Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l' Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRIMEDBA O IZRAČUNAVANJU MEĐUSOBNE DALJINE DVAJU PLANETOIDA PRI REGULARNOM PROKSIMITETU

J. L. Simovljević

Prikazuje se postupak za približno izračunavanje poremećajnog dejstva jednog planetoida na njegovu daljinu do drugog pri regularnom proksimitetu ovih nebeskih tela. Postupak je ilustrovan numeričkim primerima.

U nizu radova J. P. Lazovića, M. Kuzmanoskog i u nekoliko radova pisca ovih redova posvećenih proksimitetima planetoida usvajano je da se dovoljno tačan iznos međusobne daljine tela tokom pojave, to jest $\rho=|\boldsymbol{\rho}|=|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}|$, može dobiti pomoću heliocentričnih položaja poremećajnog ($\boldsymbol{r}_i$) i poremećenog ($\boldsymbol{r}$) planetoida, bez uzimanja u obzir bilo kakvih poremećaja u kretanju ovih tela; dakle računom sa neporemećenim elementima kretanja oba planetoida. I to kako zbog verovatno malog iznosa ovih poremećaja, tako i zbog kratkotrajnosti pojave. To izračunavanje je još najjednostavnijevršeno napr. u [2] i [3] pomoću Lagrange-ovih redova za $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{r}_i$, koji daju

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_p+\boldsymbol{V}_p\,\tau+\ldots, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\varrho}_p=\boldsymbol{r}_{ip}-\boldsymbol{r}_p,\quad \boldsymbol{V}_p=(d\boldsymbol{\rho}/dt)_{t=t_p}=\boldsymbol{v}_{ip}-\boldsymbol{v}_p,\quad \tau=k\,(t-t_p),$$

gde indeks p označava proksimitetsku vrednost promenljive. Pri kratkotrajnim zbližavanjima visokog reda linearna zavisnost relativnog vektora položaja $\boldsymbol{\varrho}$ od vremena je takoreći redovna pojava, pa su takvi proksimiteti u [3] i nazvani regularnim.

Međutim, zbog potrebe vrlo preciznog računa u ovakvim konkretnim slučajevima, pokušaćemo ovde da ocenimo dejstvo poremećaja na međusobnu daljinu ρ para planetoida pri njihovom proksimitetu, tek toliko da proverimo opravdanost naših ranijih pojednostavljenja.

1. Diferencijalna jednačina heliocentričnog poremećenog kretanja planetoida mase m i vektora položaja $\mathbf{r}$ je

$$\frac{d^2\,\mathbf{r}}{dt^2}=-k^2\,(M+m)\,r^{-3}\,\mathbf{r}+k^2\sum_{j=1}^{n} m_j\,(\rho_j^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_j-r_j^{-3}\,\mathbf{r}_j)+$$

$$+k^2\,m_i\,(\rho^{-3}\,\boldsymbol{\rho}-r_i^{-3}\,\mathbf{r}_i), \tag{2}$$

gde je M masa Sunca, m_j i $\mathbf{r}_j$ masa i vektor položaja velike planete, a m_i i $\mathbf{r}_i$ masa i vektor položaja »poremećajnog« planetoida. Diferencijlana jednačina njegogovog kretanja, sa istim oznakama, je

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -k^2(M+m_i)r_i^{-3}\mathbf{r}_i + k^2\sum_{j=1}^{n} m_j(\rho_{ij}^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_{ij} - r_j^{-3}\,\mathbf{r}_j) - k^2\,m(\rho^{-3}\,\boldsymbol{\rho} + r^{-3}\,\mathbf{r}). \quad (3)$$

Relativni vektori položaja u (2) i (3) su

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\rho}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, \quad \boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}. \quad (4)$$

Pretpostavili smo, dakle, da se svaki planetoid iz uočenog para kreće oko Sunca pod poremećajnim dejstvom velikih planeta i onog drugog planetoida u paru. Iz jednačina (2), (3) i (4) izvodimo diferencijalnu jednačinu za relativni vektor položaja poremećajnog planetoida u odnosu na poremećeni:

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -k^2(m+m_i)\,\rho^{-3}\,\boldsymbol{\rho} + \mathbf{G}, \quad (5)$$

$$\mathbf{G} = k^2\,M(r^{-3}\,\mathbf{r} - r_i^{-3}\,\mathbf{r}_i) + k^2\sum_{j=1}^{n} m_j(\rho_{ij}^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_{ij} - \rho_j^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_j).$$

Tako vidimo da je relativna putanja poremećajnog planetoida oko poremećenog obvojnica oskulacionih Keplerovih putanja, konusnih preseka, koji bi proizilazili iz

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}_K}{dt^2} = -k^2(m+m_i)\,\rho_K^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_K,$$

i odgovarajućih početnih uslova kretanja. Problem tog relativnog kretanja mogao bi se izučavati, mutatis mutandis, kao kretanje tela mase m_i oko tela mase m, pod dejstvom njegove privlačne sile i dodatnog poremećajnog ubrzanja **G**; dakle, kao u klasičnom računu poremećaja. Međutim, odmah primećujemo da bi tu, u opštem slučaju, poremećaji bili veoma veliki: oskulacione putanje bi se brzo i znatno menjale, pa ne bi mogle biti ni grube aproksimacije stvarne putanje u iole dužem vremenom intervalu oko epohe oskulacije.

Izuzetak može biti upravo pri samom proksimitetu. Tada zbog male međusobne daljine planetoida ϱ oba člana u **G** imaju minimalnu vrednost, dok prvi član desne strane u (5) ima upravo maksimalnu vrednost. Od stvarnog iznosa ovih veličina u konkretnom slučaju zavisiće »stabilnost« oskulacione putanje izvedene za neku epohu vrlo blisku epohi proksimiteta t_p. — Dodajmo još da je uticaj velikih planeta utoliko manji, ukoliko je proksimitet višeg reda.

Pri efektivnom numeričkom integraljenju diferencijalne jednačine (5) ne bi bilo nikakvih načelnih teškoća. To bi bio, ustvari, samo formalno sažetiji postupak nalaženja preciznih položaja oba planetoida numeričkim integraljenjem njihovih diferencijalnih jednačina kretanja (2) i (3).

2. Prirodno je, međutim, da potražimo koliko bi se tačno $\boldsymbol{\rho}$, koje proizilaz iz (5), razlikovalo od približnog,

$$\boldsymbol{\rho}_K = \mathbf{r}_{iK} - \mathbf{r}_K, \quad (6)$$

to jest dobivenog iz pretpostavke o neporemećenom kretanju oba planetoida u vreme njihovog proksimiteta,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{iK}}{dt^2} = -k^2 (M+m_i) r_{iK}^{-3} \mathbf{r}_{iK}, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_K}{dt^2} = -k^2 (M+m) r_K^{-3} \mathbf{r}_K, \tag{7}$$

koju smo u ranijim radovima stalno usvajali. Stavimo li da je

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{iK} + \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_K + \mathbf{R},$$

gde su $\mathbf{R}_i$ i $\mathbf{R}$ dejstva poremećaja na heliocentrične položaje tela, jednačine (5), (6) i (7) će nas dovesti do

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta \boldsymbol{\rho} = -k^2 (m+m_i) \rho^{-3} \boldsymbol{\rho} + k^2 \sum_{j=1}^{n} m_j (\varrho_{ij}^{-3} \boldsymbol{\rho}_{ij} - \varrho_j^{-3} \boldsymbol{\rho}_j) +$$

$$+ k^2 M (\mathbf{r}^{-3} \mathbf{r} - r_K^{-3} \mathbf{r}_K) - k^2 M (r_i^{-3} \mathbf{r}_i - r_{iK}^{-3} \mathbf{r}_{iK}). \tag{8}$$

Ovde smo stavili da je

$$\Delta \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_K = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}$$

traženo dejstvo poremećaja na relativni vektor položaja planetoida, a zanemarili smo mase ovih malih nebeskih tela m i m_i u zbiru sa masom Sunca M.

