SUR LA LIMITE INFÉRIEURE DES MODULES DES ZÉROS D'UN POLYNÔME

Par

D. MARKOVITCH

Le but du présent travail est d'exposer une méthode simple et générale pour obtenir les limites inférieures des modules des zéros d'un polynôme.

I.

Soit donnée une équation

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x^\nu = 0\,, \tag{1}$$

les coefficients a_ν étant des nombres réels ou complexes, et où x désigne un zéro. De cette équation il résulte l'inégalité

$$|a_0| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \rho^\nu, \qquad |x| = \rho \tag{2}$$

qui nous servira de base, en la „comparant" à une autre expression de forme semblable et convenablement choisie: polynôme, série ordonnée suivant les puissances croissantes de ρ, somme composée des $|a_\nu|$.

Prenons d'abord le cas d'une série et considérons la fonction

$$\varphi(\rho) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \rho^\nu, \tag{3}$$

où les coefficients b_ν sont supposés positifs et la série convergente pour $0 < \rho < r$. De (2) et (3) l'on déduit l'inégalité

$$\frac{|a_0|}{\varphi(\rho)} < \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \rho^\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \rho^\nu} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_\nu|}{b_\nu} b_\nu \rho^\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \rho^\nu},$$

et du fait, que toute moyenne à coefficients $b_\nu \rho^\nu$ positifs de la suite de nombres $\frac{|a_\nu|}{b_\nu}$ ne peut dépasser son plus grand terme, il résulte

$$\frac{|a_0|}{\varphi(\rho)} < \underset{1 \leq \nu \leq n}{Max} \left\{ \frac{|a_\nu|}{b_\nu} \right\} = \mu .$$

Donc: *si l'on choisit la fonction* $\varphi(\rho)$ *de telle manière, que l'équation*

$$\varphi(\rho) = \frac{|a_0|}{\mu} \tag{4}$$

ait une seule racine positive ρ_0, *située dans l'intevalle* (0, r), *cette racine sera la limite inférieure des nodules de tous les zéros de l'équation (1).*

Exemples. — 1° Soit

$$b_\nu = \frac{1}{t^\nu}, \quad t > 0, \quad \varphi(\rho) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{t} \right)^\nu = \frac{\rho}{t - \rho}, \quad 0 < \rho < t.$$

Alors la limite inférieure des modules des zéros, donnée par (4), sera

$$\rho_0 = \frac{|a_0| t}{|a_0| + \mu(t)}, \quad \mu(t) = \underset{1 \leq \nu \leq n}{Max} (|a_\nu| t^\nu).$$

Par une autre voie cette expression de la limite a été obtenue par E. Landau[1]) et J. Karamata[2]) pour les fonctions analytiques.

2° — En supposant que les $m-1$ premiers coefficients a_ν, à l'exception de a_0, sont égaux à zéro, c. à. d. que

$$a_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m-1,$$

alors on peut de même supposer que

$$b_\nu = 0\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m-1\,.$$

En posant, en outre,

$$b_\nu = 1 \quad \text{pour} \quad \nu = m, m+1, \ldots, n\,,$$

la fonction $\varphi(\rho)$ devient

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^m}{1-\rho}\,, \quad \rho < 1\,,$$

et la limite inférieure des modules des zéros sera donnée par l'unique racine positive $\rho_0\,(\rho_0 < 1)$ de l'équation

$$\frac{\mu}{|a_0|}\rho^m + \rho = 1\,, \quad \text{où} \quad \mu = \underset{m \leq \nu \leq n}{Max}\,(|a_\nu|).$$

II.

Dans le cas précedent on a directement comparé l'inégalité (2). Cependant, pour obtenir d'autres expressions pour la limite inférieure des modules, on peut, au préalable, majorer son second membre en lui appliquant l'une quelconque des inégalités classiques.

C'est ainsi que E. Landau[1]), par l'application de l'inégalité de Cauchy – Schwarz, déduit immédiatement le résultat de M. Petrovitch[3]), à savoir que: Quelque soit la valeur positive de la quantité t, aucune racine de la fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_0 \neq 0)$$

ne se trouve à l'intérieur du cercle C entourant l'origine et de rayon

$$\frac{|a_0| \cdot t}{\sqrt{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 t^{2\nu}}}\,.$$

On peut généraliser ce résultat en se servant de l'inégalité de Hölder[4]). Ainsi, en désignant par t un nombre positif, l'inégalité (2) peut s'écrire

$$(5) \qquad |a_0|\leqslant|a_1t|\cdot\frac{\rho}{t}+|a_0t^2|\cdot\frac{\rho^2}{t^2}+\cdots+|a_nt^n|\cdot\frac{\rho^r}{n}.$$

En appliquant à cette expression l'inégalité de Hölder

$$\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\cdot B_\nu\leqslant\Big(\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu^m\Big)^{\frac{1}{m}}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}B^{m'}\Big)^{\frac{1}{n'}},$$

valable pour

$$A_\nu>0,\ \ B_\nu>0,\ \ m>0,\ \ m'>0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{m'}=1,$$

c. à. d. en posant

$$A_\nu=|a_\nu t^\nu|,\quad B_\nu=\Big(\frac{\rho}{t}\Big)^\nu,$$

l'inégalité (5) deviendra

$$|a_0|\leqslant[|a_1t|^m+|a_2t^2|^m+\cdots+|a_nt^n|^m]^{\frac{1}{m}}\Big[\Big(\frac{\rho}{t}\Big)^{m'}+$$
$$+\Big(\frac{\rho}{t}\Big)^{2m'}+\cdots+\Big(\frac{\rho}{t}\Big)^{nm'}\Big]^{\frac{1}{m'}},$$

et, à fortiori

$$|a_0|^{m'}<\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^m t^{m\nu}\Big)^{\frac{m'}{m}}\cdot\frac{\rho^{m'}}{t^{m'}-\rho^{m'}},\qquad \rho>t.$$

