RAČUNARSTVO
Sveska 1, Broj 2, 1992

UDK 519.688

JEDAN ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE NAJVEĆEG ZAJEDNIČKOG DELIOCA POLINOMA[1]

BOŠKO DAMJANOVIĆ

SAŽETAK. U članku je izložen i na programskom jeziku BASIC realizovan algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog delioca od n polinoma sa celobrojnim koeficijentima, koji je zasnovan ne na definiciji najvećeg zajedničkog delioca već na njegovim svojstvima. Navedenim programom NZD od n polinoma određuje se direktno bez primene uobičajenih iteracija i deljenja polinoma sa polinomom. Navodi se i primer koji ilustruje algoritam.

1 Uvod

Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog delioca (NZD) dva polinoma $f(x)$ i $g(x)$, gde stepen polinoma $f(x)$ nije manji od stepena polinoma $g(x)$, sastoji sastoji u određivanju sledećeg niza polinoma:

$$
\begin{aligned}
f &= q \cdot q_1 + r_1, \\
g &= r_1 \cdot q_2 + r_2, \\
r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, \\
&\dots \\
r_{m-1} &= r_m \cdot q_{m+1},
\end{aligned}
$$

gde je $\operatorname{step} g > \operatorname{step} r_1 > \cdots > \operatorname{step} r_m$. Lako je ustanoviti da je sa polinomom r_m deljiv svaki polinom navedenog niza polinoma f, g, $r_1, \dots, r_{m-1}$, pa to specijalno važi i za polinome f i g. Na taj način polinom r_m je delilac polinoma f i g. Osim toga i bilo koji drugi polinom koji se od polinoma r_m razlikuje do na konstantni činilac takođe je delilac polinoma f i g. Isto to važi i za polinome sa kojim je r_m deljiv. Na taj način, NZD dva polinoma je onaj delilac ta dva polinoma koji

[1] Rad finansiran od Fonda za nauku Republike Srbije preko Matematičkog instituta, projekat 0401A.

je deljiv svim drugim njihovim zajedničkim deliocima i određen je sa tačnošću do konstantnog činioca.

Budući da je NZD(f_1, f_2, f_3) = NZD(NZD$(f_1, f_2), f_3)$ to navedena procedura može biti proširena na nalaženje NZD od više polinoma. Međutim, upotreba Euklidovog algoritma na upravo prikazan način u slučaju velikog broja polinoma velikog stepena može biti prilično rogobatan posao. Zato ćemo navesti jedan drugi algoritam zasnovan ne na definiciji NZD polinoma već na njegovim svojstvima.

2 Svojstva NZD polinoma

Neka su data dva polinoma:

$$\begin{array}{lllllllllll} f(x) & = & a_1 & + & a_2x & + & a_3x^2 & + & \dots & + & a_{n+1}x^n \quad \text{i} \\ g(x) & = & b_1 & + & b_2x & + & b_3x^2 & + & \dots & + & b_{m+1}x^m \end{array}$$

sa celobrojnim koeficijentima i sa $a_{n+1} \neq 0$, $b_{m+1} \neq 0$ i $m \leq n$.

Ako je $d(x)$ jedan od NZD polinoma $f(x)$ i $g(x)$ tada je:

a) $d(x) = \mathrm{NZD}(k_1f(x), k_2g(x)), \quad k_1, k_2 \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$,

b) $d(x) = \mathrm{NZD}(f(x), g(x) + kf(x)), \quad k \in \mathbf{Z}$,

c) Ako je $a_1 = 0$ i $b_1 \neq 0$ tada je $d(x) = \mathrm{NZD}(g(x), f(x)/x)$,

d) Ako je $a_1 = b_1 = 0$ tada $d(x)$ sadrži faktor x, tj. $d(x) = x \cdot \mathrm{NZD}(f(x)/x, g(x)/x)$,
gde je sa $\mathbf{Z}$ označen skup svih celih brojeva.

