldots$ помера у току времена t:

(5) $$\frac{\delta}{\delta t} \int_{M_\mu}^{M_\nu} ds = 0;$$

при томе се интеграција врши дуж те арбитрерне криве.

Како је крива дуж које се врши интеграција арбитрерна, једначина (5) се своди на

$$\frac{\delta}{\delta t}\sqrt{g_{ij}\,dx^i\,dx^j}=0, \tag{6}$$

одакле се лако добивају De Donder-ове условне једначине (1).

I. КИНЕМАТИКА ЧВРСТОГ ТЕЛА У K_n

1. *ПОЛОЖАЈ ЧВРСТОГ ТЕЛА У K_n*

У уводу је уведен један систем координата — $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — у K_n у односу на који је написан израз (2) за метричку форму и дефинисано чврсто тело. Потражимо сада да ли у K_n постоји још неки систем координата, које ћемо обележити са $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$, такав да у односу на њега координате метричког тензора $\bar{g}_{ij}$ буду исте функције од $\bar{x}$'ова као што су координате g_{ij} функције од x'ова и да трансформација $x \rightleftarrows \bar{x}$ буде изометрична. Овај последњи захтев је еквивалентан са већ датом дефиницијом чврстог тела у K_n.

У односу на координате $\bar{x}$ метричка форма простора K_n по претпоставци гласи

$$ds^2=\bar{g}_{ij}\,d\bar{x}^i\,d\bar{x}^j. \tag{7}$$

Због претпоставке о изометричности трансформација $x \rightleftarrows \bar{x}$, изрази (2) и (7) за метричку форму морају бити једнаки:

$$g_{ij}\,dx^i\,dx^j=\bar{g}_{ij}\,d\bar{x}^i\,d\bar{x}^j\,;$$

одатле следи да између координата x и $\bar{x}$ треба да постоје везе које би задовољиле једначине трансформација координата два пута коваријантног тензора $\bar{g}_{ij}$:

$$\bar{g}_{ij}=g_{kl}\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}. \tag{8}$$

Ставимо ли

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}=X^i_l, \tag{9}$$

можемо са том ознаком написати везе између Кристофелових симбола везаних за метричке форме (2) и (7):

$$\frac{\partial X^i_l}{\partial \bar{x}^m}=\overline{\left\{ {p \atop lm} \right\}}X^i_p-\left\{ {i \atop jk} \right\}X^j_l\,X^k_m. \tag{10}$$

Систем једначина (10) претставља услове интеграбилности једначина (9) и проблем се своди на одређивање n величина x^i и n^2 величина X^i_l, који треба да задовољавају од $^1/_2\, n(n+1)$ једначина (8). Услови интрерграбилности једначна (10) су

$$(11) \qquad R_{ijkl} = R_{pqrs} X^p_i X^q_j X^r_k X^s_l .$$

За просторе константне кривине K_n условне једначине (11) су задовољене као непосредна последица једначина (8), због (4), па стога једначине (9) и (10) допуштају $n(n+1)$ решења по x^i и X^i_l са $n(n+1)$ интеграционом константом. Како та решења морају да задовољавају $^1/_2\, n(n+1)$ једначина (8), то ће трансформационе једначине садржати свега $^1/_2\, n(n+1)$ независних интеграционих констаната $p^{\alpha'}$, $(\alpha' = 1, 2, \ldots, {}^1/_2\, n(n+1)$ и гласиће ([11], с. 60; [9], с. 23):

$$(12) \qquad x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; p^1, \ldots, p^r) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ r = {}^1/_2\, n(n+1) \end{pmatrix}.$$

Претпоставимо сада да се систем координата $\bar{x}$ помера заједно са посматраним чврстим телом у K_n, када то тело мења свој положај и да су координате $\bar{x}$ ма које тачке M тела непроменљиве за време тог померања:

$$(13) \qquad \frac{\delta \bar{x}^i_M}{\delta t} = 0.$$

Под том претпоставком трансформационе једначине (12) у ствари претстављају трансформацију подручја дефинисаног у односу на координате $\bar{x}$ у подручје дефинисано у односу на координате x. Та трансформација је изометрична и једначине (12) су коначне једначине трансформација r-точлане групе кретања G_r у K_n ([9]. с. 235). Параметри групе су константе интеграције $p^1, p^2, \ldots, p^r$

Када тачке чврстог тела мењају у K_n свој положај у току времена t, њихов положај је одређен једначинама $x^i = x^i(t)$. Међутим, из (12), због (13), следи да мора бити

$$(14) \qquad p^{\alpha'} = p^{\alpha'}(t), \qquad (\alpha' = 1, 2, \ldots, r)$$

па ове једначине претстављају коначне једначине кретања посматраног чврстог тела. Како су параметри $p^1, \ldots, p^r$, њих r на броју, $r = {}^1/_2\, n(n+1)$, у K_n међусобно независни, значи да је кретање чврстог тела у K_n одређено помоћу r једначина (14), а за неки тренутак t положај тела је потпуно одређен помоћу r вредности параметара $p^{\alpha'}$. Отуда имамо:

Чврсто тело у n-димензионалном Римановом простору константне кривине има $^1/_2\, n(n+1)$ степени слободе.

2. ИНФИНИТЕЗИМАЛНА ПОМЕРАЊА ЧВРСТОГ ТЕЛА У K_n

Нека параметри $p^{\alpha'}$ у једначинама (12) промене своје вредности за $\delta p^{\alpha'}$; координате тачака тела ће променити своје вредности за δx^i:

$$x^i+\delta x^i=x^i\,(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^n;\; p^1+\delta p^1,\ldots,p^r+\delta p^r). \tag{15}$$

Развијмо овај израз у ред у близини почетног положаја чврстог тела, који је окарактерисан вредностима параметара $p^{\alpha'}$ и координатама тачака тела x^i:

$$x^i+\delta x^i=x^i+\frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}}\delta p^{\alpha'}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 x^i}{\partial p^{\alpha'}\partial p^{\beta'}}\delta p^{\alpha'}\delta p^{\beta'}+\cdots.$$

