# Sur une décomposition de la droite

Par

WACLAW SIERPINSKI

**1.** M. Banach[1]) a démontré qu'*il existe une décomposition de la droite en* deux *ensembles disjoints de puissance du continu, dont chacun est transformé par chaque translation* (le long de la droite) *en lui même, si l'on néglige un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu.*

Je démontrerai ici qu'*on peut remplacer dans le théorème de M. Banach le nombre* deux par $2^{\aleph_0}$.

Soit

(1) $$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_\omega, x_{\omega+1}, \cdots, x_\xi, \cdots (\xi < \varphi)$$

une suite trasfinie du plus petit type ordinal $\varphi$ (de puissance du continu) formée de tous les nombres réels.

Nous définirons, par l'induction transfinie, une suite transfinie de nombres réels $\{p_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Soit maintenant $\alpha$ un nombre ordinal, $1 < \alpha < \varphi$, et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres $p_\xi$, où $\xi < \alpha$. Désignons par $H_\alpha$ l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$p_\xi \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n},$$

---

1) Voir S. Banach *Fundamenta Mathematicae* t. XIX, p. 13 ss.; cf. W. Sierpinski *Fund. Math.* t. XIX, p. 24 (Th. II) et t. XXVI, p. 143.

où $\xi < \alpha$ et $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $\leqslant \alpha$ et où les signes $\pm$ peuvent être pris arbitrairement.

L'ensemble $H_\alpha$ est, comme on voit sans peine, de puissance $\leqslant \bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2+\bar{\alpha}^3+\cdots$, donc, d'après $\alpha<\varphi$ (ce qui donne $\bar{\alpha}<2^{\aleph_0}$) de puissance $<2^{\aleph_0}$. Il existe donc dans la suite (1) des termes qui n'appartiennent pas à $H_\alpha$: nous définirons $p$ comme le premier de tels termes.

Posons $P_1=(p_1)$ et désignons, pour $1<\alpha<\varphi$, par $P_\alpha$ l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} ,$$

où $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$. On a, comme on voit sans peine:

(2) $$P_\alpha(x_\mu)=P_\alpha , \text{ et } P_\alpha(-x_\mu)=P_\alpha , \text{ pour } \alpha>\mu ,$$

où $P(a)$ désigne généralement la translation de l'ensemble $P$ de longueur $a$ (c'est-à-dire $P(a)$ est l'ensemble de tous les nombres $x+a$, où $x \in P$).

D'après $\bar{\varphi}=2^{\aleph_0}$ et $2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ il existe une fonction $f(\xi,\eta)$ de deux variables ordinales $\xi<\varphi$ et $\eta<\varphi$ qui établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les systèmes $(\xi,\eta)$, où $\xi<\varphi$ et $\eta<\varphi$ et l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\zeta<\varphi$.

Posons

(3) $$M_\lambda=\sum_{\eta<\varphi} P_{f(\lambda,\eta)} \text{ pour } \lambda<\varphi$$

(4) $$E_\lambda = M_\lambda \text{ pour } 1<\lambda<\varphi$$

et

(5) $$E_1=M_1+(X-\sum_{\lambda<\varphi} M_\lambda) ,$$

où $X$ désigne l'ensemble de tous les nombres réels.

Je dis que

(6) $$X=\sum_{\lambda<\varphi} E_\lambda$$

est la décomposition désirée de l'ensemble de tous les nombres réels.

Montrons d'abord qu'on a

$$(7) \qquad P_\alpha P_\beta = 0 \text{ pour } \alpha < \beta < \varphi .$$

En effet, admettons que $\alpha<\beta<\varphi$ et que $p \in P_\alpha P_\beta$. D'après la définition des ensembles $P_\alpha$ et $P_\beta$ il existe deux suites finies de nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, tous $<\alpha$ et $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k$, tous $<\beta$, tels qu'on a

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} \text{ et } p = p_\beta \pm x_{\eta_1} \pm x_{\eta_2} \pm \cdots \pm x_{\eta_k},$$

d'où

$$p_\beta = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} \mp x_{\eta_1} \mp x_{\eta_2} \mp \cdots \mp x_{\eta_k},$$

où les nombres ordinaux $\alpha, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k$ sont tous $<\beta$, ce qui donne tout de suite, d'après la définition de l'ensemble $H_\beta$, $p_\beta \in H_\beta$, contrairement à la définition du nom' re $p_\beta$. La formule (7) est ainsi établie.

