PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle serie, tome 26 40), 1979, pp. 113—129

COMPLÉMENTS AUX TRAITÉS DE KAMKE ET DE MURPHY. V. QUELQUES CLASSES DE L'ÉQUATION DE RICCATI EFFECTIVEMENT INTÉGRABLES AVEC DEUX COEFFICIENTS ARBITRAIRES ET LE TROISIÈME DÉPENDANT DE CES DEUX ET D'UNE FONCTION ARBITRAIRE

Dédiée au Professeur D. S. Mitrinović à l'occasion
du 70-ième anniversaire de sa naissance

Andrzej Kapcia

(Received January 16, 1978)

Résumé. On donne une méthode de l'obtention des classes de l'équation de Riccati effectivement intégrables avec deux coefficients arbitraires et le troisième dépendant de ceux-ci et d'une fonction arbitraire. On cite quinze classes d'équation de Riccati qui sont des généralisations beaucoup de classes particulières conclues dans les livres de Kamke et de Murphy. Elles sont effectivement intégrables d'après la connaissance de leurs solutions particulières. On formule aussi douze conditions suffisantes d'intégrabilité de ladite équation. Les conditions citées sont des généralisations de certaines conditions donnés avant. On montre la possibilité de faire le déplacement des résultats obtenus sur l'équation du second ordre.

Indrotuction

Dans la présente note nous allons étudier l'équation de Riccati

$$y'=a(x)\,y^2+b(x)\,y+c(x), \tag{0.1}$$

où $a(x)\neq 0$, $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)\in C$ dans l'intervalle X, au point de vue de l'existence de ses solutions particulières. On sait bien, que la connaissance d'une solution particulière de cette équation, donne la possibilité de la résoudre effectivement (v. p. ex. (3) p. 22, (4) p. 45, (11) p. 16, (9) p. 86). La même remarque concerne l'équation différentielle linéaire du second ordre, qui est liée avec l'équation (0.1) par la rélation bien connue

$$a(x)\,y=-u'/u. \tag{0.2}$$

Il est probable que la connaissance de telles classes générales de l'équation de Riccati (v. ce travail p. ex les classes d'équations: (2.3), (3.5) — (3.7) etc.) effectivement intégrables crée la possibilité de l'intégration en quadratures de certaines équations du deuxième ordre importantes dans des applications.

Dans notre travail (5) nous avons donné quelques critères suffisants d'intégrabilité par quadratures de l'équation de Riccati et de même quelques classes de équation de Riccati avec deux coefficients arbitraires, intégrables grace à la connaissance de leurs colutions particulières. Dans cette note-ci, nous présenterons des généralisations près de tous résultats obtenus dans (5).

Dans nos considérations qui succéderont, la fonction arbitraire $\mu(x)$ joue un rôle très important. Comme nous le verrons, dans le travail (5) cette fonction — là, est égale à zéro.

Nous remarquons encore qu'en faisant une vérification des équations de Riccati conclues dans les traités de Kamke (3) ou (4) et de Murphy (11), nous avons compté une équation à la classe donnée dans ce travail, en choisissant parmi six fonctions $\mu(x)$ — celle qui est la plus simple. Par exemple, pour l'équation

$$y' = y^2 + (2x + x^{-1})y + x^2, \tag{0.3}$$

qui possède la solution particulière $y_0 = -x$ (v. (3) ou (4) p. 324 n. (1.103)) nous obtenons: $\mu_1(x) = -(x^2+1)$, $\mu_2(x) = 2x^2$, $\mu_3(x) = -(x^2+1)$, $\mu_4(x) = -2x^2 - 1$, $\mu_5(x) = x^2$, $\mu_6(x) = -1$. On peut obtenir l'équation (0.3) de chaque classe d'équations donnée dans notre travail en choissant convenablement la fonction $\mu(x)$, les deux de trois fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$, et la constante K — si la dernière est nécessaire. Par exemple, pour les classes: (2.3) — $\mu_1(x)$, pour (3.5), $\cdot$, (3.7) — $\mu_2(x)$, pour (4.5), $\cdot$, (4.7) — $\mu_3(x)$ pour (5.1), (5.2) — $\mu_4(x)$, pour (6.5), —, (6,7) — $\mu_5(x)$, pour (7.5), $\cdot$, (7.7) — $\mu_6(x)$. La même remarque concerne l'obtention de sa solution particulière. Comme la fonction $\mu(x) = -1$, est la plus simple d'entre les six fonctions — $\mu(x)$ citées ci-dessus, alors nous comptons l'équation (0.3) à des classes (7.5) — (7.7), et nous y la citons.

Dans le chapitre I, nous donnerons l'idée générale de l'obtention des classes d'équations dont les solutions particulières sont connues. Dans les chapitres II—VII nous présenterons succésivement tous les cas de l'équation de Riccati — intéressants au point de vue de notre méthode, et dans le chapitre VIII on donne des remarques finales.

Nous remarquons que dans les traités de Kamke (3) ou (4) et de Murphy (11) il y a 128 équations de Riccati, qui ne sont ni des équations de Bernoulli ni celles à variables séparables. De ce nombre des équations, comme nous le verrons plus loin, on peut obtenir facilement 72 équations de six classes seulement. Mais, on peut les obtenir exclusivement d'un moindre nombre des classes données dans ce travail.

Les problémes de l'intégration effective des équations différentielles sont toujours actuels v. p. ex.: (1), (6), (7), (8), (10) et (12). Il est probable que certains des résultats obtenus dans ce domaine, créeront la possibilité de l'obtention de nouveaux résultats dans la théorie qualitative de certaines formes des équations différentielles (v. aussi (2)).