Одавде непосредно добивамо за координате инфинитезималног померања

$$\delta x^i=\frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}}\delta p^{\alpha'}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x^i}{\partial p^{\alpha'}\delta p^{\beta'}}\delta p^{\alpha'}\delta p^{\beta'}+\cdots.$$

Зауставимо ли се само на малим величинама првог реда у односу на прираштаје δp параметара, за координате померања тачака чврстог тела имамо:

$$\delta x^i=\frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}}\delta p^{\alpha'}. \tag{16}$$

Изводи $\partial x^i/\partial p^{\alpha'}$ зависе, према (12), од положаја тачке у односу на систем координата $\bar{x}$ и од вредности параметара $p^{\alpha'}$. Међутим, трансформације (12) припадају непрекидној групи кретања G_r, па стога, у изразу за извод $\partial x^i/\partial p^{\alpha'}$, кад елиминишемо променљиве $\bar{x}$ помоћу (12), добивамо изразе облика (в. [12], с. 376; то је тзв. Лиов први основни став теорије непрекидних трансформационих група; в. такође [4], с. 221):

$$\frac{\partial x^i}{\partial p^{\alpha'}}=\sum_{1}^{r}{}_{\beta'}\,\xi^i_{\beta'}(x^1,\ldots,x^n)\,\psi^{\beta'}_{\alpha'}(p^1,\ldots,p^r). \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ldots,n\\ \alpha=1,\ldots,r\end{pmatrix} \tag{17}$$

у коме су изводи координата тачке по параметру линеарне функције неких функција $\xi^i_{\beta'}$, које зависе искључиво од координата тачке у K_n и неких функција $\psi^{\beta'}_{\alpha'}$, које зависе искључиво од параметара $p^1,\ldots,p^r$, које ћемо звати параметрима положаја чврстог тела у K_n.

Инфинитезимална померања (16) можемо сада да изразимо у облику

$$\delta x^i=\xi^i_{\alpha'}(x)\,\psi^{\alpha'}_{\beta'}(p)\,\delta p^{\beta'}, \tag{18}$$

у коме r вектора са контраваријантним координатама ξ^i одређују правце инфинитезималних померања тачака чврстог тела, па стога величине $\xi^i_{\alpha'}$ можемо звати коефицијентима инфинитезималног померања. √

Ако су x'^i координате тачака после извесног инфинитезималног померања δx^i, а x^i су координате тих тачака пре померања, онда на основу (15) имамо:

$$x'^i = x^i + \delta x^i, \tag{19}$$

односно

$$x'^i - x^i = \delta x^i = \xi^i_{\alpha'}(x)\, \psi^{\alpha'}_{\beta'}(p)\, \delta p^{\beta'}. \tag{19'}$$

Једначине (19), односно (19'), јесу једначине инфинитезималних трансформација наше групе кретања G_r. При тим трансформацијама елемент лука, сходно дефиницији чврстог тела у K_n, мора да остане инваријантан:

$$\delta(ds) = 0.$$

Из (12) следи

$$\delta(ds^2) = \delta g_{ij}\, dx^i\, dx^j + g_{ij}\,(\delta\, dx^i\, dx^j + dx^i\, \delta\, dx^j),$$

а како је

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\, \delta x^k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\, \xi^k_{\alpha'}\, \psi^{\alpha'}_{\beta'}\, \delta p^{\beta'}$$

и

$$\delta\, dx^i = d(\delta x_i) = \frac{\partial \xi^i_{\alpha'}}{\partial x^k}\, dx^j\, \psi^{\alpha'}_{\beta'}\, \delta p^{\delta'}.$$

то ће бити

$$\delta(ds^2) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\, \xi^k_{\alpha'}\, \psi^{\alpha'}_{\beta'}\, \delta p^{\beta'}\, dx^i\, dx^j + g_{ij}\left(\frac{\partial \xi^i_{\alpha'}}{\partial x^k}\, dx^j + dx^i\, \frac{\partial \xi^j_{\alpha'}}{\partial x^k}\right) \psi^{\alpha'}_{\beta'}\, \delta p^{\beta'}\, dx^k,$$

или, после измене муклих индекса

$$\delta(ds^2) = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\, \xi^k_{\alpha'} + g_{kj}\, \frac{\partial \xi^k_{\alpha'}}{\partial x^i} + g_{ik}\, \frac{\partial \xi^k_{\alpha'}}{\partial x^j}\right) \psi^{\alpha'}_{\beta'}\, dx^i\, dx^j\, \delta p^{\beta'}.$$

Пошто промена елемента лука мора да буде једнака нули при трансформацијама (19), и то за све вредности променљивих x^i и параметара $p^{\beta'}$, следи да коефицијенти померања $\xi^i_{\alpha'}$ морају да задовољавају систем Killing-ових једначина ([13], с. 167; [9], с. 234; [14], с. 328):

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\, \xi^k_{\alpha'} + \frac{\partial \xi^k_{\alpha'}}{\partial x^i}\, g_{jk} + \frac{\partial \xi^k_{\alpha'}}{\partial x^j}\, g_{ki} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i, j, k = 1, \ldots, n \\ \alpha' = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Трансформације (12) су међусобно потпуно независне, а отуда следи да су и координате δx^i инфинитезималних померања, односно инфинитезималне трансформације, што значи потпуно исто, међусобно потпуно независне, па стога ранг матрице

$$\Xi = \begin{Vmatrix} \xi_1^1, \ldots, \xi_1^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_r^1, \ldots, \xi_r^n \end{Vmatrix}$$

мора бити n. Како је то потребан и довољан услов да наша група G_r буде транзитивна ([9], с. 226), значи да трансформације (12) сваку тачку простора K_n могу превести у ма коју другу унапред дату тачку тог простора, односно да:

Чврсто тело у K_n можемо превести у ма који, произвољан положај у том простору, тако да се свака тачка тела може довести до поклапања са унапред одређеним тачкама у K_n, под условом да распоред тих унапред датих тачака задовољава услове (5) *из дефиниције чврстог тела у K_n.*

3. *КРЕТАЊЕ ЧВРСТОГ ТЕЛА У K_n ОКО НЕПОМИЧНЕ ТАЧКЕ*

Уочимо у K_n тачку A, која или припада посматраном чврстом телу, или је за њега чврсто везана, и претпоставимо да се тело креће тако да је за цело време кретања тачка A непокретна у K_n. Отуда следи да коефицијенти померања $\xi^i_{\alpha'}$ морају у тачки A имати вредност $\xi^i_{\alpha'}=0$, а коначне једначине трансформације (12) остављају тачку A инваријантном.

