

SOLUTION DU PROBLÈME DE LA PLAQUE RECTANGULAIRE À L'AIDE DES FONCTIONS ORTHOGONALES DES OSCILLATIONS TRANSVERSALES D'UNE POUTRE

Par

MILAN ĐURIĆ

Considérons une plaque rectangulaire de dimensions $2a$ et $2b$ et un système de coordonnées, attaché à celle-ci, comme le montre la fig. 1. Supposons la soumise aux charges p_d sur le côté $x = +a$ et p_l sur le côté $x = -a$. En désignant respectivement par p_d^+ , p_l^+ les charges symétriques et par p_d^- , p_l^- les charges antisymétriques correspondant à p_d et p_l , la charge de la plaque peut être décomposée en quatre groupes. Le premier groupe, doublement antisymétrique (par rapport aux axes x et y à la fois), correspond à la charge $\frac{1}{2}(p_d^+ + p_l^+)$ le long du côté $x = \pm a$; le second, doublement symétrique, avec la charge $(p_d^- + p_l^-)/2$; le troisième, symétrique par rapport à l'axe des x et antisymétrique par rapport à celui des y , correspond à la charge $(p_d^+ - p_l^+)/2$ sur le côté $x = +a$ et à la charge $(p_l^+ - p_d^+)/2$ sur $x = -a$; et le quatrième groupe, antisymétrique par rapport à l'axe des x et symétrique par rapport à celui des y , correspondant respectivement aux charges $(p_d^- - p_l^-)/2$ et $(p_l^- - p_d^-)/2$.

Si l'on connaît les solutions de ces quatre sortes fondamentales de charges, on pourra par la superposition trouver la solution d'une charge arbitraire de la plaque. Nous donnerons ici la solution pour le cas d'une charge antisymétrique-symétrique (représenté sur la fig. ci-dessus), dont on pourra, par l'analogie, tirer les solutions pour les autres cas aussi.

On sait que le problème plan de l'état de tension se ramène à la recherche d'une fonction $\varphi(x, y)$, à savoir la fonction d'Airy, et que les tensions sont alors données par

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

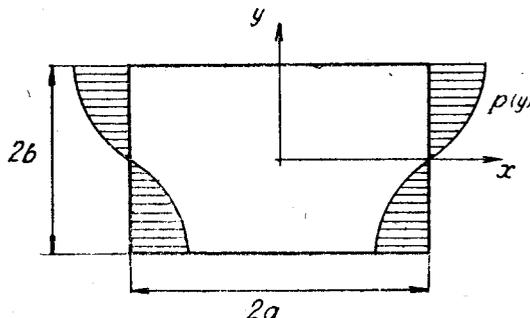


Fig. 1

La fonction elle-même doit être déterminée de telle sorte que entre toutes les „fonctions possibles“ du problème c'est-à-dire satisfaisant les conditions aux limites, elle rende minimum la valeur de l'énergie potentielle de la plaque

$$V = \frac{1}{2E} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Les conditions aux limites sont ici

$$\text{pour } x = \pm a \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = p \quad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\text{pour } y = \pm b \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Appliquons la méthode de Ritz et essayons de trouver la solution sous la forme

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x, y) = \varphi_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} X_m(x) Y_n(y).$$

En admettant alors que la fonction $\varphi_0(y)$ satisfait la condition

$$\frac{d^2 \varphi_0(y)}{dy^2} = p,$$

les fonctions $\varphi_i(x, y) = X_m(x) Y_n(y)$ doivent satisfaire les conditions:

$$\text{pour } x = \pm a \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\text{pour } x = \pm b \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ces dernières seront satisfaites si on a:

$$X_m(\pm a) = 0 \quad \text{et} \quad X_m'(\pm a) = 0,$$

$$Y_n(\pm b) = 0 \quad \text{et} \quad Y_n'(\pm b) = 0.$$

Ces propriétés possèdent la famille des fonctions orthogonales qui représentent les formes principales des oscillations transversales libres d'une poutre de portée $2a$ resp. $2b$, encastree aux deux extrémités. On les déduit facilement de l'équation différentielle homogène:

$$f^{(IV)} = k^4 f$$

et des conditions précédentes. On trouve ainsi deux familles de fonctions, paires et impaires. La fonction d'Airy devant être dans le cas présent paire en x et impaire en y , nous adopterons pour $X_m(x)$ la famille des fonctions paires