I ovde, dakle, možemo očekivati da pri proksimitetu visokog reda najveći doprinos daje prvi član desne strane u (8).

3. Apstrahujmo, stoga, dejstvo velikih planeta u vremenom intervalu »dinamičkog proksimiteta« [4], ograničenog trenucima $-t_0$ i t_0, simetričnim u odnosu na trenutak proksimiteta t_p, pa potražimo promenu $\Delta\boldsymbol{\rho}$, izazvanu samo gravitacionim dejstvom poremećajnog planetoida na poremećeni. Ograničimo se, na početku rada, na »račun prvog reda«, tj. zanemarimo na desnoj strani (8) razliku između poremećenih i neporemećenih položaja tela. Takav zadatak je onda opisan diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta \boldsymbol{\rho} = -k^2 (m+m_i) \rho^{-3} \boldsymbol{\rho}, \tag{9}$$

koja proizilazi iz (8). Dalje ćemo pretpostaviti da se m može da zanemari u zbiru sa m_i i da vreme izražavamo u srednjim Gausovim danima, $\tau = k(t - t_p)$, računajući od trenutka proksimiteta. Tako (9) postaje

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Delta \boldsymbol{\rho} = -m_i \rho^{-3} \boldsymbol{\rho}. \tag{10}$$

Donja granica integraljenja ove diferencijalne jednačine neka bude određeni (ili ocenjeni) trenutak τ_0 početka dinamičkog proksimiteta; s obzirom na sve naše ranije pretpostavke možemo usvojiti da su početni uslovi integraljenja

$$(\Delta \boldsymbol{\rho})_{\tau=\tau_0} = 0, \quad (d\Delta\boldsymbol{\rho}/d\tau)_{\tau=\tau_0} = 0.$$

Diferencijalnu jednačinu (10) ćemo integraliti na sličan način kao odgovarajuće u [3]. Neka je ispitivani proksimitet regularan; tada iz tog uslova (1) i uslova proksimiteta $(\rho_p\, V_p)=0$ proizilazi da je

$$\rho = V_p\, u, \quad r = (c^2+\tau^2)^{1/2}, \quad c = \rho_p\, V_p^{-1}.$$

Unesemo li ovo i (1) u (10), dobićemo da je

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Delta\rho = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\,\tau)\, u^{-3},$$

sa konstantama

$$\mathbf{A} = -m_i\, V_p^{-3}\, \rho_p, \quad \mathbf{B} = -m_i\, V_p^{-3}\, \mathbf{V}_p.$$

Integraljenje u granicama od $\tau_0=$const. do τ daje

$$\frac{d}{d\tau}\Delta\rho = (c^{-2}\,\mathbf{A}\,\tau - \mathbf{B})\, u^{-1} + \mathbf{K}_1,$$

$$\mathbf{K}_1 = -(c^{-2}\,\mathbf{A}\,\tau_0 - \mathbf{B})\, u_0^{-1}.$$

Ponovno integraljenje u istim granicama dovodi do

$$\Delta\rho = c^{-2}\,\mathbf{A}\, u - \mathbf{B}\ln|u+\tau| + \mathbf{K}_1\,\tau + \mathbf{K}_2, \tag{11}$$

$$\mathbf{K}_2 = (\tau_0^2\, u_0^{-1} - u_0)\, c^{-2}\,\mathbf{A} + (\ln|u_0+\tau_0| - \tau_0\, u_0^{-1})\,\mathbf{B}.$$

Ovaj konačni rezultat (11) poslužiće nam da ocenimo poremećajno dejstvo planetoida mase m_i na njegovu daljinu ρ od planetoida zanemarljivo male mase m tokom njihovog regularnog proksimiteta.