I. Une méthode de l'obtention des classes d'équations de Riccati effectivement integrables

Considérons l'équation de Riccati (0.1). On peut la présenter sous une des formes suivantes:

(1.1) $$y' - a(x)y^2 = b(x)y + c(x),$$

(1.2) $$y' - b(x)y = a(x)y^2 + c(x),$$

(1.3) $$y' - c(x) = a(x)y^2 + b(x)y;$$

et dans les formes:

(1.4) $$y' - a(x)y^2 - c(x) = b(x)y,$$

(1.5) $$y' - b(x)y - c(x) = a(x)y^2,$$

(1.6) $$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

(1.7) $$y' - a(x)y^2 - b(x)y = c(x).$$

Introduisons les substitutions suivantes:

(1.8) $$y' - a(x)y^2 = \mu(x) \quad \text{et} \quad b(x)y + c(x) = \mu(x),$$

(1.9) $$y' - b(x)y = \mu(x) \quad \text{et} \quad a(x)y^2 + c(x) = \mu(x),$$

(1.10) $$y' - c(x) = \mu(x) \quad \text{et} \quad a(x)y^2 + b(x)y = \mu(x);$$

et pour (1.4) — (1.7) les substitutions:

(1.11) $$y' - a(x)y^2 - c(x) = \mu(x) \quad \text{et} \quad b(x)y = \mu(x),$$

(1.12) $$y' = b(x)y - c(x) = \mu(x) \quad \text{et} \quad a(x)y^2 = \mu(x),$$

(1.13) $$y' = \mu(x) \quad \text{et} \quad a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = \mu(x),$$

(1.14) $$y' - a(x)y^2 - b(x)y = \mu(x) \quad \text{et} \quad c(x) = \mu(x).$$

Remarquons encore que, si la solution quelconque $y(x)$ est connue, alors la fonction $\mu(x)$ est connue aussi, si $y(x)$ est inconnue alors la fonction $\mu(x)$ possède la même propriété, à l'exception de cas (1.14). C'est pouruoi ce cas n'est pas intéressant au point de vue de la méthode présentée.

Notre méthode consiste à la résolution successivement des systèmes d'équations (1.8) — (1.13), à la recherche des conditions liant les coefficients $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ avec la fonction $\mu(x)$ et puis, à la construction des classes d'équations dont les solutions particulières sont déterminées par les équations (1.8) — (1.13).

On voit qu'on peut toujours résoudre effectivement les équations différentielles (1.9), (1.10), (1.12) et (1.13) et aussi les équations algébriques (1.8) — (1.13), mais, en général, on ne peut pas résoudre des équations différentielles (1.8) et (1.11), à l'exception de quelques cas particuliers. Malgré cela, en profitant de notre méthode, on peut obtenir plus de dix conditions d'intégrabilité effective de l'équation de Riccati (0.1), grâce à la connaissance de ces solutions particulières.

On peut aussi appliquer la méthode présentée aux équations différentielles d'autres formes pour lesquelles la connaissance de leurs solutions particulières donne la possibilité de leur intégration par des quadratures (par exemple l'équetion linéaire du deuxième ordre).

Nous avons déjà annoncé cette méthode dans le travail (5) en l'appliquant dans les cas (1.8), (1.9) et (1.10) avec la fonction $\mu(x)\equiv 0$ dans X. Maintenant nous examinons tous les cas cités plus haut. Nous allons formuler des théorèmes en forme des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence des solutions particulières de l'équation de Riccati (0.1).

Dans la suite, nous nous occuperons exclusivement de l'équation (0.1) avec des coefficients réels.

II. Cas $y' - a(x)y^2 = \mu(x)$ et $b(x)y + c(x) = \mu(x)$

Théorème II.1. *Soient les fonctions* $a(x)\in C$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)\in C^1$, $a(x)\neq 0$, $b(x)\neq 0$ *et* $\mu(x)\neq c(x)$ *dans l'intervalle* X. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$y_0 = \frac{\mu(x) - c(x)}{b(x)}, \tag{2.1}$$

soit une solution particulière de l'équation (0.1), *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)$ *satisfassent à la condition*

$$\left[\frac{\mu(x) - c(x)}{b(x)}\right]_x' - a(x)\left[\frac{\mu(x) - c(x)}{b(x)}\right]^2 - \mu(x) = 0 \tag{2.2}$$

pour $x\in X$.

Démonstration. Nécessité. Supposons que la fonction (2.1) est la solution de l'équation (0.1). En la posant dans l'équation (0.1) nous obtenons la condition (2.2). Suffisance. Si la condition (2.2) est satisfaite, alors on peut dèterminar la fonction $a(x)$ par $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x)$. En le faisant nous obtenons l'équation (0.1) sous la forme

$$y' = \frac{\left(\dfrac{\mu(x) - c(x)}{b(x)}\right)_x' - \mu(x)}{\left(\dfrac{\mu(x) - c(x)}{b(x)}\right)} y^2 + b(x)y + c(x).$$

Il est facile de remarquer, que la fonction (2.1) est sa solution particulière.

Il est évident que cette démonstration est très facile. Donc, nous omettrons toutes les dèmostrations des théorèmes qui sont analogiques.

Remarque II. 1 Si la fonction $\mu(x)$ est égalè à zéro dans l'intervalle X, nous obtenons de la solution (2.1) la solution (2.3) du travail (5), et de la condition (2.2) la condition (2.4) de (5).

C o r o l h i r e II.1 *La sous — classe de la classe de l'équation de Riccati* (0.1) *en forme*

$$y'=\left\{\left[\frac{\mu(x)-c(x)}{b(x)}\right]'_x-\mu(x)\right\}\frac{b^2(x)}{(\mu(x)-c(x))^2}y^2+b(x)y+c(x) \tag{2.3}$$

est effectivement intégrable. Sa solution particulière a la forme (5.1).

R e m a r q u e II.2 En posant $\mu(x)\equiv 0$ dans l'équation (2.3) nous obtenons une de trois classes données dans le travail (5) (v. coroll. II.1).

Considèrons maintenant l'équation différentielle du cas (1.8). Remarquons qu'on ne peut pat la résoudre généralement — c'est une équation de Riccati, mais on peut faire cela dans des cas particuliers p. ex. pour $\mu(x)\equiv 0$ (v. th. II.1 du travail (5)), et dans quelques autres donnés dans ce travail (v. les équations: (3.5.1), (3.7.1), (4.5.1), (4.7.1)). C'est un problème très spécial et nous ne nous en occupons pas ici.