Група G_r је, према претходном одељку, транзитивна и ранг матрице Ξ је n. Међутим, услед претпоставке о непомичности тачке A следи да ће у тој тачки постојати свега $r-n$ међусобно независних трансформација групе G_r, које ће образовати неку подгрупу $G_N\,(N=r-n={}^1/_2\,n\,(n-1))$ групе G_r, а то је подгрупа стабилности тачке A за групу G_r.

Зато можемо рећи:

Чврсто тело у K_n, које се креће око једне непомичне тачке, има ${}^1/_2\,n\,(n-1)$ степени слободе.

Коначне једначине (12) се за овај случај своде на једначине са свега ${}^1/_2\,n\,(n-1)$ независних параметара p^α, $(\alpha=1,\ldots,n\,(n-1)/2)$, а изрази за инфинитезимална померања ће бити:

$$\delta x^i=\xi^i_\alpha(x)\,\psi^\alpha_\beta(p)\,\delta p^\beta \quad (\alpha,\beta=1,\ldots,N;\ i=1,\ldots,n)\,. \tag{21}$$

Група G_N је интранзитивна, па према томе за сваку тачку тела постоји неки минимални инваријантни варијетет у чије се тачке може превести свака одговарајућа тачка чврстог тела. Пошто је тачка A стабилна за групу G_N, њен се минимални инваријантни варијетет своди на саму ту тачку. N параметара $p^1, \ldots, p^N$ зваћемо параметрима оријентације чврстога тела у K_n.

Докажимо сада став:

Кад се чврсто тело у K_n креће око једне непомичне тачке, све тачке тела припадају одређеним хиперповршинама фамилије геодезиски паралелних хиперповршина константне кривине у K_n.

Изаберимо за почетак координатног система у K_n непомичну тачку A; према дефиницији чврстог тела, ако за криву дуж које меримо растојање између тачака изаберемо геодезиску линију у K_n која пролази кроз тачке између којих меримо растојање, из (5) ће бити:

$$F(x_A^i, x^i) \equiv \int_A^{M(x)} ds = \text{const.}, \tag{22}$$

где су $x_A = 0$ координате тачке A, x^i текуће координате неке тачке M тела, а вредност константе са десне стране једначине (22) је одређена вредношћу координата почетног положаја те тачке.

Изаберимо у тачки A као координатноме почетку такав систем координата да координатне криве x^n буду геодезиске линије. Пошто се интеграција (5) врши сад дуж геодезиских линија (22) се своди на

$$x^n = \text{const.}, \tag{23}$$

за сваку тачку тела, а како је из (22):

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} \delta x^i = 0,$$

очигледно је да су померања тачака тела увек управна на нормале на хиперповршинама (22), односно (23). Према томе хиперповршине (22) заиста претстављају фамилију геодезиски паралелних хиперповршина у K_n, а геодезиске линије које пролазе кроз тачку A јесу њихове ортогоналне трајекторије. Тиме је први део става доказан.

Да бисмо доказали да су хиперповшине (22), односно (23) константне кривине, доказаћемо прво неке помоћне ставове.

I ПОМОЋНИ СТАВ. *Геодезиски паралелне хиперповршине неког Римановог простора V_n, чије су ортогоналне трајекторије геодезиске линије у V_n које пролазе кроз једну сталну тачку A тога простора, налазе се у међусобном конформном односу.*

Метричку форму у V_n можемо написати у облику

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^j\, dx^i + e_n (dx^n)^2, \qquad (i, j = 1, \ldots, n-1) \tag{24}$$

где је x^n лук геодезиске линије која пролази кроз тачку A и која је управна на фамилију геодезиски паралелних хиперповршина.

За неку одређену вредннст $x^n = \text{const.}$ метричка форма (24) јесте метричка форма одговарајуће хиперповршине посматране фамилије геодезиски паралелних хиперповршина.

У тачки A је $x^n = 0$, а одговарајућа хиперповршина се своди на тачку, па стога у A мора бити $g_{ij} = 0$.

Ако сада на једној од хиперповршина посматране фамилије $x^n = x^n_0$ уочимо два јединична вектора $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$, тиква да је $\lambda^n = \mu^n = 0$, косинус угла између њих је

$$\cos(\vec{\lambda}; \vec{\mu}) = \frac{{}_0g_{ij}\,\lambda^i\,\mu^j}{\{({}_0g_{ij}\,\lambda^i\,\lambda^j)\,({}_0g_{ij}\,\mu^i\,\mu^j)\}^{1/2}}.$$

Извршимо ли паралелно померање тих вектора дуж геодезиске линије x^n до неке друге хиперповршине $x^n = x^n_1$ посматране фамилије, вредност координата вектора се неће променити, јер смо извршили паралелно померање тих вектора дуж геодезиске линије. Отуда следи да координате метричког тензора на појединим хиперповршинама простора V_n морају бити пропорционалне:

$${}_0g_{ij} = U\,{}_1g_{ij},$$

а одговарајући елементи лукова на тим хиперповршинама су у односу

$$ds_0^2 = U\,ds_1^2,$$

где је U нека функција у општем случају од $x^1, \ldots, x^n$ и има ту особину да је $U(x^n = 0) = 0$. Пропорционалност метричког тензора и метричких форми двеју хиперповршина јесте потребан и довољан услов да се те хиперповршине налазе у конфорном односу, па је тиме I помоћни став доказан.