La fonction $f(\xi, \eta)$ étant à valeurs distinctes, il résulte tout de suite des formules (3) et (7) que

$$(8) \qquad M_\alpha M_\beta = 0 \text{ pour } \alpha < \beta < \varphi .$$

Il résulte ainsi de (4), (5) et (8) que les termes de la série (6) sont deux à deux disjoints.

Or, il résulte tout de suite de la définition des ensembles $P_\alpha$ que $p_\alpha \in P_\alpha$, donc $P_\alpha \neq 0$ pour $\alpha < \varphi$. D'après (7) et (3) (la fonction $f(\xi, \eta)$ étant à valeurs distinctes), les ensembles $M_\lambda$, donc, d'après (4) et (5), aussi les ensembles $E_\lambda$ $(\lambda < \varphi)$ sont chacun de puissance $2^{\aleph_0}$

Soit maintenant $a$ un nombre réel donné quelconque. Il existe donc un nombre ordinal $\mu < \varphi$, tel que $a = x_\mu$.

Posons

$$(9) \qquad Q = \sum_{\xi \leqq \mu} P_\xi .$$

Je dis que l'ensemble $Q$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

En effet, il résulte de la définition de l'ensemble $P_\alpha$ que

$$\overline{\overline{P}}_\alpha \leqq \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^3 + \cdots = \aleph_0 \cdot \bar{\alpha}, \text{ pour } \alpha < \varphi$$

donc

$$\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{\sum_{\xi \leqq \mu} P_\xi}} \leqslant \aleph_0 \sum_{\xi \leqq \mu} \overline{\overline{\xi}} \leqslant \aleph_0 \cdot \overline{\overline{\mu}}^2 < 2^{\aleph_0} ,$$

puisque $\mu < \varphi$.

Je dis maintenant que

$$M_\lambda(a) - M_\lambda \subset Q(a) \text{ pour } \lambda < \varphi . \tag{10}$$

En effet, soit $\lambda$ un nombre ordinal donné $<\varphi$. D'après (3) et (9) on a

$$(M_\lambda(a) - M_\lambda) - Q(a) = M_\lambda(a) \cdot CM_\lambda \cdot CQ(a) = \tag{11}$$
$$= \sum_{\eta<\varphi} \Big[ P_{f(\lambda,\eta)}(a) \cdot \prod_{\zeta<\varphi} CP_{f(\lambda,\zeta)} \cdot \prod_{\xi \leqq \mu} CP_\xi(a) \Big] .$$

Soit $\eta$ un nombre ordinal donné $<\varphi$. Si $f(\lambda,\eta) \leqslant \mu$, on a pour $\xi = f(\lambda,\eta)$, $\xi \leqslant \mu$ et $P_{f(\lambda,\eta)}(a) \cdot CP_\xi(a) = 0$.

Si $f(\lambda,\eta) > \mu$, on a, d'après (2): $P_{f(\lambda,\eta)}(a) = P_{f(\lambda,\eta)}(x_\mu) = P_{f(\lambda,\eta)}$, donc $P_{f(\lambda,\eta)} \cdot CP_{f(\lambda,\zeta)} = 0$ pour $\zeta = \eta$.

Tous les termes de la série (11) sont donc des ensembles vides, ce qui donne $(M_\lambda(a) - M_\lambda) - Q(a) = 0$, donc la formule (10).

Pareillement (d'après (2)) on démontre que

$$M_\lambda(-a) - M_\lambda \subset Q(-a) \text{ pour } \lambda < \varphi , \tag{12}$$

ce qui donne tout de suite (si l'on applique une translation de longueur $a$ aux côtés de l'inclusion (12)):

$$M_\lambda - M_\lambda(a) \subset Q \text{ pour } \lambda < \varphi . \tag{13}$$

D'après (4), (10) et (13) on a donc

$$E_\lambda(a) - E_\lambda \subset Q(a) \text{ et } E_\lambda - E_\lambda(a) \subset Q \text{ pour } 1 < \lambda < \varphi . \tag{14}$$