D'autre part, en vertu des suppositions du th. II.1 et supposant que $a(x)\neq 0$, on peut donner la condition (2.2) dans une forme intègrale. En le faisant nous obtenons la condition

$$\begin{gathered} b(x)\left(\int a(x)\,dx+\mathrm{K}\right)^{-1}+ \\ +(\mu(x)-c(x))\left\{1+\left(\int a(x)\,dx+K\right)^{-1}\int\frac{\mu(x)\,b^2(x)}{(\mu(x)-c(x))^2}\,dx\right\}=0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

pour $x\in X$. On voit, que pour $\mu(x)\equiv 0$, nous obtenons la condition

$$b(x)\left(\int a(x)\,dx+K\right)^{-1}-c(x)\equiv 0. \tag{2.4.1}$$

C'est la condition (2.2) du travail (5) (v. th. II.1) et en conséquence la condition (2.4) est sa gènèralisation. La différence parmi des conditions (2.4) et (2.4.1) est telle qu'on peut déterminer $b(x)$ de (2.4.1) ainsi que $c(x)$ en fonction des coefficients restants, ce qui est impossible dans le cas (2.4). Donc, on ne peut pas dans ce cas déterminer des classes possiblement générales de l'équation de Riccati (0.1) effectivement intégrables. Malgré cela, on peut déterminer la solution particulière de l'équation (0.1), si la condition (2.4) est satisfaite. D'après la fonction (2.1) et de la condition (2.4) nous obtenons la fonction

$$y_0=-\alpha^{-1}(x), \tag{2.5}$$

où $\alpha(x)\equiv\int a(x)\,dx+K+\int\frac{\mu(x)\,b^2(x)}{(\mu(x)-c(x))^2}\,dx$, K — constante arbitraire la même comme dans la condition (2.4). Nous allons vérifier qu'elle est aussi la solution de l'équation (0.1). Donc, on peut formuler le théorème suivant:

T h é o r è m e II.2 *Soient les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)\in C$, $a(x)\neq 0$, $b(x)\neq 0$, $c(x)\neq\mu(x)$ *dans l'intervalle* X. *La condition suffisante pour que la fonction* (2.5), *soit une solution de l'équation* (0.1), *est que les fonctions* $a(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)$ *satisfassent à la condition.* (2.4).

D è m o n s t r a t i o n. Nous démontrerons que l'identité suivante

$$y_0' - a(x) y_0^2 \equiv b(x) y_0 + c(x)$$

a lieu. D'après la condition (2.4) et la fonction (2.5) nous avons:

$$L(x) \equiv y_0' - a(x) y_0^2 \equiv \frac{1}{\alpha^2(x)} \alpha'(x) - a(x) \frac{1}{\alpha^2(x)} \equiv$$

$$\equiv \frac{\mu(x) b^2(x)}{\alpha^2(x)(\mu(x) - c(x))^2} \equiv \alpha(x);$$

$$P(x) \equiv b(x) y_0 + c(x) \equiv -\frac{b(x)}{\alpha(x)} + c(x) \equiv (\mu(x) - c(x)) + c(x) \equiv \mu(x).$$

Il en résulte que la fonction $y_0(x)$ est la solution de l'équation (0.1) pour laquelle la condition (2.4) est satisfaite.

Nous remarcquons encore qu'on peut obtenir la condition (2.4.1) de la condition donnée dans le travail (1), v. p. 82 l'équation (7.12), en posant $f(x) \equiv 1$, et aussi que cette condition est différente de nos conditions données dans ce travail.

R e m a r q u e II.3 Les équations citées ci-dessous de Kamke (3) ou (4) et de Murphy (11) sont des cas particuliers de l'èquation (2.3): (1.16) si $\mu(x) \equiv 0$, (1.22) si $\mu(x) \equiv 1$; (50) si $\mu(x) \equiv 1$, (51) si $\mu(x) \equiv 0$. Les coefficients des équations: (1.16), (1.22), (50), et (51) avec les fonctions $\mu(x)$ — choisies comme plus haut, satisfont aussi à la condition (2.4). De (2.5), nous obtenons leurs solutions particulières. La constante K doit être convenablement choisie.

III. Cas $y' - b(x) y = \mu(x)$ et $a(x) y^2 + c(x) = \mu(x)$

T h é o r è m e III.1 *Soient les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x) \in C$, *et de plus:* 1) $a(x)(c(x) - \mu(x)) < 0$ *ou* 2) $a(x)\ c(x) > 0$ *et* $\mu(x) = 0$ *dans* X. *La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions*

$$y_0 = \exp\left(\int b(x)\, dx\right) \left\{\int \left(\mu(x) \exp\left(-\int b(x)\, dx\right)\right) dx + K\right\}, \tag{3.1}$$

où: $1/K$ — const. *réelle et* $\mu^2(x) + K^2 > 0$ *ou* 2) K — const. *imaginaire pure, soient des solutions particulières de l'équation* (0.1) *dans l'intervalle* X, *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)$ *satisfassent respectivement aux conditions*

$$\begin{aligned} &a(x) \exp\left(2 \int b(x)\, dx\right) \left\{\int \left(\mu(x) \exp\left(-\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. - \int b(x)\, dx\right)\right) dx + K\right\}^2 - \mu(x) + c(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

pour $x \in X$ (*dans le deuxième cas il faut prendre dans* (3.1) *et* (3.2) $\mu(x) \equiv 0$ *et la constante* K *imaginaire pure*).

Nous avons annoncé cette condition dans le travail (5) comme exemple de notre méthode. On démontre ce théoreme analogiquement que le th. II.1.

Remarque III.1 Pour $\mu(x)=0$ dans l'intervalle X, et la constante K réelle nous obtenons le th. III.1 du travail (5) — v. la condition (3.9) avec le signe plus. Pour $\mu(x)=0$ dans X, et la constante K imaginaire pure, nous obtenons la condition (3.9) du travail (5) avec le signe moins. Les solutions réelles dans ce dernier cas sont données dans le même travail — v. remarque III.1, les formules (3.8.1) et (3.8.2) de (5).

La première partie du th. III.1 est une généralisation de la première partie du th. III.1 du travail (5), et la deuxième a la même forme que celle danc le travail (5). L'admission de la constante K imaginaire pure, dans la solution (3.1) et simultanément $\mu(x)\equiv 0$, si $a(x)\,c(x)>0$, est possible, car dans ce cas les équations obtenues ont aussi les coefficients réels (v. coroll. III.1).