II ПОМОЋНИ СТАВ: *Ако неки Риманов простор допушта фамилију геодезиски паралелних хиперповршина које се налазе у конформном односу, линије кривина тих хиперповршина су неодређене.*

Потребан и довољан услов да нека хиперповршина има неодређене линије кривина јесте да су координате њене друге основне форме $\Omega_{ij}\,(i, j = 1, \ldots, n-1)$ пропорционалне координатама прве основне метричке форме g_{ij} посматраног простора V_n. Нека једначине хиперповршина V_{n-1} у V_n буду

$$x^\alpha = x^\alpha(y^1, \ldots, y^{n-1}), \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

и нека координатне линије са параметром x^n буду геодезиске линије у V_n, управне на V_{n-1}, тако да су хиперповршине V_{n-1} дате са $x^n = \text{const.}$ Према Bianchi-овој теореми ([15], с. 359; [9], с. 158), координате другог основног тензора су

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}\right)_{x^n = 0}.$$

Пошто су хиперповршине V_{n-1}, по претпоставци, у међусобно конформном односу, за g_{ij} имамо

$$g_{ij} = \varphi\, g'_{ij},$$

где φ зависи од $x^1, \ldots, x^n$, а g'_{ij} само од $x^1, \ldots, x^{n-1}$, па је

$$\Omega_{ij} = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^n} \right)_{x^n = 0} \right] g'_{ij},$$

тј. због $g'_{ij} = \dfrac{1}{\varphi} g_{ij}$:

$$\Omega_{ij} = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^u} \right)_{x^n = 0} \right] g_{ij}.$$

те је потребан и довољан услов да хиперповршине V_{n-1} имају неодређене линије кривине задовољен.

Из I и II помоћног става и Levy-еве теореме ([16]; [9], с. 218), која тврди да је за константност кривине хиперповршина Римановых простора потребно и довољно да линије кривина тих хиперповршина буду неодређене непосредно следи други део нашег основног става.

G_N је група стабилности непомичне тачке A, чврсто везане за посматрано чврсто тело у K_n, па су коначне једначине групе

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n;\ p^1, \ldots, p^N) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Проучимо сада кретање чврстог тела у K_n око непомичне тачке када то тело има један степен слободе, односно када се група G_N сведе на подгрупу G_1, добивену из (25) стављањем да су сви параметри $p^2, \ldots, p^N$ константни за цело време кретања, а само један параметар, p^1, да може да узима произвољне вредности. За координате инфинитезималних померања неке тачке $M(x)$ посматраног чврстог тела имамо у том случају

$$\delta x^i = \xi^i(x)\, \psi(p^1)\, \delta p^1. \tag{26}$$

У K_n можемо увек изабрати такав систем координата да буде $\xi^i = 0$, $(i = 1, \ldots, n-1)$; $\xi^n = 1$. Такође, трансформацијом

$$q = \int_{p_0^1}^{p^1} \psi(p^1)\, dp^1$$

добивамо за (26):

$$\delta x^i = 0, \qquad \delta x^n = \delta q \qquad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{27}$$

Потражимо сада геометриско место тачака чврстог тела у простору K_n које ће бити стабилне, тј. које неће мењати свој положај и своје координате при инфинитезималним померањима (27).

Изаберемо ли координате тако да буде $\xi^1 = \ldots = \xi^{n-1} = 0$, $\xi^n = 1$, Килингове једначине (20) ће бити:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} = 0, \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{28}$$

одакле следи да координате метричког тензора не зависе од x^n. Интензитет померања ма које тачке у простору K_n, при инфинитезималном померању (27) групе G_1, јесте

$$(\delta s)^2 = g_{ij}\,\delta x^i\,\delta x^j \equiv g_{nn}\,(\delta q)^2,$$

па је очигледно да се неће померати само оне тачке у простору K_n које задовољавају једначину

$$g_{nn} = 0. \tag{29}$$

Због (28) можемо ставити

$$g_{nn} \equiv f(x^1, \ldots, x^{n-1}) = 0, \tag{30}$$

одакле се види да једначина (29) одређује неки потпростор у K_n, који је стабилан при трансформацијама групе G_1 и садржи тачку A, која је такође стабилна при тим трансформацијама. Кроз тачку A у потпростору (29) можемо поставити $n-2$ међусобно линеарно независних вектора, који ће бити инваријантни при трансформацијама групе G_1, датим са (27) ([14], с. 294), а отуда следи да постоји неки $(n-2)$-димензиони, тотално геодезиски потпростор простора K_n, који садржи тачку A и стабилан је при трансформацијама групе G_1. Отуда имамо:

У Римановим просторима константне кривине K_n инфинитезимално померање чврстог тела око једне непомичне тачке може се раставити у низ од $^1/_2\, n(n-1)$ међусобно независних померања око $^1/_2\, n(n-1)$ тотално геодезиских $(n-2)$-димензионих потпростора простора K_n који садрже ту тачку.

Код инфинитезималног померања одређеног једначинама (26) постоје два међусобно потпуно независна чиниоца: ξ^i зависи искључиво од пололожаја тачке у чврстом телу, а ψ зависи искључиво од вредности параметра p^1. Ако ставимо да је $\delta u^1 = \psi(p^1)\,\delta p^1$, за инфинитезимално померање имамо

$$\delta x^i = \xi^i(x)\,\delta u^1.$$

У општем случају померања око непомичне тачке можемо ставити

$$\delta u^\alpha = \psi^\alpha_\beta(p)\,\delta p^\beta,$$

па једначине (21) гласе

$$\delta x^i = \xi^i_\alpha\,\delta u^\alpha. \tag{31}$$

Величине δu^α, пошто не зависе од положаја у K_n, одређују извесна померања у неком конфигурационом простору A_N, који је конфигурациони кинематички простор за чврсто тело у K_n; у A_N су p'ови координате тачке. На основу једначина (31) можемо рећи да су померања тачака чврстог тела у K_n у ствари померања репрезентативне тачке у A_N, пресликана на поједине тачке тела. Величине ξ^i_α при томе играју улогу елемената матрице која то пресликавање врши.