3 Opis metode

Algoritam nalaženja NZD polinoma $f(x)$ i $g(x)$ biće zasnovan samo na tim svojstvima. Na dati par polinoma $f(x)$ i $g(x)$ primenjivaće se navedena svojstva od NZD dva polinoma da bi se dobili drugi parovi polinoma koji imaju isti NZD kao i početni par. Sistematski primenjujući ta svojstva i birajući na odgovarajući način faktore k, k_1 i k_2 dobićemo niz parova polinoma sa nerastućim zbirom njihovih stepena (zbog svojstava *c*) i *d*)) koji će završiti parom polinoma $(d(x), 0)$ među kojima je drugi identički jednak nuli. Dobijeni, ne identički jednak nuli polinom $d(x)$ je traženi NZD tih polinoma.

Radi lakšeg izračunavanja NZD od data dva polinoma $f(x)$ i $g(x)$ predstavljaćemo ih u obliku tabele

$$T = \left| \begin{array}{cccccccc} b_1 & b_2 & \dots & b_{m+1} & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{n+1} \end{array} \right|$$

dimenzije $2 \times (n+1)$ u kojoj prvoj vrsti odgovara polinom nižeg stepena.

Algoritam određivanja NZD polinoma f i g započinjemo uklanjanjem svih vodećih nul kolona iz tabele T sve dok se ne dobije tabela T_1 u čijoj prvoj koloni je bar jedan element različit od nule. Ako su prvih k kolona tabele T, nul-kolone a

$(k+1)$-va kolona to nije, onda je stepen x^k faktor od NZD$(f(x), g(x))$ i ostaje da se, prema svojstvu d), odredi NZD od polinoma koji odgovaraju tabeli T_1.

Prema svojstvu c) mogu se ukloniti sve vodeće nule u prvoj ili drugoj vrsti posmatrane tablele T_1, ako one tamo postoje, i postići, prema svojstvu a), da prvi koeficijenti u njima budu međusobno jednaki. Na primer, tabela

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 & 4 & 18 & 0 \end{vmatrix}$$

se može, posle uklanjanja vodećih nula iz druge vrste, skraćivanja njenih elemenata sa njihovim NZD i množenjem elemenata prve vrste sa 2 a druge sa 3, zameniti sa tabelom

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 4 & 2 & 0 & 2 & 10 & 12 \\ 6 & 9 & 0 & 6 & 27 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Na taj način, pomoću svojstava a) i c) možemo postići da sve vrste nove tabele T_2 počinju istim elementom. NZD$(f(x), g(x)$ biće sada jednak proizvodu stepena x^k i NZD polinoma predstavljenih tabelom T_2. U slučaju da je polinom koji odgovara drugoj vrsti dobijene tabele manjeg stepena od polinoma pridruženog prvoj vrsti te tabele izvršiće se zamena vrsta u tabeli. Na taj način će se postići da prvoj vrsti svake sledeće tabele odgovara polinom manjeg stepena.

Svojstvo b) se sada može upotrebiti da bi se prvi član u drugoj vrsti dobijene tabele promenio u nulu. Potrebno je samo drugu vrstu zameniti razlikom prve i druge vrste. Pomoću svojstva c) možemo ponovo ukloniti sve vodeće nule u drugoj vrsti novodobijene tabele, ako te nule tamo postoje a zatim pomoću svostva a) postići da prvi koeficijenti u vrstama budu međusobno jednaki. Ovi postupci će se ponavljati sve dok druga vrsta ne bude sadržavala samo nule. Na taj način, NZD$(f(x), g(x))$ biće jednak proizvodu stepena x^k i polinoma koji odgovara ne nula vrsti dobijene tabele.

Korišćenjem činjenice da je NZD(f_1, f_2, f_3) = NZD(NZD$(f_1, f_2), f_3)$ dobili bi iterativan algoritam za nalaženje NZD skupa od s polinoma $f_1, f_2, \ldots, f_s$. Međutim, mnogo efikasniji algoritam može se dobiti radeći slično razmotrenom algoritmu za NZD dva polinoma. Umesto uzastopnih iteracija određivanja NZD od dva polinoma može se raditi istovremeno sa celim skupom od s polinoma predstavljenih u tabeli sa s vrsta.