Théorème III.2 *Soient les fonctions* $a(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)\in C^1$, $b(x)\in C$, *et:* 1) $a(x)(c(x)-\mu(x))<0$ *ou* 2) $a(x)\,c(x)>0$ *et* $\mu(x)=0$ *dans l'intervalle* X. *La condition nécessaire et suffisante pur que les fonctions*

$$y_0=\pm[(\mu(x)-c(x))/a(a)]^{1/2}, \tag{3.3}$$

soient des solutions particulières de l'équation (0.1), *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)$ *satisfassent respectivement aux conditions*

$$\pm\left[\sqrt{\frac{\mu(x)-c(x)}{a(x)}}\right]_x' \mp b(x)\sqrt{\frac{\mu(x)-c(x)}{a(x)}}-\mu(x)=0 \tag{3.4}$$

pour $x\in X$ *(dans le deuxième cas les solutions* (3.3) *sont imaginaires).*

Remarque III.2 Si la fonction $\mu(x)=0$ dans X, nous obtenons les solutions (3.10.1) et (3.10.2) du travail (5) des solutions (3.3), ainsi que la condition (3.11) de (5) des conditions (3.4). Dans le deuxième cas les solutions (3.3) sont imaginaires — les solutions réelles correspondantes ont été données dans le travail (5) — v. remarque III.2, les formules (3.10.3) et (3.10.4).

Nous remarquons encore que l'admission des solutions particulières imaginaeres élargit les limites de l'obtention des solutions réelles.

Remarque III.3 Les conditions (3.4) peuvent être obtenues des conditions (3.2), mais dans le th. III.1 il faut supposer de plus sur les fonations.

Les corollaire suivant rèsulte des théorèmes III.1 et III.2:

Corollaire III.1 *Les sous-classes de la classe de l'équation de Riccati* (0.1) *en forme:*

$$y'=\frac{\mu(x)-c(x)}{\exp\left(2\int b(x)\,dx\right)\left\{\int\left(\mu(x)\exp\left(-\int b(x)\,dx\right)\right)dx+K\right\}^2}y^2+ \\ +b(x)\,y+c(x), \tag{3.5}$$

(3.6)
$$y'=a(x)\,y^2+\left\{\left[\frac{\mu(x)-c(x)}{a(x)}\right]_x'\mp 2\,\mu(x)\sqrt{\frac{\mu(x)-c(x)}{a(x)}}\right\}\frac{a(x)}{2(\mu(x)-c(x))}y+c(x),$$

$$(3.7)\qquad y' = a(x)y^2 + b(x)y + \mu(x) - $$
$$- a(x)\exp\Big(2\int b(x)\,dx\Big)\Big\{\int\Big(\mu(x)\exp\Big(-\int b(x)\,dx\Big)\Big)\,dx + K\Big\}^2,$$

où: dans les cas (3.5) *et* (3.7): $1/K$ *— const. réelle,* $K \neq 0$, *2)* K *— const. imaginaire pure, Im* $K \neq 0$ *et* $\mu(x) \equiv 0$; *et dans le cas* (3.6): 1) $a(x)\,(c(x) - \mu(x)) < 0$, 2) $a(x)\,c(x) > 0$ *et* $\mu(x) \equiv 0$; *— sont effectivement intégrables. Leurs solutions particulières ont respectivement les formes: dans les cas* (3.5) *et* (3.7) *la forme* (3.1), *et dans le cas* (3.6) *les formes* (3.3). *Si les solntions* (3.1) *et* (3.3) *sont imaginaires, alors les solutions particulières réelles ont respectivement les formes* (3.8.1) *et* (3.8.2); *et* (3.10.3), (3.10.4) *le travail* (5) *— remarques* III.1 *et* III.2.

Remarque III.4 En posant $\mu(x) \equiv 0$ et la constante K convenable, dans les équations citées ci-dessus, nous obtenons les cinq classes de l'équation de Riccati obtenues dans le travail (5) (v. coroll: III.1 de (5)).

Remarque III.5 Les formes particulières des èquations (3.5), (3.6) et (3.7) ont les équations suivantes de Kamke (3) ou (4): (1.32) si $\mu(x) \equiv \sin/\cos^2 x$, (1.97), (1.98), (1.102), (1.106), (1.110), (1.163) si $\mu(x) \equiv 0$, (1.164) si $\mu(x) = 1/4 - a/\sqrt{x}$, (1.180), (1.201) si $\mu(x) \equiv 0$; et de Murphy (11): (72) si $\mu(x) \equiv \sin x/\cos^2 x$, (167), (170), (171), (178), (184), (249) si $\mu(x) \equiv 0$, (271) si $\mu(x) \equiv 0$ et $b = -1$, (272) si $\mu(x) \equiv 0$ et $b = -2$, (324) si $\mu(x) \equiv -2k - 1$, (333) si $\mu(x) \equiv 0$, (352) si $\mu(x) \equiv 5/x^3$, (371) si $\mu(x) \equiv 0$. Leurs coefficients et la fonction correspondante $\mu(x)$ satisfont à: 1) la condition $\delta(x) < 0$, p. ex.: (1.110), (1.172); 2) la condition $\delta(x) < 0$ ou $\delta(x) > 0$, p. ex.: (1.97), (1.163); 3) la condition $\delta(x) > 0$, p. ex.: (167); — où $\delta(x) \equiv a(x)\,(c(x) - \mu(x))$.

Comme dans les équations (3.5) et (3.7) on peut prendre $b(x) \equiv 0$, alors nous avons le corollaire suivant:

Corollaire III.2 *Les équations près canoniques de Riccati en forme:*

$$(3.5.1)\qquad y' = \frac{\mu(x) - c(x)}{\Big(\int \mu(x)\,dx + K\Big)^2}\,y^2 + c(x),$$

$$(3.7.1)\qquad y' = a(x)y^2 + \mu(x) - a(x)\Big(\int \mu(x)\,dx + K\Big)^2$$

sont effectivement intégrables. Leurs solutions particulières ont la forme $y_0 = \int \mu(x)\,dx + K$, *où* K *— const. arbitraire et* $\mu^2(x) + K^2 > 0$.

IV. Cas $y' - c(x) = \mu(x)$ et $a(x)y^2 + b(x)y = \mu(x)$

Théorème IV.1 *Soient les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x) \in C$, $a(x) \not\equiv 0$, $c(x) \neq -\mu(x)$ *pour* $x \in X$. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$(4.1)\qquad y_0 = \int (c(x) + \mu(x))\,dx + K,$$

où K const. arbitraire, soit une solution particulière de l'équation (0.1) *définie dans l'intervalle X, est que les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x)$ satisfassent à la condition*

$$(4.2)\qquad a(x)\left[\int (c(x)+\mu(x))\,dx+K\right]^2+b(x)\left[\int (c(x)+\mu(x))\,dx+K\right]-\mu(x)=0$$

pour $x\in X$.