4. *КРЕТАЊЕ ЧВРСТОГ ТЕЛА У K_n СА СТАЛНОМ ОРИЈЕНТАЦИЈОМ*

Ставимо да су, у општој групи трансформација G_r, N параметра подгрупе G_N, коју смо проучавали у претходном одељку, стални. Тако добивена подгрупа $G_n\,(n=r-N)$ јесте транзитивна и њене једначине инфинитезималног померања су

$$\delta x^i = \xi^i_{k'}(x)\,\psi^{k'}_{l'}(p)\,\delta p^{l'}, \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,n \\ k',\,l'=N+1,\ldots,r \end{pmatrix}$$

а коначне једначине

$$x^i = x^i(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^n;\,p^{N+1},\ldots,p^r). \tag{32}$$

Уочимо неку тачку A која је чврсто везана за посматрано чврсто тело, и нека у њој буде почетак система координата $\bar{x}$, тако да је $\bar{x}_A=0$; тада се једначине (32) своде на облик

$$x^i_A = x^i(p^{N+1},\ldots,p^r), \tag{33}$$

одакле следи да n параметара транзитивне групе G_n јесу функције положаја једне одређене, али арбитрерне тачке тела.

Пошто је група G_n транзитивна, ранг матрице $\|\xi^i_{i'}\|$ је n, и једначине (33) допуштају решења по параметрима:

$$p^{i'} = p^{i'}(x^1_A,\ldots,x^n_A), \qquad (i'=N+1,\ldots,r)$$

што заменом у (32) даје

$$x^i = x^i(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^n;\,x^1_A,\ldots,x^n_A),$$

па за координате инфинитезималног померања тачака тела имамо

$$\delta x^i = \xi^i_{j'}(x)\,\psi^{j'}_k(x_A)\,\delta x^k_A. \tag{34}$$

Овако померање одговара у еуклидском простору транслацији, о чему у нашем случају не може бити речи. При транслаторном померању све тачке тела описују лукове једнаких дужина и вектори померања $\vec{\xi}_i$, при томе припадају пољу паралелних вектора у K_n. Да би вектори $\vec{\xi}_i$, припадали пољу паралелних вектора у K_n, морале би њихове координате да задовољавају систем једначина

$$\frac{\partial \xi^i_{i'}}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} \xi^k_{i'} = 0. \tag{35}$$

Услови интеграбилности ових једначина су

$$\xi^i_{i'}\,R^i_{jkl} = 0. \tag{36}$$

Међутим, за K_n је, према (4),

$$R_{pjkl} = K\,(g_{pk}\,g_{jl} - g_{pl}\,g_{jk}),$$

па је

$$R^i_{jkl} = K\,(g_{jl}\,\delta^i_k - g_{jk}\,\delta^i_l).$$

Заменом ове вредности у (36) добивамо као услов интеграбилности систем једначина (35)

(37) $$\xi^j_{i'}\,(g_{jl}\,\delta^i_k - g_{jk}\,\delta^i_l) = 0.$$

Како је $\delta^k_k = 1$ (не сабирати по индексу k) и $\delta^k_l = 0$ за $k \neq l$, то за $i = k$ имамо $\xi^j_{i'}\,g_{jl} = 0$. За $i = l$, $k \neq l$, имамо $\xi^j_{i'}\,g_{jk} = 0$, па се једначине (37) своде на облик

(38) $$\xi^j_{i'}\,g_{jk} = 0,$$

што важи за све вредности индекса k.

За просторе са дефинитном метриком је $|g_{ij}| \neq 0$, простори са индефинитном метриком допуштају бесконачно много решења једначина (38), а за равне просторе једначине (36) су идентички задовољене због $R^i_{jkl} = 0$. Отуда имамо:

Риманови простори константне кривине не допуштају транслаторно померање чврстог тела, уколико нису равни, или им метрика није индефинитна.

n^2 величина $\xi^i_{i'}$ претстављају n поља вектора $\vec{\xi}_{i'}$ у K_n, који одређују n конгруенција кривих линија у K_n. Сваки вектор $\vec{\xi}_{i'}$ у K_n можемо изразити линеарно помоћу n узајамно управних вектора $\vec{\eta}_{i'} = \|\eta^i_{i'}\|$, тако да се изрази (34) могу написати у облику

$$\delta x^i = \eta^i_{i'}\,\psi^{i'}_j\,\delta x^i_A,$$

па имамо следећи став:

Кад се чврсто тело у K_n помера тако да му је оријентација непромењива за време кретања, онда се то померање може разложити у n међусобно независних и узајамно управних померања. Конгруенције кривих $\eta^i_{i'}$ јесу тада путање тачака.

5. *ОПШТИ ЗАКЉУЧЦИ О КИНЕМАТИЦИ ЧВРСТОГ ТЕЛА У K_n*

У Римановом простору константне кривине може да постоји и да се креће чврсто тело и оно има $^1/_2\,n\,(n+1)$ степени слободе. Према посматрањима у одељцима 3. и 4. положај чврстог тела у K_n је одређен ако су одређене n координата x^i_A, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ неке произвољне, али утврђене тачке тела и ако су одређене вредности $^1/_2\,n\,(n-1) = N$ параметара p^α, $(\alpha = 1, \ldots, {}^1/_2\,n(n-1))$ који одређују оријентацију неког система координата чврсто везаног за тело у односу на систем координата који је непокретан у простору. Према томе је положај неке тачке тела са координатама x^i и $\overline{x}^i$ у односу на систем координата који је непокретан у простору, односно који се креће заједно са чврстим телом, одређен помоћу једначина

$$(39) \qquad x^i = x^i(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n; x_A^1, \dots, x_A^n; p^1, \dots, p^N), \quad (i=1, \dots, n)$$

при чему, такође, важе и једначине

$$(40) \qquad \overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, \dots, x^n; x_A^1, \dots, x_A^n; p^1, \dots, p^N),$$

јер једначине (39) допуштају инверзију.

$^1/_2\, n(n+1)$ параметара x_A^i и p^α, који одређују положај чврстог тела, можемо сматрати координатама репрезентативне тачке у неком r-димензионом простору A_r, који је конфигурациони простор за то тело. Сваком положају чврстог тела у K_n одговара једна тачка у A_r, а свакој тачки у A_r одговара бесконачно много тачака у K_n, према једначинама (39) или (40). За дате вредности $\overline{x}^i$ свакој вредности координата тачке у A_r одговара само једна тачка у K_n, па можемо рећи да једначине (39) пресликавају на одређени начин тачке конфигурационог простора у све тачке датог простора K_n. Слично важи и за једначине (40). Отуда видимо да ако су дате коначне једначине кретања чврстог тела у K_n:

$$(41) \qquad \begin{aligned} x_A^i &= \lambda_A^i(t); \\ p^\alpha &= p^\alpha(t), \end{aligned} \qquad (i=1, \dots, n;\ \alpha=1, \dots, N)$$

за одређене вредности $\overline{x}^i$ или x^i добивамо у K_n директно или инверзно кретање, што је у потпуној аналогији са кретањем чврстог тела у E_3.