4 Ilustracija algoritma

Neka su dati polinomi

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 + 5x^3 - 5x^4 - x^5, \\ p_2(x) &= x - 3x^2 + 3x^3 - x^4, \\ p_3(x) &= x - x^4, \\ p_4(x) &= x - x^2. \end{aligned}$$

Odredimo najveći zajednički delilac ovih polinoma.

Označimo sa $d_T(x)$ traženi NZD i pridružimo datim polinomima p_1, p_2, p_3 i p_4 tabelu

$$T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

dimenzije 4×6 sastavljenu od njihovih koeficijenata. Prema svojstvu d) imali bi da je $d_T(x) = x \cdot d_{T_1}(x)$, gde je d_{T_1} NZD od polinoma koji odgovaraju tabeli:

$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

dobijenoj iz tabele T prvo uklanjanjem nul kolona, a zatim zamenom prve i poslednje vrste kako bi polinom najmanjeg stepena odgovarao prvoj vrsti tabele T. Prema svojstvu c) možemo, ne menjajući $d_{T_1}(x)$, polinom koji odgovara četvrtoj vrsti tabele podeliti sa x, budući da sa x nisu deljivi ostali polinomi koji odgovaraju toj tabeli te x nije faktor u NZD $d_{T_1}(x)$, i na taj način dobiti tabelu

$$T_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

u kojoj su poslednje dve nul kolone izostavljene. Prema svojstvu b) možemo, ne menjajući $d_{T_1}(x)$, postići da svi elementi prve kolone tabele T_2, počevši od druge vrste budu jednaki nuli i tako doći do tabele

$$T_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

a od nje, prema svojstvu c) i uklanjanjem poslednje nul kolone, do tabele

$$T_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

Odavde se pomoću svojstava a) i b) dolazi do tabele

$$T_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Korišćenjem svojstva *c*) i izostavljanjem poslednje nul kolone, sada se odmah dobija tabela

$$T_6 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

odnosno, prema svojstvu *b*) i uklanjanjem poslednjih nul vrsta—tabela

$$T_7 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix}$$

kojoj odgovara samo jedan polinom $d_{T_1}(x) = 1 - x$.

Na taj način NZD datih polinoma je $D_T(x) = x \cdot d_{T_1}(x) = x(1-x) = x - x^2$.