$$X_m(x) = \frac{\text{Ch } k_m x}{\text{Ch } k_m a} - \frac{\cos k_m x}{\cos k_m a}$$

satisfaisant pour tous k_m la condition $X_m(\pm a) = 0$, tandis que la condition $X_m'(\pm a) = 0$ sera satisfaite pour celles des valeurs k_m qui sont racines de l'équation transcendente

$$\text{Th } ka + \text{tg } ka = 0$$

dont les solutions suffisamment exactes sont fournies par

$$k_m a = \left(m - \frac{1}{4}\right) \pi = (4m - 1) \frac{\pi}{4} = \bar{m} \frac{\pi}{4}; \quad \bar{m} = 4m - 1; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Les fonctions sont déterminées de manière que

$$\int_{-a}^{+a} X_m^2 dx = 2a.$$

Pour $Y_n(y)$ nous adopterons la famille des fonctions impaires

$$Y_n(y) = \frac{\text{Sh } k_n y}{\text{Sh } k_n b} - \frac{\sin k_n y}{\sin k_n b}$$

qui, de même que celle que $X(x)$, satisfait les conditions pour k_n résultant de l'équation

$$\text{Th } kb - \text{tg } kb = 0.$$

Les racines de cette équation sont données avec une exactitude suffisante par

$$k_n b = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi = (4n + 1)\frac{\pi}{4} = \bar{n}\frac{\pi}{4}; \quad \bar{n} = 4n + 1; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ces fonctions sont déterminées de manière que

$$\int_{-b}^{+b} Y_n(y) dy = 2b.$$

En plus du fait que les systèmes des fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ représentent des systèmes de fonctions orthogonales entre les limites $-a$ et $+a$, leurs dérivées secondes

$$X_m''(x) = k_m^2 \left[\frac{\text{Ch } k_m x}{\text{Ch } k_m a} + \frac{\cos k_m x}{\cos k_m a} \right],$$

$$Y_n''(y) = k_n^2 \left[\frac{\text{Sh } k_n y}{\text{Sh } k_n b} + \frac{\sin k_n y}{\sin k_n b} \right],$$

sont aussi de systèmes des fonctions orthogonales entre les mêmes limites et représentent les formes principales des oscillations transversales d'une poutre aux extrémités libres.

En portant maintenant l'expression pour $\varphi(x, y)$ dans la formule de l'énergie potentielle, on trouve

$$V = \frac{1}{2E} \int \int \left[\left(p + \sum_m \sum_n \alpha_{mn} X_m Y_n \right)^2 + \left(\sum_m \sum_n \alpha_{mn} X_m'' Y_n \right)^2 + 2 \left(\sum_m \sum_n \alpha_{mn} X_m' Y_n' \right)^2 \right] dx dy$$

Ces coefficients α_{mn} se déterminent de la condition du minimum de l'énergie potentielle, c'est-à-dire de la condition

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_{mn}} = 0; \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De cette manière, en tenant compte de l'orthogonalité des fonctions, on a les conditions:

$$\begin{aligned} & \alpha_{mn} \left[\int_{-a}^{+a} X_m^2 dx \int_{-b}^{+b} (Y_n'')^2 dy + \int_{-a}^{+a} (X_m'')^2 dx \int_{-b}^{+b} Y_n^2 dy \right] + \\ & + 2 \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \sum_{\kappa_1=1}^{\infty} \alpha_{\mu_1 \kappa_1} \int_{-a}^{+a} X_{\mu_1}' X_m' dx \int_{-b}^{+b} Y_{\kappa_1}' Y_n' dy = - \int_{-a}^{+a} X_m dx \int_{-b}^{+b} p(y) Y_n'' dy. \end{aligned}$$