Такође, на основу резултата у одељцима 3. и 4. видимо да свако инфинитезимално померање чврстог тела у K_n можемо да разложимо у две врсте компоненталних кретања: у кретање тела које је потпуно одређено познавањем кретања једне тачке тела, при чему оријентација тела остаје непромењена, и у кретање тела око једне тачке као непокретне. За координате инфинитезималног померања тачака тела у општем случају можемо написати:

$$(42) \qquad \delta x^i = \xi_\alpha^i\, \psi_\beta^\alpha (x_A; p)\, \delta p^\beta + \xi_{i'}^i\, \psi_j^{i'} (x_A; p)\, \delta x_A^j .$$

Сада можемо да уведемо у наша разматрања време претпоставком да свака тачка тела промени свој положај приликом инфинитезималног померања за δx^i у току времена δt. Уведемо ли ознаке

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x^i}{\delta t} = \dot{x}^i; \quad \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta p^\alpha}{\delta t} = \dot{p}^\alpha; \quad \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x_A^i}{\delta t} = \dot{x}_A^i .$$

Величине $\dot{x}^i$, $\dot{p}^\alpha$ и $\dot{x}_A^i$ претстављају координате генералисаних брзина и то $\dot{x}^i$ је генералисана брзина тачке тела са координатама

$\dot{x}^i$; $\dot{p}^\alpha$ и $\dot{x}^i_A$ су генералисане брзине репрезентативне тачке тела у конфигурационом простору A_r, које можемо још протумачити и као генералисане брзине самог чврстог тела у K_n. Ако ставимо да је $\dot{x}^i = v^i$, а $\dot{x}^i_A = v^i_A$ и уведемо ознаку $\psi^\alpha_\beta \dot{p}^\beta = \omega^\alpha$, из (42) ћемо добити израз у облику

$$v^i = \xi^i_\alpha \omega^\alpha + \xi^i_{i'} \psi^{i'}_j v^j_A \tag{43}$$

који ће нам бити користан при даљим расуђивањима.

Величине v^i_A су у ствари координате брзине неке уочене тачке A посматраног чврстог тела; међутим, величине ω^α немају никакву сличну интерпретацију. У случају $n=3$ и у случају кад се K_n своди на еуклидски простор, ω^α се своди на вектор угаоне брзине, што је у општем случају очигледно немогуће.

Ради униформности писања можемо ставити да је

$$\psi^{i'}_i v^i_A = \omega^{i'},$$

тако да уместо (43) имамо

$$v^i = \xi^i_{\alpha'} \omega^{\alpha'} \qquad (\alpha' = 1, 2, \ldots, r). \tag{44}$$

Величине $\omega^{\alpha'}$ су неке линеарне функције генералисаних брзина у кинематичком конфигурационом простору A_r:

$$\omega^{\alpha'} = \psi^{\alpha'}_{\beta'} \dot{p}^{\beta'} \tag{45}$$

и стоје у вези са псеудо-координатама $u^{\alpha'}$, уведеним помоћу

$$\delta u^{\alpha'} = \psi^{\alpha'}_{\beta'} \delta p^{\beta'},$$

које одређују координате инфинитезималног померања у A_r.

Са овако дефинисаним и приказаним кинематичким величинама, везаним за кретање чврстог тела у K_n, проблем одређивања тог кретања се своди на изналажење коначних једначина кретања (42) репрезентативне тачке у конфигурационом простору, одакле је после тога могућно налажење и коначних једначина кретања за поједине тачке тела.

II ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА ЧВРСТО ТЕЛО У K_n

6. *ЖИВА СИЛА ЧВРСТОГ ТЕЛА У K_n И МЕТРИЧКА ФОРМА КОНФИГУРАЦИОНОГ ПРОСТОРА*

Брзина ма које тачке M_ν (x_ν) чврстог тела у K_n је функција положаја те тачке и координата брзине репрезентативне тачке у конфигурационом простору A_r, па на основу израза за инфинитезимално померање тачака тела у општем случају имамо

$$v_\nu^i = \xi_{\alpha'}^i(x)\, \psi_{\beta'}^{\alpha'}(p)\, \dot{p}^{\beta'},$$

где за $\beta'=1, 2, \ldots, N$ параметри $p^{\beta'}$ су параметри оријентације тела у K_n, а за $\beta'=N+1, N+2, \ldots, r$ ти параметри су неке функције положаја извесне арбитрерне, али одређене тачке тела.

Свакој тачки M_ν посматраног чврстог тела можемо да асоцирамо извесну масу m_ν, тако да систем тачака $M_1, M_2, \ldots$, са којим смо образовали чврсто тело, претставља чврст систем материјалних тачака, односно материјално чврсто тело. За овако дефинисано чврсто тело у K_n можемо да уведемо појам живе силе и помоћу ње да дефинишемо метрику конфигурационог простора.

По дефиницији је жива сила посматраног чврстог тела

$$2\, T = \Sigma_\nu\, m_\nu\, g_{ij}(x_\nu)\, v_\nu^i\, v_\nu^j,$$

где се збир по индексу ν простире на све материјалне тачке тела. На основу израза (44) за живу силу можемо писати

$$2\, T = \Sigma_\nu\, m_\nu\, g_{ij}(x_\nu)\, \xi_{\alpha'}^i(x_\nu)\, \xi_{\beta'}^j(x)\, \omega^{\alpha'}\, \omega^{\beta'},$$

ако ставимо

$$\Sigma_\nu\, m_\nu\, g_{ij}(x_\nu)\, \xi_{\alpha'}^i(x_\nu)\, \xi_{\beta'}^j(x_\nu) = J_{\alpha'\beta'}, \tag{46}$$