Remarque IV.1 Pour $\mu(x)\equiv 0$ nous obtenons le th. IV.1 du travail (5) — condition (4.2).

Théorème IV.2 *Soient les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $\mu(x)\in C^1$, $c(x)\in C$ et $a(x)\neq 0$, $b^2(x)+4\,a(x)\,\mu(x)\geqslant 0$ dans l'intervalle X. La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions*

$$(4.3)\qquad y_0=\frac{-b(x)\mp\sqrt{b^2(x)+4\,a(x)\,\mu(x)}}{2\,a(x)},$$

soient des solutions particulières de l'équation (0.1), *est que les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x)$ satisfassent respectivement aux conditions*

$$(4.4)\qquad c(x)+\mu(x)-\left\{\frac{-b(x)\mp\sqrt{b^2(x)+4\,a(x)\,\mu(x)}}{2\,a(x)}\right\}'_x=0$$

pour $x\in X$.

Remarque IV.2 En posant $\mu(x)\equiv 0$ nous obtenons la condition (4.4) du travail (5) et $c(x)\equiv 0$. Cette dernière condition est banale car dans ce cas l'équation de Riccati à la forme de celle de Bernoulli.

Le corollaire suivant résulte des théorèmes IV.1 et IV.2:

Corollaire IV.1 *Les sous — classes de l'équation de Riccati* (0.1) *en forme:*

$$(4.5)\qquad y'=\frac{\mu(x)-b(x)\left(\int (c(x)+\mu(x))\,dx+K\right)}{\left(\int (c(x)+\mu(x))\,dx+K\right)}\,y^2+b(x)\,y+c(x),$$

$$(4.6)\qquad y'=a(x)\,y^2+\frac{\mu(x)-a(x)\left(\int (c(x)+\mu(x))\,dx+K\right)^2}{\int (c(x)+\mu(x))\,dx+K}\,y+c(x),$$

$$(4.7)\qquad y'=a(x)\,y^2+b(x)\,y-\mu(x)-\left\{\frac{b(x)\pm\sqrt{b^2(x)+4\,a(x)\,\mu(x)}}{2\,a(x)}\right\}'_x.$$

où K cont. arbitraire, sont effectivement intégrables. Leurs solutions particulière ont respectivement les formes: dans les cas (4.5) *et* (4.6) *la forme* (4.1), *et dans les cas* (4.7) *les formes* (4.3).

Remarque IV. 3 En posant $\mu(x)\equiv 0$ nous obtenons les classes de l'équation de Riccati obtenues dans le travail (5) — v. coroll. IV.1.

Remarque IV.4 Les équations citées plus haut des généralisations des équations de Kamke (3) ou (4): (1.20), (1.21), (1.27), (1.28) pour $\mu(x)\equiv 0$, (1.33) pour $\mu(x)\equiv f'g/f^2$, (1.170) pour $\mu(x)\equiv x$; et de Murphy (11): (46), (49), (62), (66), (141) pour $\mu(x)\equiv 0$, (348) pour $\mu(x)\equiv x(\ln x-1)^2/\ln^2 x$ ou $\mu(x)\equiv x$. Pour les obtenir, il suffit de prendre deux coefficients correspondents, la fonction $\mu(x)$, et pour les classes (4.5) et (4.6) la constante K convenablement choisie.

Comme dans les équations (4.5) et (4.7) on peut poser $b(x)\equiv 0$, donc nous avons le corollaire suivant:

Corollaire IV.2 *Les équations de Riccati près canoniques en forme:*

$$(4.5.1)\qquad y'=\frac{\mu(x)}{\left(\int (c(x)+\mu(x))\,dx+K\right)^2}y^2+c(x),$$

$$(4.7.1)\qquad y'=a(x)y^2-\mu(x)\mp\left(\sqrt{\mu(x)/a(x)}\right)'_x,$$

sont effectivement intégrables. Leurs solutions particulières ont respectivement les formes:

$$y_0=\int (c(x)+\mu(x))\,dx+K,\quad y_0=\mp\sqrt{\mu(x)/a(x)},$$

où K — const. arbitraire et $\mu(x)/a(x)\geqslant 0$.

Nous remarquons encore, qu'en égalant le deuxième coefficient de l'équation (4.6) à zéro, on obtient l'équation (4.7.1).

V. Cas $y'-a(x)y^2-c(x)=\mu(x)$ et $b(x)y=\mu(x)$.

Thérème V.1 *Soient les fonctions $a(x)$, $c(x)\in C$ et $b(x)$, $\mu(x)\in C^1$, $a(x)\equiv 0$, $b(x)\neq 0$ et $\mu(x)\neq 0$ dans l'intervalle X. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$(5.1)\qquad y_0=\frac{\mu(x)}{b(x)}$$

soit une solution particulière de l'équation (0.1), *est que les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x)$ satisfassent à la condition*

$$(5.2)\qquad \left(\frac{\mu(x)}{b(x)}\right)'_x-a(x)\left(\frac{\mu(x)}{b(x)}\right)^2-c(x)-\mu(x)=0$$

dans l'intervalle X.

Remarque V.1 L'hypothèse $\mu(x)\neq 0$ est essentielle.

Corollaire V.1 *Les sous — classes de la classe de l'équation de Riccati* (0.1) *en forme:*

$$(5.3)\qquad y'=\left(\frac{b(x)}{\mu(x)}\right)^2\left\{\left(\frac{\mu(x)}{b(x)}\right)'_x-c(x)-\mu(x)\right\}y^2+b(x)y+c(x),$$

$$(5.4)\qquad y'=a(x)y^2+b(x)y+\left(\frac{\mu(x)}{b(x)}\right)'_x-a(x)\left(\frac{\mu(x)}{b(x)}\right)^2-\mu(x)$$

sont effectivement intégrables. Leur solution particulière a la forme (5.1).

(Pour obtenir l'équation (5.4), on peut prendre, dans le th. V.1 l'hypothèse plus faible, à savoir $\mu(x) \not\equiv 0$ dans X).