Les quadratures qui se présentent ici s'effectuent facilement:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} X_m^2 dx &= 2a, & \int_{-b}^{+b} Y_n^2 dy &= 2b, \\ \int_{-a}^{+a} (X_m'')^2 dx &= 2a k_m^4, & \int_{-b}^{+b} (Y_n'')^2 dy &= 2b k_n^4, \\ \int_{-a}^{+a} X_{\mu_1}' X_m' dx &= 8 \frac{k_m^2 k_{\mu_1}^2}{k_m^4 - k_{\mu_1}^4} [k_m \operatorname{tg} k_m a - k_{\mu_1} \operatorname{tg} k_{\mu_1} a] \quad \text{pour } \mu_1 \neq m, \\ \int_{-b}^{+b} Y_{\kappa_1}' Y_n' dy &= 8 \frac{k_n^2 k_{\kappa_1}^2}{k_n^4 - k_{\kappa_1}^4} [k_{\kappa_1} \operatorname{ctg} k_{\kappa_1} b - k_n \operatorname{ctg} k_n b] \quad \text{pour } \kappa_1 \neq n, \\ \int_{-a}^{+a} (X_m')^2 dx &= 2k_m \operatorname{tg} k_m a [1 + k_m a \operatorname{tg} k_m a], \\ \int_{-b}^{+b} (Y_n')^2 dy &= 2k_n \operatorname{ctg} k_n b [k_n b \operatorname{ctg} k_n b - 1], \\ \int_{-a}^{+a} X_m dx &= -\frac{4}{k_m} \operatorname{tg} k_m a. \end{aligned}$$

A l'aide de ces valeurs les équations de condition peuvent facilement être mises sous la forme

$$C_{mn}^{mn} \alpha_{mn} + \sum_{\kappa} C_{m\kappa}^{mn} \alpha_{m\kappa} + \sum_{\mu} C_{\mu n}^{mn} \alpha_{\mu n} + \sum_{\mu} \sum_{\kappa} C_{\mu\kappa}^{mn} \alpha_{\mu\kappa} =$$

$$= -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{a}{\beta} \int_{-b}^{+b} p(y) \bar{Y}_n dy$$

$$\mu = 1, 2, \dots, (m-1), (m+1), \dots; \quad \kappa = 1, 2, \dots, (n-1), (n+1), \dots$$

$$m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad \beta = \frac{b}{a}.$$

En prenant pour $k_m a$ et $k_n b$ leurs valeurs approchées, les coefficients C sont donnés par:

$$C_{mn}^{mn} = \left(\beta^2 \bar{m}^2 + \frac{\bar{n}^2}{\beta^2} \right) \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 + 2 \frac{\bar{m}^2}{n} \left(\bar{m} \frac{\pi}{4} - 1 \right) \left(\bar{n} \frac{\pi}{4} - 1 \right),$$

$$C_{m\kappa}^{mn} = 8 \frac{\bar{m}^2}{n} (\bar{\kappa} - \bar{n}) \left(\bar{m} \frac{\pi}{4} - 1 \right) \frac{\bar{n}^2 \bar{\kappa}^2}{\bar{n}^4 - \bar{\kappa}^4},$$

$$C_{\mu n}^{mn} = 8 \frac{\bar{m}}{n} (\bar{\mu} - \bar{m}) \left(\bar{n} \frac{\pi}{4} - 1 \right) \frac{\bar{m}^2 \bar{\mu}^2}{\bar{m}^4 - \bar{\mu}^4},$$

$$C_{\mu\kappa}^{mn} = 32 \frac{\bar{m}^2 \bar{n}^2 \bar{\mu}^2 \bar{\kappa}^2}{(\bar{m}^4 - \bar{\mu}^4)(\bar{n}^4 - \bar{\kappa}^4)} (\bar{\kappa} - \bar{n}) (\bar{\mu} - \bar{m}) \frac{\bar{m}}{\bar{n}^2}.$$

où on a posé:

$$\bar{m} = 4m - 1; \quad \bar{\mu} = 4\mu - 1; \quad \bar{n} = 4n + 1; \quad \bar{\kappa} = 4\kappa + 1;$$

$$\bar{Y}_n = \frac{\text{Sh } k_n y}{\text{Sh } k_n b} + \frac{\sin k_n y}{\sin k_n b}; \quad \beta = \frac{b}{a}.$$

Du rapport β ne dépendent que les coefficients C_{mn}^{mn} . Mais ces derniers sont en tous cas sensiblement supérieurs à tous les autres coefficients, surtout lorsque les rapports β sont petits, de sorte que les équations peuvent être facilement résolues par la méthode d'itération. Dans le cas des petits rapports β , on peut négliger les sommes au second membre de l'équation

et calculer les coefficients explicitement. Négliger ces termes revient, du point de vue physique, à négliger l'effet des tensions de cisaillement sur la valeur de l'énergie potentielle de la barre soumise à la flexion.