коначно ћемо имати

$$2\, T = J_{\alpha'\beta'}\, \omega^{\alpha'}\, \omega^{\beta'}. \tag{47}$$

Величине $J_{\alpha'\beta'}$, дефинисане у (46) претстављају елементе генералисане инерционе матрице ([17] с. 71) за посматрано чврсто тело. Из дефиниције се лако може извести да је инерциона матрица симетрична, тј. да је

$$J_{\alpha'\beta'} = J_{\beta'\alpha'}.$$

Дајући индексима α' и β' вредности од 1 до $N=n(n-1)/2$ и од $N+1$ до $r=n(n+1)/2$ добивамо три врсте елемената инерционе матрице, која се у случају еуклидског простора своди на обичан тензор инерције (за $\alpha, \beta=1, \ldots, N$), на векторски планарни линеарни момент (за $\alpha=1, \ldots, N$, $\beta=N+1, \ldots, r$) и на вредност целокупне масе посмараног чврстог тела (α', $\beta'=N+1, \ldots, r$).

Уместо израза $\omega^{\alpha'}$, можемо у (47) да ставимо вредности из (45):

$$2\, T = J_{\alpha'\beta'}\, \psi_{\lambda'}^{\alpha'}\, \psi_{\mu'}^{\beta'}\, \dot{p}^{\lambda'}\, \dot{p}^{\mu'}. \tag{48}$$

Ако уведемо озиаку

$$J_{\alpha'\beta'}\, \psi_{\lambda'}^{\alpha'}\, \psi_{\mu'}^{\beta'} = h_{\lambda'\mu'},$$

имаћемо за живу силу

$$2\,T = h_{\lambda'\mu'}\,\dot{p}^{\lambda'}\,\dot{p}^{\mu'},$$

где је $h_{\lambda'\mu'}$ два пута коваријантан тензор у конфигурационом простору. Тензор $h_{\lambda'\mu'}$ је основни метрички тензор конфигурацноног простора, за чији смо елемент лука изабрали кинематички линиски елемент

$$ds^2 = 2\,T\,dt^2 = h_{\lambda'\mu'}\,dp^{\lambda'}\,dp^{\mu'} \qquad (\lambda'\,\mu' = 1\,,2\,,\ldots,r). \tag{49}$$

7. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА ЧВРСТОГ ТЕЛА У K_n

Нека на посматрано чврсто тело делује сила $\vec{F}$, која је резултанта свих спољашњих и унутрашњих сила које делују на тело, тако да на поједине тачке делују силе са координатама ${}_{(\nu)}X_i$. Елементарни рад те силе на инфинитезималном померању тачке тела δx^i_ν ће бити:

$$\delta A_{(\nu)} = {}_{(\nu)}X_i\,\delta x^i_\nu\,.$$

Како је, према ранијем,

$$\delta x^i_\nu = \xi^i_{\alpha'}\,(x_\nu)\,\psi^{\alpha'}_{\beta'}\,(p)\,\delta p^{\beta'},$$

за елементарни рад имамо

$$\delta A_{(\nu)} = {}_{(\nu)}P_{\alpha'}\,\delta p^{\alpha'},$$

где је

$${}_{(\nu)}P_{\alpha'} = {}_{(\nu)}X_i\,\xi^i_{\beta'}\,\psi^{\beta'}_{\alpha'}\,.$$

Елементарни рад укупно свих сила које делују на тело ће бити

$$\delta A = \Sigma_\nu\,\delta A_{(\nu)}$$

а величине

$$P_{\alpha'} = \Sigma_{(\nu)}\,{}_{(\nu)}P_{\alpha'} \tag{50}$$

претстављају генералисане координате силе у кофигурационом простору одређеном метричком формом (49).

За одређену живу силу (48) чврстог тела или кад је позната метричка форма (49) конфигурационог простора и кад су дате силе које делују на посматрано чврсто тело, лако се могу написати диференцијалне једначине кретања чврстог тела, под претпоставком да смо усвојили неки динамички принцип по коме се то кретање врши. Ми ћемо овде претпоставити да за кретање чврстог тела у K_n важи у целости Њутнова механика и стога као једначине кретања чврстог тела можемо да напишемо опште диференцијалне једначине за кретање репрезентативне тачке у конфигурационом простору у пољу датих сила (50), које су уствари Лагранжеве једначине II врсте:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}^{\alpha'}}\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}^{\alpha'}}\right) - \left\{ {\gamma' \atop \alpha' \beta'} \right\} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}^{\gamma'}} \dot{p}^{\beta'} = P_{\alpha'}, \tag{51}$$

где $\frac{D}{Dt}$ означава апсолутни (Бјанкијев) извод по скаларној променљивој t (времену), а $\left\{ {\gamma' \atop \alpha' \beta'} \right\}$ су Кристофелови симболи II врсте формирани у односу на метрички тензор $h_{\lambda' \mu'}$.

У место Лагранжевих једначина (51), које претстављају систем од r једначина другог реда по $p^{\alpha'}$ као непознатим функцијама времена, можемо као диференцијалне једначине кретања чврстог тела у K_n да уведемо систем од $2r$ једначина првог реда по непознатим функцијама $\omega^{\alpha'}$ и $p^{\alpha'}$, које ће у исто време претстављати извесну генерализацију Билимовићевих једначина [18] за кретање чврстог тела у E_3.