4. Za ilustrovanje ranije dobivenih rezultata najčešće smo koristili f'ktivni proksimitet planetoida (205) **Martha** (poremećajni, sa pretpostavljenom masom $m_i=10^{-13}$ mase Sunca) i (992) **Swasey,** tj. karakteristike proksimiteta njihovih putanja. U tom slučaju smo imali da je

$$\rho = \rho_p + \mathbf{V}_p\tau = \begin{cases} -0.0000\ 0313 - 0.0001\ 0233\ \tau, \\ +0.0000\ 0701 + 0.0568\ 3298\ \tau, \quad \text{(ekliptika, 1950.0)} \\ +0.0000\ 3713 - 0.0108\ 5231\ \tau, \end{cases}$$

što će reći

$$\rho_p = 0.0000\ 3792, \quad V_p = 0.0578\ 5992, \quad c = 0.0006\ 5538.$$

Donja granica integraljenja neka je opet 0.15 dana pre proksimiteta, dakle $\tau_0 = -0.0025\ 8031$. Zato će konstante integraljenja u (11) biti

$$10^{12}\,\mathbf{K}_1 = (+3747,\ -19374,\ -41150), \quad 10^{12}\,\mathbf{K}_2 = (0, +249, -40).$$

Potom račun po (11) daje $\Delta\rho$, sa iznosima u Tablici 1.

Rezultat je očigledan. S jedne strane vidimo da su poremećajni iznosi osetno ispod tačnosti s kojom računamo koordinate tela $(\pm 10^{-8})$, pa su naše pretpostavke o zanemarljivosti toga dejstva bile ovde opravdane (a i izvođenje samo »računa prvog reda«). S druge strane, nađene promene imaju »sekularni« tok. Svojim privlačnim dejstvom planetoid (205) **Martha** je povećao longitudu uzlaznog čvora planetoida (992) **Swasey** za oko 0''.088, a nagib njegove putanjske ravni za oko 0''.025 (kako smo našli, različitim postupcima, u [2], [3] i [5]). Ta nova putanja se vremenom sve više udaljava od one s kojom smo račun započeli, što se manifestuje u porastu promene $\Delta\rho$.

Tablica 1

t		$10^{12}\,\Delta\rho$		$10^{12}\,\lvert\Delta\rho\rvert$
−0.15	0	0	0	0
−0.12	0	0	0	0
−0.09	0	+3	0	3
−0.06	+1	7	−5	9
−0.03	1	16	11	19
$t_p=$ 0.00	3	40	28	49
+0.03	5	39	61	73
0.06	9	39	103	111
0.09	12	37	147	152
0.12	16	30	191	194
+0.15	+20	+22	−236	238

Zanimljivo će biti da ovako ukratko ispitamo poremećaje u međusobnoj daljini planetoida (215) **Oenone** i (1851) 1950 VA, pri proksimitetu njihovih putanja, dosada najtešnjem poznatom [1]. U tom slučaju je

$$\rho=\rho_p+\mathrm{V}_p\,\tau=\begin{cases}+0.0000\ 0006-0.0077\ 7506\ \tau,\\ +0.0000\ 0002-0.0807\ 9443\ \tau,\ \text{(ekliptika, 1950.0)}\\ -0.0000\ 0361-0.0021\ 4573\ \tau,\end{cases}$$

dakle

$$\rho_p=0.0000\ 0361,\qquad V_p=0.0811\ 9603,\qquad c=0.0000\ 4446.$$

Integracione konstante su:

$$10^{12}\ \mathrm{K}_1=(-3552,\ +20003,\ +341037),\quad 10^{12}\ \mathrm{K}_2=(-18,-188,-6).$$

Opet je pretpostavljeno da je $m_i=10^{-13}$. Poremećaji u vremenom intervalu dinamičkog proksimiteta su dati u Tablici 2.