Enfin il s'ensuit que

$$\rho>\frac{|a_0|\,t}{\sqrt[m']{|a_0|^{m'}+\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^m t^{m\nu}\Big)^{\frac{m'}{m}}}}.$$

Donc on peut formuler la proposition suivante:

si t, m, m' désignent trois quantités positives, m et m' vérifiant la relation

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}=1,$$

la limite inférieure des modules des zéros de l'équation (1) sera donnée par l'expression

$$\text{(6)} \qquad \frac{|a_0|\,t}{\sqrt[m']{|a_0|^{m'} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^m t^{m\nu}\right)^{\frac{m'}{m}}}},$$

Exemples. — 1° Pour

$$m = m' = 2,$$

la limite inférieure (6) deviendra

$$\frac{|a_0|\,t}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^2 t^{2\nu}}},$$

c. à. d. l'expression de M. Petrovitch.

2° Pour

$$m' = 1, \qquad m = \infty,$$

la limite inférieure se réduit à

$$\frac{|a_0|\,t}{|a_0| + \mu(t)}, \qquad \mu(t) = \underset{1 \leq \nu \leq n}{Max}\{|a_\nu|\,t^\nu\}$$

déjà obtenue plus haut.

Remarque. Au lieu d'un paramètre t que nous avons introduit dans l'inégalité (5), on peut introduire une suite de nombres positifs $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ Avant d'appliquer l'inégalité de Hölder, l'inégalité (2) peut s'écrire

$$|a_0| \leqslant |a_1 c_1| \frac{\rho}{c_1} + |a_2 c_2^2| \frac{\rho^2}{c_2^2} + \cdots + |a_n c_n| \frac{\rho_n}{c_n^n}.$$

On obtiendra alors d'autres expressions pour la limite inférieure des modules des zéros de l'équation (1) dépendant également de n paramètres arbitraires.

Communiqué le 3-XII-1947

О ДОЊОЈ ГРАНИЦИ МОДУЛА КОРЕНА ЈЕДНЕ АЛГЕБАРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Од
Д. МАРКОВИЋА

У овом раду износи се једна елементарна и општа м-тода за добивање доње границе модула корена алгебарске једначина.

Метода се у овом састоји.

Десна страна неједначине

$$|a_0| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \rho^\nu, \qquad |x| = \rho, \tag{1}$$

која се може формирати из дате алгебарске једначине

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x^\nu = 0,$$

„упоређује се" непосредно или посредно са неким другим погодно изабраним и по форми сличним изразом. Тај израз може бити полином по ρ, ред по све већим степенима од ρ, или известан збир величина $|a_\nu|$.

I. Упореди ли се неједначина (1) непосредно са редом

$$\varphi(\rho) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \rho^\nu,$$

где су $b_\nu > 0$, а ред конвергентан за $0 < \rho < r$, и примени ли се теорема о горњој граници аритметичке средине бројева $\frac{|a_\nu|}{b_\nu}$ са позитивним коефицијентима $b_\nu \rho^\nu$, добиће се

$$\frac{|\alpha_0|}{\varphi(\rho)} < \underset{1 \leq \nu \leq n}{Max} \left\{ \frac{|a_\nu|}{b_\nu} \right\} = \mu,$$

а одавде овај резултат:

ако се изабере функција $\varphi(\rho)$ тако, да једначина

$$\varphi(\rho) = \frac{|a_0|}{\mu}$$

има један позитиван корен ρ_0, но такав да се налази у интервалу $(0, r)$, тај корен претставља доњу границу модула корена дате алгебарске једначине.

Пошто у резултат улази произвољна функција φ, то се за њене специјалне вредности могу добити разноврсна правила за доњу границу модула корена алгебарске једначине.

II. Ако се неједначина (1) претходно мајорира помоћу неке класичне неједначине, па затим изврши поређење наведено у претходном ставу, добиће се нови облици за доњу границу модула корена дате алгебарске једначине.

Тако, на пр., модификацијом неједначине (2) у

$$|a_0| \leqslant |a_1 t| \frac{\rho}{t} + |a_2 t^2| \frac{\rho^2}{t^2} + \cdots + |a_n t^n| \frac{\rho^n}{t^n}$$

и применом Hölder-ове неједначине добиће се овај резултат: *ако се са t, m и m' означе три позитивна броја, од којих m и m' задовољавају једначину*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1,$$

доња граница модула корена дате алгебарске једначине биће дата изразом

$$\frac{|a_0|\, t}{\sqrt[m']{|a_0|^m + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu t^\nu|^m\right)^{\frac{m'}{m}}}}.$$

RÉFÉRENCES

1) E. Landau — Über eine Aufgabe aus der Funktionentheorie. The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 5, Nos. 3, 4 June 1914.

2) J. Karamata — Sur la limite inférieure des modules des zéros des fonctions analytiques Glas S.K. Akademije CXXVII.

3) M. Petrovitch — Remarque sur les zéros des séries de Taylor. Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXIX (1901).

4) P. Montel a aussi appliqué l'inégalité de Hölder pour obtenir la limite supérieure des modules des zéros des polynômes. Voir par exemple: Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique. Comptes Rendus de la Société des lettres et des sciences de Varsovie, 24, 1931, Cl. III.