Nous illustrerons l'applicabilité de la méthode par un exemple. La solution du problème d'une plaque chargée uniformément sur $y = +b$ et soutenue sur $x = \pm a$, comme le montre la fig. 2, peut être donnée à l'aide d'un polynôme, sans toutefois pouvoir alors satisfaire les conditions aux limites. Sur $x = \pm a$ la condition $\sigma_x = 0$ n'est pas tout à fait satisfaite, mais on a

$$(\sigma_x)_{x=\pm a} = \frac{q}{2b^3} \left(\frac{3}{5} y b^2 - y^3 \right).$$

La résultante et le moment de réduction de toutes les tensions restants sont nuls. Par conséquent

$p = (\sigma_x)_{x=\pm a}$, considéré comme la charge répartie sur ces côtés, représente un système d'équilibre qui, d'après le postulat de Saint-Venant, ne donne lieu qu'à des tensions locales dans la partie hachurée de la fig. 2. Nous nous proposons d'examiner d'un peu plus près les tensions dans la plaque résultant de cette charge et de fixer les limites qu'atteignent ces tensions locales.

Pour la valeur des seconds membres des équations de condition on a dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \frac{a}{\beta} \int_{-b}^{+b} p(y) \cdot \bar{Y}_n dy &= \frac{4}{\pi} \frac{a}{\beta} \frac{q}{2b^3} \int_{-b}^{+b} \left(\frac{3}{5} b^2 y - y^3 \right) \left(\frac{\text{Sh } k_n y}{\text{Sh } k_n b} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin k_n y}{\sin k_n b} \right) dy = - \frac{12qb^3}{\beta^2 n^3} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{n} \frac{4}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Etant donné que Y_n représente un système orthogonal de fonctions les valeurs représentées, à un facteur constant près, les coefficients de Fourier généralisés du développement de la charge en série suivant ces fonctions. Comme ces valeurs vont en

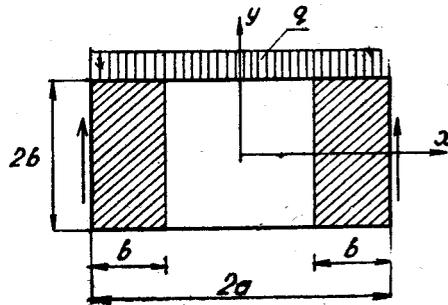


Fig. 2

décroissant rapidement avec n , il suffit de prendre deux termes, c'est-à-dire d'adopter deux tons pour Y . Le nombre de tons nécessaire pour X dépend du rapport des côtés a et b . Pour $\beta = 4$ on a formé dans le tableau ci-dessous les équations de condition, en adoptant quatre tons pour X . De ces nombres on voit les rapports des coefficients C .

$\frac{\alpha_{ijk}}{m n}$	α_{11}	α_{21}	α_{31}	α_{41}	α_{12}	α_{22}	α_{32}	α_{42}	
11	754,8	-10,6	-8,4	-6,8	-5,3	4,0	3,2	2,5	3,006 qb^2
21	-23,9	2011,0	-63,6	-60,0	9,3	-96,2	23,6	22,4	
31	-30,8	-100,0	4044,5	-156,0	11,6	37,2	-404,0	58,4	
41	-33,8	-128,6	-213,0	7711,8	12,6	47,9	79,5	-1060,2	
12	-1,6	1,2	1,0	0,8	2412,1	-11,9	-9,7	-7,8	0,594 qb^2
22	2,9	-29,7	7,3	6,9	-27,6	5905,7	-73,4	-69,2	
32	3,6	11,5	-124,5	18,0	-35,5	-115,1	10128,8	-180,8	
42	3,9	14,8	24,6	-327,5	-39,0	-148,1	-245,7	15623,6	

Ce système d'équations permet d'obtenir facilement par le procédé d'itération, pour les coefficients les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 4,017 \cdot 10^{-3} qb^2, & \alpha_{12} &= 0,249 \cdot 10^{-3} qb^2, \\ \alpha_{21} &= 1,584 \cdot 10^{-3} qb^2, & \alpha_{22} &= 0,108 \cdot 10^{-3} qb^2, \\ \alpha_{31} &= 0,834 \cdot 10^{-3} qb^2, & \alpha_{32} &= 0,0678 \cdot 10^{-3} qb^2, \\ \alpha_{41} &= 0,461 \cdot 10^{-3} qb^2, & \alpha_{42} &= 0,0465 \cdot 10^{-3} qb^2. \end{aligned}$$