5 Programska realizacija

Na osnovu svega rečenog sada možemo napisati program kojim će se odrediti NZD zadatih polinoma.

```
10   REM NZD POLINOMA
20   INPUT "BROJ POLINOMA N=";N
30   INPUT "NAJVECI STEPEN OD
           SVIH POLINOMA Q=";Q
40   LET M=Q+1
50   DIM A(N,M) : DIM S(N)
60   FOR I=1 TO N
70   INPUT "STEPEN POLINOMA P"
         (I);"=";S(I)
80   IF M>S(I) THEN LET M=S(I):
                    LET W=I
90   PRINT "P";I;"=";
100  FOR J=1 TO S(I)+1
110  INPUT "A(";(I);",";(J-1);
         ")=";A(I,J)
120  IF A(I,J)=0 THEN GO TO 150
130  IF A(I,J)>0 THEN PRINT "+";
140  PRINT A(I,J);"X^";J-1
150  NEXT J
```

```
160  PRINT
170  NEXT I
180  IF W=1 THEN GO TO 210
190  GO SUB 680
200  GO SUB 1070
210  LET J=1
220  FOR I=1 TO N
230  IF A(J,I)=0 THEN NEXT I:
                      LET J=J+1;
                      GO TO 220
240  LET K=J-1
250  IF K=0 THEN LET X=0:
                 GO TO 280
260  GO SUB 1400
270  LET X=Q+1
280  GO SUB 560
290  GO SUB 400
300  GO SUB 1170
310  LET I=2
320  GO SUB 1260
330  IF Y=Q+1 THEN GO SUB 790
340  LET I=I+1
350  IF I<=N THEN GO TO 320
360  GO SUB 1070
370  IF N<>1 THEN GO TO 270
380  GO SUB 880
390  STOP

400  REM BROJ NULA KOJIM
         ZAVRSAVA PRVA VRSTA
410  LET T=0
420  FOR J=Q+1 TO 1 STEP -1
430  IF A(I,J)<>0 THEN GO TO 460
440  LET T=T+1
450  NEXT J
460  RETURN

470  REM UKLANJANJE VODECIH
         NUL KOLONA
480  FOR R=P TO Q+1
490  LET A(I,R-P+1)=A(I,R)/F
500  NEXT R
510  FOR R=Q-P+3 TO Q+1
520  LET A(I,R)=0
```

```
530  NEXT R
540  LET S(I)=S(I)-P+1
550  RETURN

560  REM KOLONA PRVOG NE NULA
       BELEMENTA U SVAKOJ VRSTI
570  FOR I=1 TO N
580  LET P=1
590  IF A(I,P)=0 THEN LET P=P+1
                      GO TO 590
600  GO SUB 1500
610  IF P*F=1 THEN GO TO 660
620  GO SUB 470
630  IF P=1 THEN GO TO 660
640  IF M>S(I) THENLET M=S(I):
                   LET W=1
650  IF X>P-1 THEN LET X=P-1
660  NEXT I
670  RETURN

680  REM POLINOM NAJNIZEG STEPENA
       U PRVU VRSTU
690  FOR J=1 TO Q+1
700  LET T=A(I,J)
710  LET A(1,J)=A(W,J)
720  LET A(W,J)=T
730  NEXT J
740  LET T=S(1)
750  LET S(1)=S(W)
760  LET S(W)=T
770  LET W=1
780  RETURN

790  REM UKLANJANJE NUL POLINOMA
800  FOR G=I TO N-1
810  FOR H=1 TO Q+1
820  LET A(G,H)=A(G+1,H)
830  NEXT H
840  NEXT G
850  LET I=I-1
860  LET N=N-1
870  RETURN
```

```
880  REM STAMPANJE NZD POLINOMA
890  PRINT ' "NZD=";
900  FOR J=1 TO M+1
910  IF A(I,J)=0 THEN GO TO 990
920  IF A(I,J)>0 THEN PRINT "+";
930  IF A(I,J)=1 AND K+J-1<>0
     THEN GO TO 970
940  IF A(I,J)=-1 AND K+J-1<>0
     THEN PRINT "-";:
         GO TO 970
950  PRINT A(I,J);
960  IF K+J-1=0 THEN GO TO 990
970  IF K+J-1=1 THEN PRINT "X";:
                    GO TO 990
980  PRINT "X^";K+J-1;
990  NEXT J
1000 RETURN

1010 REM NZD DVA BROJA
1020 IF F=0 THEN LET F=E:
                GO TO 1060
1030 LET D=INT (E/F)
1040 LET Z=E-D*F
1050 IF Z<>0 THEN LET E=F:
                 LET F=Z:
                 GO TO 1030
1060 RETURN

1070 REM MEDJUREZULTAT
1080 PRINT
1090 FOR G=1 TO N
1100 FOR H=1 TO Q+1
1110 IF A(G,H)>=0 THEN
       PRINT " ";
1120 PRINT A(G,H);"  ";
1130 NEXT H
1140 PRINT
1150 NEXT G
1160 RETURN

1170 REM TABELA BEZ POSLEDNJIH
        NUL KOLONA
1180 IF X<>T THEN LET X=T
1190 LET Q=Q-X
```

```
1200 IF X=0 THEN GO TO 1220
1210 GO SUB 1070
1220 IF W=1 THEN GO TO 1250
1230 GO SUB 680
1240 GO SUB 1070
1250 RETURN

1260 REM ANULIRANJE DELA PRVE
        KOLONE POCEV OD VRSTE 2
1270 LET B=A(1,1)
1280 LET C=A(1,1)
1290 LET E= ABS (B)
1300 LET F= ABS (C)
1310 GO SUB 1010
1320 LET Y=0
1330 FOR J=1 TO Q+1
1340 LET U=A(I,J)*B
1350 LET V=A(I,J)*C
1360 LET A(I,J)=(U-V)/F
1370 IF A(I,J)=0 THEN LET Y=Y+1
1380 NEXT J
1390 RETURN

1400 REM TABELA BEZ
        VODECIH NUL KOLONA
1410 LET P=K+1
1420 FOR I=1 TO N
1430 GO SUB 1500
1440 GO SUB 470
1450 NEXT I
1460 LET Q=Q-P+1
1470 LET M=M-P+1
1480 GO SUB 1070
1490 RETURN

1500 REM NZD VRSTE I
1510 LET F=ABS(A(I,P))
1520 FOR J=P+1 TO Q+1
1530 LET E=ABS (A(I,J))
1540 IF E<>0 THEN GO SUB 1010
1550 NEXT J
1560 RETURN
```