Nous remarquons qu'on peut donner la condition (5.2) dans la forme intégrale

$$\int a(x)\,dx + K + \frac{b(x)}{\mu(x)} + \int \frac{(c(x)+\mu(x))\,b^2(x)}{\mu^2(x)}\,dx = 0, \tag{5.5}$$

où K. const. arbitraire. Il est évident, que de la condition (5.5) on ne peut pas obtenir effictivement $b(x)$ en fonction de $a(x)$, $c(x)$ et $\mu(x)$. Cette situation est la même comme dans le cas considéré dans le chapitre II. Ainsi donc, de même que dans ce chapitre, on peut déterminer la solution particulière de l'équation (0.1), si la condition (5.5) est satisfaite. En le faisant nous obtenons la fonction

$$y_0 = -\beta^{-1}(x), \tag{5.6}$$

où

$$\beta(x) \equiv \int a(x)\,dx + K + \int \frac{(c(x)-\mu(x))\,b^2(x)}{\mu^2(x)}\,dx.$$

Nous avons donc le théorème:

Théorème V.2 *Soient les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x) \in C$, $a(x) \neq 0$, $b(x) \neq 0$ *et* $\mu(x) \neq 0$ *dans l'intervalle* X. *La condition suffisante pour que la fonction* (5.6), *soit une solution de l'équation* (0.1), *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)$ *satisfassent à la condition* (5.5).

Démonstration. Nous démontrerons que l'identité suivante

$$y_0' - a(x)\,y_0^2 - c(x) \equiv b(x)\,y_0$$

est satisfaite. En profitant de la fonction (5.6) et de la condition (5.5) nous avons:

$$L(x) \equiv y_0' - a(x)\,y_0^2 - c(x) \equiv \frac{1}{\beta^2(x)}\,\beta'(x) - \frac{a(x)}{\beta^2(x)} - c(x) \equiv$$

$$\equiv \frac{(c(x)+\mu(x))\,b^2(x)}{\beta^2(x)\,\mu^2(x)} - c(x) \equiv \frac{(c(x)+\mu(x))\,\beta^2(x)}{\beta^2(x)} - c(x) \equiv \mu(x);$$

$$P(x) = b(x)\,y_0 \equiv -\frac{b(x)}{\beta(x)} \equiv -(-\mu(x)) \equiv \mu(x).$$

Il en résulte que la fonction y_0 est la solution de l'équation (0.1).

Remarque V.2 Les formes particuliéres des équations (5.3) et (5.4) ont les équations suivantes de Kamke (3) ou (4): (1.42) si $\mu(x) \equiv a/x$, (1.172) si $\mu(x) \equiv 5/x^3$, et de Murphy (11): (268) si $\mu(x) \equiv a/x$. Les coefficients des équations citées ci-dessus avec les fonctions $\mu(x)$ — choisies comme plus haut, satisfont aussi à la condition (5.5). De (5.6) nous obtenons leurs solutions particulières. — La const. K doit être convenablement choisie.

VI. Cas $y' - b(x)y - c(x) = \mu(x)$ et $a(x)y^2 = \mu(x)$.

Théorème VI.1. *Soient les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x) \in C$, $a(x) \not\equiv 0$, $\mu(x) \not\equiv 0$ *et* $c(x) \neq -\mu(x)$ *dans l'intervalle* X. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonstion*

$$(6.1) \qquad y_0 = \exp \int b(x)\,dx \left\{ \int \left((\mu(x) + c(x)) \exp\left(-\int b(x)\,dx \right) \right) dx + K \right\},$$

où K — *const. arbitraire, soit une solution particulière de l'équation* (0.1), *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)$ *satisfassent à la condition*

$$(6.2) \qquad a(x) \exp\left(2 \int b(x)\,dx \right) \left\{ \int \left((\mu(x) + c(x)) \exp\left(-\int b(x)\,dx \right) \right) dx + K \right\}^2 - \mu(x) = 0$$

dans l'intervalle X.

Remarque VI.1 L'hypothèse $\mu(x) \neq 0$ est essentielle.

Théorème VI.2 *Soient les fonctions* $a(x)$ *et* $\mu(x) \in C^1$, $b(x)$ *et* $c(x) \in C$, $\mu(x) \neq 0$ *et* $\mu(x)/a(x) > 0$ *dans l'intervalle* X. *La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions*

$$(6.3) \qquad y_0 = \mp \sqrt{\mu(x)/a(x)},$$

soient des solutions particulièses de l'équation (0.1), *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *et* $\mu(x)$ *satisfassent respectivement aux conditions*

$$(6.4) \qquad \mp \left[\sqrt{\frac{\mu(x)}{a(x)}} \right]'_x \pm b(x) \sqrt{\frac{\mu(x)}{a(x)}} - c(x) - \mu(x) = 0$$

pour $x \in X$.

En supposant que les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x)$ ont les mêmes propriétés comme dans les th. VI.1 et th. VI.2, nous obtenons le corollaire suivant:

Corollaire VI.1 *Les sous — classes de la classe de l'équation de Riscati* (0.1) *en forme:*

$$(6.5) \quad y' = \frac{\mu(x).}{\exp\left(2\int b(x)\,dx \right) \left\{ \int \left((\mu(x) + c(x)) \exp\left(-\int b(x)\,dx \right) \right) dx + K \right\}^2} y^2 + b(x)y + c(x),$$

$$(6.6) \qquad y' = a(x)y^2 + \left[\left(\sqrt{\frac{\mu(x)}{a(x)}} \right)'_x \pm c(x) \pm \mu(x) \right] \sqrt{\frac{a(x)}{\mu(x)}} y + c(x),$$

$$(6.7) \qquad y' = a(x)y^2 + b(x)y \pm \left(\sqrt{\frac{\mu(x)}{a(x)}} \right)'_x \pm b(x) \sqrt{\frac{\mu(x)}{a(x)}} - \mu(x),$$

où K — const. arbitraire, sont effectivement intégrables. Leurs solutions particulières ont respectivement les formes: dans le cas (6.5) *la forme* (6.1) *et dans les cas* (6.6) *et* (6.7) *les formes* (6.3).

Remarque VI.2 Les formes particulières des équations citées ci-dessus ont les équations suivantes de Kamke (3) ou (4) et de Murphy (11): (1.170) pour $\mu(x) \equiv x$, (1.173) pour $\mu(x) \equiv 1/x^3$, (1.195) pour $\mu(x) \equiv 1/\sin x$; (73) pour $\mu(x) \equiv 1/\sin x$, (353) pour $\mu(x) \equiv 1/x^3$.