Or, d'après (5) et (8) on a

$$E_1 = X - \sum_{1<\lambda<\varphi} M_\lambda ,$$

ce qui donne tout de suite, d'après $X(a) = X$:

$$E_1(a) - E_1 = \Big(X - \sum_{1 < \lambda < \varphi} M^\lambda(a)\Big) - \Big(X - \sum_{1 < \lambda < \varphi} M_\lambda\Big) \subset$$
$$\subset \sum_{1<\lambda<\varphi} M_\lambda - \sum_{1<\lambda<\varphi} M_\lambda(a) \subset \sum_{1<\lambda<\varphi}\big(M_\lambda - M_\lambda(a)\big),$$

donc, d'après (13):

(15) $$E_1(a) - E_1 \subset Q,$$

et pareillement on trouve

$$E_1 - E_1(a) \subset \sum_{1<\lambda<\varphi} (M_\lambda(a) - M_\lambda),$$

donc, d'après (10)

(16) $$E_1 - E_1(a) \subset Q(a).$$

Posons

(17) $$R = Q + Q(a):$$

l'ensemble $Q(a)$ étant superposable avec l'ensemble $Q$ qui est de puissance $< 2^{\aleph_0}$, on a aussi $\overline{\overline{R}} < 2^{\aleph_0}$. Or, d'après (14), (15) et (16) on a

$$E_\lambda(a) - E_\lambda \subset R \text{ et } E_\lambda - E_\lambda(a) \subset R \text{ pour } \lambda < \varphi.$$

Nous avons ainsi démontré ce

**Théorème I.** *Il existe une décomposition de la droite $X$ en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints de puissance $2^{\aleph_0}$, $X = \sum_\lambda E_\lambda$, telle que pour chaque translation $T$* (le long de la droite) *il existe un ensemble de points $R$ de puissance $< 2^{\aleph_0}$* (dépendant de la translation $T$), *tel que chacun des ensembl s $E_\lambda$ est transformé par la translation $T$ en lui même, abstraction faite des points de l'ensemble $R$.*

Si l'on admet l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), on peut évidemment remplacer dans notre théorème la condition que $R$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$ par celle que $R$ est au plus dénombrable.

**2.** Appelons *ensemble de Banach* tout ensemble linéaire qui est de puissance du continu ainsi que son complémentaire et qui est transformé par chaque translation (le long de la droite) en lui même, si l'on néglige un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu. On voit sans peine que:

1° Un complémentaire d'un ensemble de Banach est encore un ensemble de Banach.

2° Tout ensemble qui est une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de Banach et dont le complémentaire est de puissance $2^{\aleph_0}$, est un ensemble de Banach.

3° Tout ensemble de puissance du continu qui est un produit d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de Banach est un ensemble de Banach.

La démonstration de la proposition 2° s'en suit tout de suite du théorème de J. König, d'après lequel le nombre $2^{\aleph_0}$ n'est pas une somme d'une série finie ou dénombrable de nombres cardinaux $< 2^{\aleph_0}$. On peut aussi démontrer que pour que tout ensemble qui est une somme de $\mathfrak{m}$ ensembles de Banach et dont le complémentaire est de puissance $2^{\aleph_0}$ soit un ensemble de Banach, il faut et il suffit que le nombre $2^{\aleph_0}$ ne soit pas une somme de $\mathfrak{m}$ nombres cardinaux $< 2^{\aleph_0}$

Je démontrerai maintenant que

*Il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles de Banach différents.*

En effet, il résulte sans peine de la démonstration du théorème I que toute somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles de la suite transfinie $\{P_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ est un ensemble de Banach, si son complémentaire est de puissance $2^{\aleph_0}$. Or, d'après $\overline{\varphi} = 2^{\aleph_0}$, il existe évidemment $2^{2^{\aleph_0}}$ telles sommes (puisqu'il y a $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles du continu qui sont de puissance $2^{\aleph_0}$ ainsi que leurs complémentaires) et, d'après (7), elles sont toutes distinctes.

**3.** Deux ensembles infinis sont dits *presque disjoints* si l'ensemble de leurs éléments communs a une puissance inférieure à celle de chacun de ces ensembles. Je prouverai maintenant ce

**Théorème II.** *Il existe une décomposition de la droite en plus que $2^{\aleph_0}$ ensembles de Banach presque disjoints.*[1])

1) Ce théorème est à confronter avec une proposition plus faible suivante que nous avons obtenu avec M. Ruziewicz dans *Fund. Math.* t. XIX, p. 21: La droite est une somme de plus que $2^{\aleph_0}$ ensembles infinis, tels que pour deux ensembles quelconques d'entre eux, toute translation de l'un et toute translation de l'autre sont des ensembles presque disjoints.