U navedenom programu su najveći i najmanji stepen od svih stepena s_i, $i = 1,2,\ldots,n$, n datih polinoma p_i, $i = 1,1,\ldots,n$ označeni redom sa q i m. Redni broj polinoma stepena m označen je sa w. Budući da ćemo datim polinomima uređenim po rastućim stepenima nepoznate pridružiti odgovarajuću tabelu dimenzije $n \times (q+1)$ njihovih koeficijenata, za koje pretpostavimo da su celi brojevi, to će u vrsti w te kolone počevši od kolone $m+2$ biti same nule. Broj prvih nul kolona te tabele u programu je označen sa k.

Ako je $k \neq 0$ pozvaće se potprogram PP-1400 u kojem će se sa p označiti redni broj prve ne nula kolone a zatim odrediti nova tabela u kojoj neće biti prvih k tj. p-1 nul kolona stare tabele, a elementi svake vrste biće skraćeni sa najvećim zajedničkim deliocem f elemenata te vrste, određenim u potprogramu PP-1500. Kako je novodobijena tabela uža za prvih p-1 kolona u odnosu na prethodnu to će njenoj najdužoj vrsti odgovarati polinom stepena $q-(p-1)$ koji će se opet označiti sa q tj. broj kolona nove tabele će biti jednak $q-p$. Naime, uklanjanju prvih $p-1$ kolona tabele odgovara deljenje svih polinoma sa x^{p-1}. Iz istog razloga će najniži stepen polinoma koji odgovara novodobijenoj tabeli biti $m-(p-1)$.

U potprogramu PP-560 će se za svako i, $i = 1,2,\ldots,n$, pre pomeranja elemenata vrsta za odgovarajući broj $p-1$ kolona nalevo, gde je p broj kolone prvog od nule različitog elementa u i-toj vrsti, pozivati i potprogram PP-1500 za određivanje najvećeg zajedničkog delioca f svih elemenata vrste i počev od njenog prvog različitog od nule elementa $a_{i,p}$. Potprogram PP-470 se neće pozvati, odnosno pomeranje elemenata i-te vrste se neće vršiti ako je taj delilac jednak 1 i, u isto vreme, prvi nenula element i-te vrste u prvoj koloni. U suprotnom slučaju će se u potprogramu PP-470 posle pomeranja elemenata i-te vrste za $p-1$ kolona nalevo, stepen s_i polinoma koji odgovara i-toj vrsti tabele da smanji za $p-1$ i ponovo označi sa s_i. U potprogramu PP-560 određuje se i prvi najniži stepen m od svim stepena s_i, $i = 1,2,\ldots,n$, polinoma koji odgovaraju vrstama posmatrane tabele kao i redni broj w tog polinoma.