En prenant dans les équations (6.5) et (6.7) la fonction $b(x) \equiv 0$ dans l'intervalle X, nous obtenons le même corollaire comme dans le chapitre IV (v. coroll. IV.2).

VII. Cas $y' = \mu(x)$ et $a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = \mu(x)$

Théorème VII.1 *Soient les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x) \in C$, $a(x) \neq 0$ dans l'intervalle X. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$y_0 = \int \mu(x)\,dx + K, \tag{7.1}$$

où K — const. arbitraire et $\mu^2(x) + K^2 > 0$, soit une solution particulière de l'équation (0.1), *est que les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x)$ satisfassent à la condition*

$$a(x)\left[\int \mu(x)\,dx + K\right]^2 + b(x)\left[\int \mu(x)\,dx + K\right] + c(x) - \mu(x) = 0 \tag{7.2}$$

dans l'intervalle X.

Remarque VII.1 Pour la fonction $\mu(x) \equiv 0$ dans X, nous obtenons la condition

$$a(x)K^2 + b(x)K + c(x) = 0. \tag{7.2.1}$$

Cette condition est bien connue v. p. ex. (3) p. 23 ou (4) p. 46 et (11) p. 20. Pour l'obtenir, en forme donnée dans les livres cités, il suffit de prendre $K = A/B$ — où A et B constantes, $B \neq 0$.

Théorème VII.2 *Soient les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x) \in C^1$, $a(x) \neq 0$, $b^2(x) - 4a(x)\,(c(x) - \mu(x)) \geqslant 0$ dans l'intervalle X. La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions*

$$y_0 = \frac{1}{2a(x)}\left(-b(x) \mp \sqrt{b^2(x) - 4a(x)\,(c(x) - \mu(x))}\right), \tag{7.3}$$

soient des solutions particulières de l'équation (0.1), *est que les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $\mu(x)$ satisfassent aux conditinns*

$$\left\{\frac{b(x) \pm \sqrt{b^2(x) - 4a(x)(c(x) - \mu(x))}}{2a(x)}\right\}'_x + \mu(x) = 0 \tag{7.4}$$

dans l'intervalle X.

D é m o n s t r a t i o n. Nécessité: Supposons que les fonctions (7.3) sont des solutions particulières de l'équation (0.1). En les mettant successivement à l'équation (0.1) nous obtenons les conditions (7.4). Suffisance: Posons succés-sivement les fonctions (7.3) dans l'équation (0.1) et profitons des conditions (7.4). Le côté gauche de l'équation (0.1) a donc la forme

$$L(x) \equiv y_0' \equiv \left\{ \frac{1}{2a(x)} \left(-b(x) \mp \sqrt{b^2(x) - 4a(x)(c(x) - \mu(x))} \right) \right\}_x' \equiv \mu(x);$$

En faisant le méme par rapport au côté droit, après des transformations algébriques, nous obtenons

$$P(x) \equiv a(x) y_0^2 + b(x) y_0 + c(x) \equiv \mu(x).$$

Il en résulte que, si les conditions (7.4) sont satisfaites, alors les fonctions (7.3) sont respectivement des solutions particulières de l'équation (0.1).

C o r o l l a i r e VII.1 *Les sous — classes de l'équation de Riccati* (0.1) *en forme:*

$$y' = \frac{\mu(x) - b(x)\left(\int (x)\, dx + K\right) - c(x)}{\left(\int \mu(x)\, dx + K\right)^2} y^2 + b(x) y + c(x), \tag{7.5}$$

$$y' = a(x) y^2 + \frac{\mu(x) - c(x) - a(x)\left(\int \mu(x)\, dx + K\right)^2}{\int \mu(x)\, dx + K} y + c(x), \tag{7.6}$$

$$y' = a(x) y^2 + b(x) y + \mu(x) - a(x)\left(\int \mu(x)\, dx + K\right)^2 - \\ - b(x)\left(\int \mu(x)\, dx + K\right), \tag{7.7}$$

où K — const. arbitraire, sont effectivement intégrables. Chacune de ces équations possède la solution particulière en forme (7.1).

On voit, que dans l'équation (7.7) on peut prendre $\mu(x) \equiv K \equiv 0$.

R e m a r q u e VII.2 Pour la fonction $\mu(x) = 0$ dans X, nous obtenons l'équation

$$y' = a(x) y^2 + b(x) y - a(x) K^2 - b(x) K.$$

Sa solution particulière est $y_0 = K$ (v. p. ex. (9) p. 87). Les équations analogues, on obtient de (7.5) et (7.6), si $\mu(x) \equiv 0$ et $K \neq 0$.

R e m a r q u e VII.3 Les sous — dites équations différentielles de Riccati citées par Kamke (3) ou (4) et par Murphy (11), sont des cas particulierers des équations (7.5), (7.6) et (7.7): (1.15) si $\mu(x) \equiv 2x$, (1.18) si $\mu(x) \equiv 0$, (1.19) si $\mu(x) \equiv \mathrm{tg}^2 x$, (1.103) si $\mu(x) \equiv -1$, (1.104) si $\mu(x) \equiv 1/ax^2$, (1.140) si $\mu(x) \equiv 1/x^2$, (1.155) si $\mu(x) \equiv 1$, (1.165) et (1.178) si $\mu(x) \equiv 0$, (1.182) si $\mu(x) \equiv 2x$, (1.194) si $\mu(x) \equiv -1/x$; (41) si $\mu(x) \equiv f'(x)$, (42) si $\mu(x) \equiv 0$, (43) si $\mu(x)\equiv \mathrm{tg}^2 x$, (44) si $\mu(x)\equiv \mathrm{th}^2 x$, (47) si $\mu(x)\equiv 2x$, (48) si $\mu(x)\equiv 2x+ +1/\mathrm{ctgh}^2 x$, (65) si $\mu(x)\equiv 1$, (67) si $\mu(x)\equiv 0$, (179) si $\mu(x)\equiv -1/x$, (181) si $\mu(x)\equiv 1/ax^2$, (267) si $\mu(x)\equiv 1/x^2$, (300) et (311) si $\mu(x)\equiv 1$, (336) si $\mu(x)\equiv 0$, (337) si $\mu(x)\equiv 2x$.

En mettant dans les équations (7.5) et (7.7) le coefficient $b(x)\equiv 0$, nous obtenons le même corollaire comme dans le chapitre III (v. coroll. III. 2).