Proksimitetska daljina tela je deset puta manja no u prethodnom slučaju, a poremećaji u ρ su ostali još uvek zanemarljivo mali. Sad se radi o »bržem« prok simitetu vrlo visokog reda: šest puta veći iznos poremećaja $\lvert\Delta\rho\rvert$ postignut je za četiri puta kraće vreme posle trenutka minimalne daljine. Promene putanjskih elemenata planetoida (1851) 1950 *VA* nisu zanemarljive: prema [6] dostižu —5''.0 u longitudi uzlaznog čvora i +4''.8 u nagibu putanjske ravni (svedeno na navedenu masu poremećajnog tela; apsolutni iznosi poremećajnih promena ostalih elemenata su manji od 0''.2). Vidimo da i ovolike promene putanjskih elemenata ne mogu uticati na ρ u onako kratkom vremenom intervalu oko trenutka proksimiteta. One će doći do izražaja tek kasnije, kada se nova putanja bude dovoljno udaljila od stare.

Tablica 2

t	$10^{12}\,\Delta\rho$			$10^{12}\lvert\Delta\rho\rvert$
-0.04	0	0	0	0
-0.03	9	0	0	0
-0.02	0	-3	$+1$	3
-0.01	0	9	1	9
$t_p =$ 0.00	-3	37	13	39
$+0.01$	8	65	117	134
0.02	10	72	232	243
0.03	13	75	350	358
$+0.04$	-14	-76	$+467$	473

Ova dva primera i njihova analiza nam sugerišu da osetne promene u međusobnoj daljini ρ (i eventualnu potrebu za »računom drugog reda«) možemo očekivati samo pri većoj masi poremećajnog planetoida i dužem trajanju proksimiteta. No u svakom slučaju obrazac (11) omogućava dovoljno tačnu ocenu tog poremećajnog dejstva. I to na neposredniji i brži način, nego da sa prethodno nađenim promenama oskulacionih elemenata poremećenog planetoida (ma i onako jednostavno kao u [5]) izvodimo odgovarajuće promene u $\mathbf{r}$, odnosno u ρ.

Literatura

[1] Lazović J. — Kuzmanoski M., *Minimum distances of the quasicomplanar asteroid orbits,* Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd **8** (1978), 47—54.

[2] Simovljević J. L., *Prilog računu poremećaja putanja planetoida u proksimitetu;* Glas CCCXI SANU, Prir.—mat. **44** (1979), 7—22.

Simovljevitch J. L., *Further note on the calculus of perturbations of asteroid orbits during prohimity,* Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd **9** (1979), 71—74.

[3] Simovljevitch J. L., *Approximate perturbation methods for regular asteroid proximities,* Acta Astr. **29** (1979) 445—453.

[4] Simovljevitch J. L., *Duration of quasicomplanar asteroids regular proximities,* Bull. LXXVI Acad. Serbe Sci. Arts, Math. **11** (1981), 33—37.

[5] Simovljevitch J. L., *Estimate of perturbation effects of asteroid orbits during proximity,* Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd **9** (1979), 75—78.

[6] Lazović J. — Kuzmanoski M., *Perturbing effects of the astaroid (215) Oenone on the asteroid (1851) 1950 VA during their proximity,* Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd **9** (1979), 63—69.

A NOTE ON THE DETERMINATION OF THE DISTANCE BETWEEN TWO ASTEROIDS DURING THEIR REGULAR PROXIMITY

Summary

An approximate method is developed by the aid of which one can determine the perturbative action of one asteroid upon his distance to the other one, during the regular proximity of these celestial bodies. The final effect appears to be not sensible during a time interval of »dynamical proximity« inferior to one day, if the mass of the perturbing asteroid is of the order of 10^{-13} Sun's mass and the proximity distance is of the order of 0.000005 a. u.

Prof. J. L. Simovljević
Prirodno—matematički fakultet, 11000 Beograd
Studentski trg 16/IV