Démonstration. J'ai démontré[1]) qu'il existe une famille $\Phi$ de puissance $> 2^{\aleph_0}$ formée de suites transfinies du type $\varphi$ de nombres ordinaux croissants $< \varphi$ deux à deux finalement disjointes, c. à. d. telles que $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{\beta_\xi\}_{\xi<\varphi}$ étant deux suites de la famille $\Phi$, il existe toujours un nombre ordinal $\mu < \varphi$, tel que

$$\alpha_\xi \neq \beta_\eta \text{ pour } \mu < \xi < \varphi \text{ et } \mu < \eta < \varphi. \tag{18}$$

A chaque suite $S = \{\alpha_\xi\}_{\xi<\varphi}$ de la famille $\Phi$ faisons correspondre l'ensemble linéaire

$$E(S) = \sum_{\xi<\varphi} P_{\alpha_\xi} \tag{19}$$

et posons

$$E_0 = X - \sum_{S\in\Phi} E(S). \tag{20}$$

On aura évidemment

$$X = E_0 + \sum_{S\in\Phi} E(S)$$

et il résulte sans peine de la démonstration du théorème I que chacun des ensembles $E_0$ et $E(S)$, où $S\in\Phi$, dont la famille nous désignerons par $F$, est un ensemble de Banach. L'ensemble $X$ est ainsi une somme de plus que $2^{\aleph_0}$ ensembles de Banach qui constituent la famille $F$.

Or, je dis que les ensembles de la famille $F$ sont deux à deux presque disjoints. L'ensemble $E_0$ étant, d'après (20), disjoint avec tout ensemble $E(S)$, où $S\in\Phi$, il suffira de démontrer que les ensembles $E(S_1)$ et $E(S_2)$ sont presque disjoints pour

$$S_1\in\Phi,\ S_2\in\Phi,\ S_1\neq S_2. \tag{21}$$

D'après (21) on a $S_1 = \{\alpha_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $S_2 = \{\beta_\xi\}_{\xi<\varphi}$, et il existe un nombre ordinal $\mu<\varphi$, tel qu'on a les formules (18). D'après (19), (18) et (7) on trouve sans peine

$$E(S_1)\cdot E(S_2) \subset \sum_{\xi\leq\mu} (P_{\alpha_\xi} + P_{\beta_\xi}). \tag{22}$$

---

[1]) *Fund. Math.* t. 28, p. 115.

Or, comme nous avons prouvé, en démontrant le théorème I l'ensemble $\sum_{\xi \leq \mu} (P_{\alpha_\xi} + P_{\beta_\xi})$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$ pour $\mu < \varphi$. L'ensemble $E(S_1) \cdot E(S_2)$ est donc, d'après (22), aussi de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Or, les ensembles $S_1$ et $S_2$ étant formés chacun de $2^{\aleph_0}$ nombres ordinaux distincts, il résulte de (19), (7) et de $P_\alpha \neq 0$ pour $\alpha < \varphi$ que les ensembles $E(S_1)$ et $E(S_2)$ sont chacun de puissance $2^{\aleph_0}$. Il sont donc presque disjoints, c. q. f. d.

Le théorème II se trouve ainsi démontré.

Comme j'ai démontré[1]), si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition du continu en une classe de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles indénombrables ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. Il en résulte sans peine que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une famille $\Phi$ de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ de suites transfinies du type $\Omega$ de nombres ordinaux croissants $< \Omega$, telle que $\{a_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{b_\xi\}_{\xi<\Omega}$ étant deux suites de la famille $\Phi$, il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que

$$a_\xi \neq b_\eta \text{ pour } \mu < \xi < \Omega \text{ et } \mu < \eta < \Omega .$$

Comme dans la démonstration du théorème II, on en déduit ce

**Théorème III.** *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition de la droite en $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles de Banach presque disjoints.*

Citons enfin le théorème suivant:

*Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble de Banach de mesure nulle (resp. de 1re catégorie)* [2]).

---

1) *Monatshefte f. Math. u. Phys.* XXXV, p. 241.

2) Voir p. e. W. Sierpinski *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXVIII (1935) p. 134 et 135.