VIII. Remarques finales

Le plus important résultat de ce travail est le fait, que l'on peut obtenir les classes d'équations de Riccati et par suite les classes d'équations linéaires du second ordre, dont les deux coefficients peuvent être arbitraires et le troisième dépend de ceux-ci et d'une fonction arbitraire, et que ces équations sont effectivement intégrables.

Il résulte de nos considérations que pour l'équation (0.1) déterminée par les classes: (2.3), (3.5), — ·, (3.7), (4.5), — ·, (4.7), (5.3), (5.4), (6.5),— ·, (6.7) et (7.5), — ·, (7.7) les solutions particulières sont connues, mais il n'en résulte pas que, pour chaque système de trois fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, on peut chercher la fonction $\mu(x)$. Les conditions (2.3), (2.4), (3.2), (3.4), (4.2), (4.4), (5.2), (5.5), (6.2), (6.4), (7.2) et (7.4) considérées comme des équations avec la fonction $\mu(x)$ inconnue, ne sont pas résolubles à l'exception de cas particuliers.

Pour chaque équation pour laquelle une solution particulière est connue, on peut chercher six formes de la fonction $\mu(x)$, pour lesquelles on peut obtenir cette équation en choisissant convenablement deux des fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

En mettant les fonctions $\mu(x)$ correspondant à des équations particulières de Kamke (3) ou (4) et de Murphy (11), qu'on cite dans ce travailci (v. remarques: II.3, III.5, IV.4, V.2, VI.2, VII.3), dans les classes (2.3), (3.5);., (3.7), ..., (7.5), ., (7.7), nous obtenons les généralisations de ces équations (deux de trois fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ peuvent étre arbitraires) Dans beaucoup de cas, les solutions particulières de ces généralisations ont les mêmes formes que dans des cas particuliers, eventuellement sont un peu plus générales (concluent une const. arbitraire). Par exemple: pour l'équation (41) de (11) (v. remarque VII.3) la fonction $\mu(x)\equiv f'(x)$, ainsi donc de (7.7) et (7.1) nous obtenons respectivement l'équation

$$y'=a(x)y^2+b(x)y+f'(x)-a(x)(f(x)+K)^2-b(x)(f(x)+K), \tag{8.1}$$

et sa solution particulière

$$y_0=f(x)+K. \tag{8.2}$$

Il est évident que l'équation (8.1) est la généralisation de l'équation (41) de (11):

$$y'=y^2+f'(x)-f^2(x),$$

et que la solution particulière (8.2) conserve la forme de sa solution particulière $y_0=f(x)$, avec la précision à une const. arbitraire.

Si la formule donnée dans notre travail conclue deux classes d'équations, cela a lieu par ex.: dans le cas (4.7), alors au moins une de ces classes, est la généralisation de l'équation correspondante de Kamke (3) ou de Murphy (11) — citée danc ce travail-ci, l'autre avec la même fonction $\mu(x)$ donne une nouvelle équation effectivement intégrable.

Il existe l'équation de Riccati dont sa solution particulière est une solution générale de l'équation différentielle linéaire (v. (3.1) et les équations (3.5) et (3.6)).

Pour chaque fonction continue, on peut construire l'équation différentielle de Riccati dont la solution particulière est son intégrale.

Remarquons encore que, la méthode présentée dans ce travail (aussi dans (5)) n'est pas unique. On peut donner d'autres manières de l'obtention des classes d'équations de Riccati dont les solutions particulières sont connues (v. p. ex.: (1) pp. 82—84).

Comme nous l'avons vu, dans les traités de E. Kamke (3) et (4) et de G. M. Murphy (11) il y a beaucoup d'équations qui sont des cas très particuliers, des classes d'équations données dans ce travail, ainsi donc nous pouvons les remplacer uniquement par quelques classes d'équations de Riccati plus générales. La même remarque concerne des équations du second ordre conclues dans les traités cités plus haut.

Nous présenterons dans des autres travaux, les résultats obtenus à l'aide de la méthode ici expliquée, pour l'équation linéaire du second ordre, ainsi que par la traduction des résultats obtenus pour l'équation de Riccati présentés dans ce travail.

LITERATURE

[1] Л. М. Беркович, Н. Х. Розов, А. М. Зйшинский, *О самосопряженных и приводимых линейнх дифференциальных уравнениях высших порядков и о некоторых уравнениях второго порядка, интегрируемых в конечном виде*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Math. Fiz. No 230 -No 241 (1968), pp. 61—87.

[2] Л. М. Беркович, *Интегрирование в конечном виде и исследование поведения решений некоторых дифференциальных уравнений.* Дифференциальные уравнения и их приложения, Вып. 2, Куйбышев 1975, pp. 136—141.

[3] E. Kamke, *Differeutialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I*, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig 1959.

[4] E. Kamke, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва 1965.

[5] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy. III. Quelques critères suffisants de l'intégrabilité effective de l'équation de Riccati avec deux coefficients arbitraires.* Publ. Inst. Math. Beograd, Nouvelle série, T. 22 (36), (1977), pp. 1—8.

[6] H. Karanikolov, *On a generalization of a generalized Emden equation*, Math. Balkanica T. 4 (1974, pp. 317—318.

[7] J. D. Kečkić, *Additions to Kamke treatise, VII. Variation of parameters for nonlinear second order differential equations.* Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak, Ser. Mat. Fiz. No 544 — No 576 (1976), pp. 31—36.

[8] M. S. Klamkin, *Generalization of Clairaut's differential equation and the analogous difference equation*, Amer. Math. Monthly 60 (1953), pp. 97—99.

[9] N. M Matwiejew, *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, Warszawa 1970.

[10] D. S. Mitrinović and J. D. Kečkić, *Complémentens au traité de Kamke, XIV. Applications of the variation of parameters method to nonlinear second order differential equations*, Univ. Beograd, Publ. Elektrothn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 544 — No 576 (1976), pp. 3—7.

[11] G. M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Thier Solutions*, Princeton, New Jersey, New York 1960.

[12] I. A. Šapkarev, *Über die Integration der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung in geschlossener From*, Glasnik Matematički 5 (25) (1970), pp. 63—66.

INSTITUT MATHEMATIQUE
L'ECOLE POLYTECHNIQUE, 42—202 CZESTOCHOWA, Pologne