Da bi izračunali koliko u posmatranoj tabeli ima poslednjih uzastopnih nul kolona koje možemo ukloniti i tako odgovarajuću tabelu skratiti, izračunaćemo potprogramom PP-560 minimalan broj x vodećih nula u vrsti među svim vrstama tabele i potprogramom PP-400 broj t nula kojim završava prva vrsta tabele budući da se u njoj nalaze koeficijenti polinoma najnižeg stepena pa ona završava sa najvećim brojem t nula. Na taj način ako prva vrsta završava nenula elementom, onda će t biti jednako nuli. Isto tako je minimalan broj x vodećih nula u vrsti jednak nuli ako tabela ne počinje nul kolonom tj. ako je za neko i, $i = 1,2,\ldots,n$, $p = 1$, gde je p redni broj prve kolone tabele sa ne nula elementom u i-toj vrsti. U suprotnom slučaju znamo samo da x nije veće od broja kolona $q+1$ posmatrane tabele. Da bi i u tom slučaju odredili minimalan broj x početnih nula, izračunaćemo u potprogramu PP-560 za svaku vrstu i, broj $p-1$ njenih vodećih nula i na kraju za x uzeti minimalnu vrednost između svih izračunatih vrednosti za $p-1$. Budući da će se višestrukim pozivanjem potprograma PP-470 ukloniti vodeće nule iz svake vrste tabele i na njihova mesta upisati redom ostali elementi te vrste, (podeljeni sa najvećim zajedničkim deliocem f elemenata te vrste, određenim u potprogramu

PP-1500), a na ranija mesta tih nenula elemenata upisaće se nule, to će se broj poslednjih nula u tim vrstama povećati za odgovarajući broj $p-1$ nula.

Na taj način poslednjih $\min\{x,t\}$ kolona posmatrane tabele biće nul kolone pa će se potprogramom PP-1170 one iz nje ukloniti tako što će se najveći stepen q, od svih posmatranoj tabeli odgovarajućih polinoma, da smanji za $\min\{x,t\}$ i ponovo označi sa q.

U slučaju da je u potprogramu PP-560 došlo do pomeranja nalevo elemenata neke vrste tj. ako je $x \neq 0$, onda će se u potprogramu PP-1170 prvo pomoću potprograma PP-1070 odštampati dobijena tabela, a zatim ako koeficijenti polinoma najnižeg stepena odgovaraju vrsti $w \neq 1$ pozvati potprogram PP-680 i izvršiti međusobna zamena odgovarajućih elemenata prve vrste i vrste w, vodeći računa da se posle toga stepeni s_i i s_w koji odgovaraju polinomima tih vrsta takođe međusobno zamenjuju i da promenljiva w postaje jednaka jedan.

Sada se pristupa potprogramu PP-1260 pomoću kog će se anulirati u dobijenoj tabeli svi elementi prve kolone počev od druge vrste. Anuliranje će se izvesti tako što će se za svaku vrstu i, $i = 1, 2, \ldots, n$, prvo u potprogramu PP-1010 da odredi najveći zajednički delilac f elemenata b i c, prvih u prvoj i i-toj vrsti tabele, respektivno, a zatim svaki element i-te vrste zameniti razlikom odgovarajućih proizvoda elemenata i-te vrste sa b/f i prve vrste sa c/f.

Paralelno sa određivanjem u potprogramu PP-1260 novih elemenata i-te vrste izračunaće se i broj y nula u toj vrsti. Ako je taj broj jednak broju $q+1$ kolona posmatrane tabele, onda će se pomoću potprograma PP-790 da smanji broj n vrsta te tabele i izvrši pomeranje svih vrsta počev od $i+1$-ve za jedno mesto naviše čime se ranija i-ta vrsta zamenjuje sa $i+1$-vom itd.

LITERATURA

[1] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming—Seminumerical Algorithms* (Volume 2), Addison–Wesley, MA, 1969

[2] Đ Kurepa, *Viša algebra*, I deo, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1971