Dans le cas actuel sont intéressantes les tensions normales σ_x , qui sont données par

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p(y) + k_{n-1}^2 (\alpha_{11} X_1 + \alpha_{21} X_2 + \alpha_{31} X_3 + \alpha_{41} X_4) \bar{Y}_1 + \\ &+ k_{n-2}^2 (\alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{32} X_3 + \alpha_{42} X_4) \bar{Y}_2. \end{aligned}$$

La fig. 3 illustre l'allure des fonctions

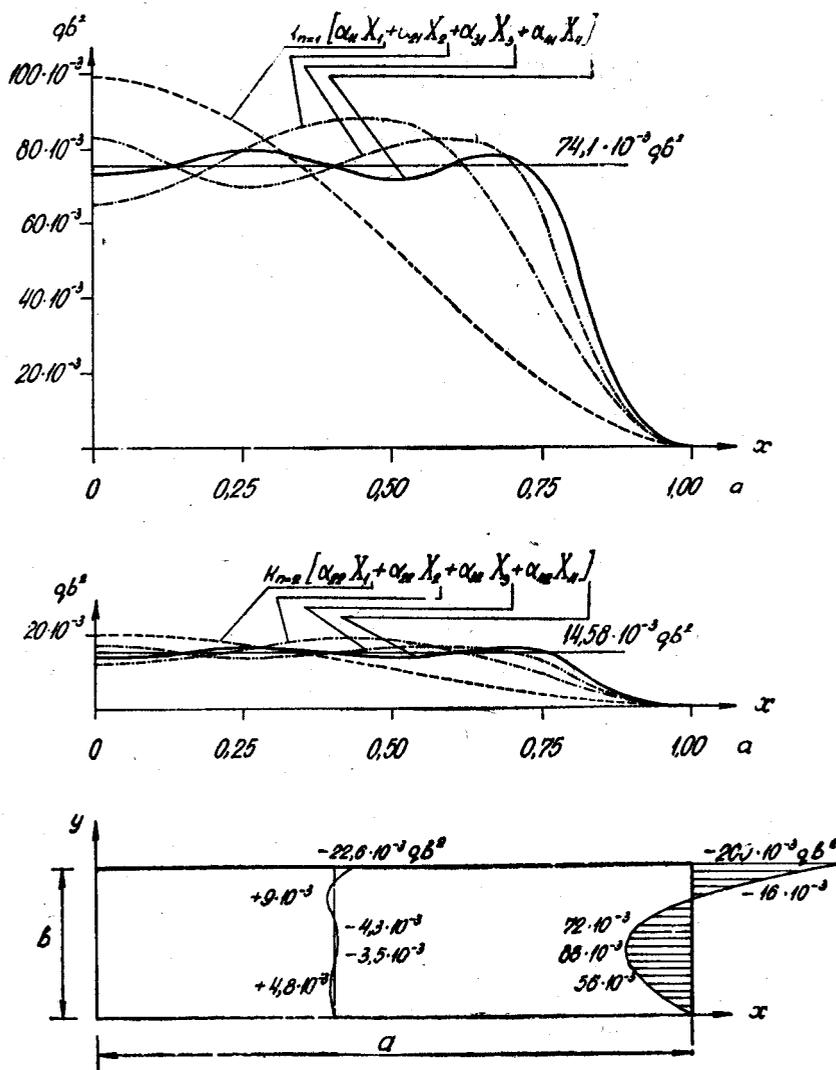


Fig. 3

et

$$k^2_{n=1} (\alpha_{11} X_1 + \alpha_{21} X_2 + \alpha_{31} X_3 + \alpha_{41} X_4)$$

$$k^2_{n=2} (\alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{32} X_3 + \alpha_{42} X_4).$$

Comme le montre la fig. les fonctions tendent, pour $x = \pm 0,75 a$, vers des valeurs constantes, à savoir: la première vers $74,1 \cdot 10^{-8} q b^2$ et la seconde vers $14,58 \cdot 10^{-8} q b^2$. Ces valeurs, prises avec le signe négatif, représentent les coefficients dans le développement de la fonction $p(y)$ en série suivant les fonctions orthogonales \bar{Y}_n . On en peut conclure que l'action des tensions locales peut, dans le cas actuel, dépasser $a/8$ resp. $b/2$.