Претпоставимо да су коефицијенти $\psi^{\alpha'}_{\beta'}$ такви да је детерминанта $|\psi^{\alpha'}_{\beta'}|$ идентички различита од нуле (што смемо претпоставити јер није у супротности са дефиницијом величина $\psi^{\alpha'}_{\beta'}$ у (7)); тада на основи (45) можемо написати и инверзне изразе

$$\dot{p}^{\alpha'} = \phi^{\alpha'}_{\beta'} \omega^{\beta'}, \tag{52}$$

где су $\phi^{\alpha'}_{\beta'}$ елементи матрице реципрочне матрици $\|\psi^{\alpha'}_{\beta'}\|$. Такође имамо да је

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}^{\alpha'}} = \psi^{\beta'}_{\alpha'} \frac{\partial T}{\partial \omega^{\beta'}},$$

што заменом у (51) даје

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega^{\lambda'}}\right)\psi^{\lambda'}_{\beta'} + \left(\frac{\partial \psi^{\nu'}_{\beta'}}{\partial p^{\sigma'}} - \left\{ {\nu' \atop \beta' \sigma'} \right\} \psi^{\sigma'}_{\mu'}\right) \phi^{\sigma'}_{\mu'} \frac{\partial T}{\partial \omega^{\nu'}} \omega^{\mu'} = P_{\beta'}.$$

Помножимо ли овај израз са $\phi^{\beta'}_{\zeta'}$ и извршимо сабирање по индексу β', због $\psi^{\lambda'}_{\beta'} \phi^{\beta}_{\zeta'} = \delta^{\lambda'}_{\zeta'}$, где је $\delta^{\lambda'}_{\zeta'}$ Кронекеров симбол, добивамо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega^{\zeta'}}\right) + \Gamma^{\nu'}_{\zeta' \mu'} \frac{\partial T}{\partial \omega^{\nu'}} \omega^{\mu'} = \Omega_{\zeta'}, \tag{53}$$

где је

$$\Gamma^{\nu'}_{\zeta' \mu'} = \psi^{\nu'}_{\beta';\sigma'} \phi^{\sigma'}_{\mu'} \phi^{\beta'}_{\zeta'};\; \Omega_{\zeta'} = P_{\beta'} \phi^{\beta'}_{\zeta'},$$

(тачка и запета пред индексом означавају коваријантни извод по променљивој $p^{\sigma'}$ у конфигурационом простору).

Једначине (58) претстављају тражене генералисане Билимовићеве једначине, у којима $\frac{\partial T}{\partial \omega^{\alpha'}}$ јесте уопштени делимични градијент живе силе. Заједно са једначинама (52), те једначине претстављају систем од $2r$ једначина првог реда чији интеграли потпуно решавају питање кретања чврстог тела у K_n. √

ЛИТЕРАТУРА

[1] Th. De Donder — Mouvement d'un solide dans un espace de Riemann. *Bull. de l'Acad. de Sci. Belgique* (Classe des Sciences). **XXVIII** (1942), p. 8—16.

[2] ———— Mouvement d'un solide dans un espace pe Riemann. *Ibid.* **XXVIII**, (1942), p. 60—66.

[3] P. Melchior — Sur la Dynamique des solides. *Ibid.* Séance du 4.IV.1948. (5) 34, p. 445—448.

[4] ———— Sur la Dynamique des solides. *Ibid.* Séance du 16.X.1948. (5) 34, p. 779—784.

[5] F. Van Bergen — Mouvement d'un solide dans un espace riemannien *Ibid.* **XXXV**, (1949—1), p. 186—187.

[6] ———— Mouvement d'un solide dans un espace riemannien. *Ibid.* **XXXV**, (1949—1), pp. 234—236.

[7] F. Schur — Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungs masse mit den projektiven Räumen. *Math. Annalen* **27** (1886), p. 537—567.

[8] T. Levi Civita — The Absolute Differential Calculus, Blackie and Son, London 1949.

[9] L. P. Eisenhart — Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press (1949)

[10] Р. Стојановић — Кретање чврстог тела у дводимензионалном Riemann'овом простору. *Глас одељења Природних и Математичкик Наука САН* (1956), с. 63—73.

[11] E. B. Christoffel — Über die Transformationen der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. *Journal für die reine und angewandete Mat.* (*Crelle*) **70** (1869), pp. 46—70.

[12] S. Lie — Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Teubner Leipzig 1793.

[13] W. Killing — Über die Grudlagen der Geometrie. *Journal für die reine und angew. Mat.* (*Crelle*) **169** (1892), pp. 121—186.

[14] E. Cartan — Lecons sur la géométrie des espaces de Riemann. Deuxième édition, Gauthier—Villars, Paris, 1946.

[15] L. Bianchi — Lezioni di Geometria Differenziale. Spoeri, Pisa, 1903.

[16] H. Levy — Tensors determined by a hypersurface in a Riemannian space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **28** (1925).

[17] А. Билимовић — Рационална Механика II, Механика система. Научна књига, Београд 1951.

[18] А. Билимовић — Једначине кретања чврстог тела у новој векторској форми. *Глас Српске Краљевске Академије* **CXXVII** (1927), с. 19—42.

MOTION OF A RIGID BODY IN RIEMANNIAN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

By

Rastko Stojanović

Starting from the definition of a rigid body in general Riemannian spaces, given by Th. De Donder in [1], the present author identifies the De Donder's equations of condition that the motion should be rigid as Killing's equations for the groups of motion, and connects the problem of the rigid body in Riemannian spaces with the theory of groups of motion.

Since the Riemannian spaces of constant curvature K_n admite the complete group of motions G_r of order $r = \frac{1}{2}n(n+1)$, it follows that the free rigid body in a K_n has $\frac{1}{2}n(n+1)$ degrees of freedom. $\frac{1}{2}n(n-1)$ of the parameters of the group G_r are identified as parameters of orientation of the body and the remaining n parameters are parameters of position, and are expressible as functions of the position of an arbitrary but fixed particle of the body.

In case of the rotation of the body about one fixed point in K_n, the body has $\frac{1}{2}n(n-1)$ degrees of freedom and the rotation consists of $\frac{1}{2}n(n-1)$ mutually independent motions about the same number of totally geodesic $(n-2)$-dimensinal subspace of K_n. In that case all particles of the body belong to geodesically parallel hypersurfaces of constant curvature in K_n, since the hypersurfaces are the minimum invariant varieties of the group $G_{\frac{1}{2}n(n-1)}$. When the orientation of the body is fixed in K_n, the motion is a translation only when K_n is flat or when the fundamental form is indefinite, since the K_n in general does not admit the field of parallel vectors.

Using the Lie's first fundamental theorem on the continuous groups, the expressions for the infinitesimal displacements of the body are written in a form suitable for dynamical considerations, so that the parameters of the group G_r appear as independent coordinates of of the body in the expessions for kinetic energy and for the line element of the space of configurations of the body.

In a given field of forces and with respect to the fundamental form of the space of configurations, the differential eguations of motion of the body are obtained as equations of motion of the representative particle in the space of configurations.