PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle serie, tome 26 (40), 1979, pp. 101—106

EIN SATZ ÜBER GEWICHTETE VERSCHIEBUNGEN

Dušan Georgijević

(Received June 9, 1977)

Sei H ein Hilbertraum und T ein beliebiger beschränkter linearer Operator, der den Raum H in sich abbildet. Die Restriktion des Operators T auf einen beliebigen nicht-null invarianten Unterraum M nennen wir ein *nicht-trivialer Teil* von T und bezeichnen mit T/M.

Für zwei Operatoren T und R, die in Hilberträumen H und G wirken, sagen wir dass sie zueinander *unitär-äquivalent* sind, wenn eine solche Isometrie C, von H auf G, existiert, dass $C^{-1}RC=T$ gilt.

Wenn K ein Hilbertraum ist, bezeichnen wir die direkte Summe von abzählbar vielen Exemplaren des Raumes K mit $H^2(K)$, d.h. die Menge aller unendlichen Folgen

$$h=(h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots)$$

deren Elemente h_n in K liegen, solchen dass

$$\| h \|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| h_n \|_K^2 < \infty \tag{1}$$

gilt. $H^2(K)$ ist ein Hilbertraum mit Norm (1) und mit innerem Produkt

$$\langle h, g \rangle_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle h_n, g_n \rangle.$$

Für jedes $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, sei A_n ein regulärer beschränkter linearer Operator, der K auf sich abbildet. Sei

$$\sup_n \| A_n \| < \infty$$

und sei T der folgende Operator:

$$Th=(0, A_0 h_0, A_1 h_1, A_2 h_2, \ldots),$$

der $H^2(K)$ in sich abbildet. Den Operator T nennen wir eine *gewichtete Verschiebung*. Dabei nennen wir die Operatoren A_n *die Gewichte*. Wenn $A_n = I_K$, $n=0, 1, 2, \ldots$ (I_K-identische Abbildung in K), nennen wir T eine *Verschiebung* und bezeichnen mit S.

Wir werden mit T^{-1} den Operator bezeichnen, der $TH^2(K)$ auf $H^2(K)$ abbildet und der Relation $T^{-1}T=I$ genügt (I-identische Abbildung in $H^2(K)$).

Wie man leicht einsieht, T ist ein beschränkter Operator.

Wenn K ein eindimensionaler Raum ist, d.h. wenn K durch ein Einheitsvektor e generiert werden kann, ist $H^2(K)$ ein separierbarer Hilbertraum. Die Folge

$$\{e_n=(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n},\ e,\ 0,\ \ldots)\}_{n=0}^{\infty}$$

ist eine orthonormale Basis im $H^2(K)$. Der Operator A_n bildet dann eine Multiplikation mit einem Skalar $\alpha_n \neq 0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ und der Operator T setzt e_n in e_{n+1} über $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Wir können hier die Skalare α_n die *numerische Gewichte* nennen.

Die invariante Unterräume der Verschiebung S in dem Falle $\dim K=1$ wurden von A. Beurling studiert, [1]. Er hat bewiesen dass jeder nicht-trivialer Teil von S, zu S unitär-äquivalent ist.

Wir haben in unserer Arbeit [2] einen Satz (Satz 1.) über die Teilen einer gewichteten Verschiebung in dem Falle $\dim K=1$ bewiesen. In der vorliegenden Arbeit werden wir diesen Satz auf die beliebige gewichtete Verschiebungen übertragen.

Wir beginnen mit einem Lemma, das später benützt werden wird.

L e m m a 1. *Sei $T: e_n \to \alpha_n e_{n+1}$ eine auf einem Hilbertraum H definierte gewichtete Verschiebung mit numerischen Gewichten und sei jeder nicht-trivialer Teil von T zu einer gewichteten Verschiebung unitär-äquivalent. Wenn M ein nicht-null invarianter Unterraum für T ist und wenn $Pe_0 \neq 0$ (wobei P die Projektion von H auf M ist), dann ist das System der Vektoren*

$$\{T^n Pe_0\}_{n=0}^{\infty} \tag{2}$$

orthogonal im M.

B e w e i s. Gehen wir von der Tatsache aus, dass T/M, als Teil von T, zu einer gewichteten Verschiebung R unitär-äquivalent ist, der auf einem Raume $G=H^2(K)$ wirkt. Sei C eine Isometrie, die diese Äquivalenz realisiert, d.h. sei $CM=G$ und $T/M=C^{-1}RC$. Der Unterraum $(RG)^{\perp}$ hat die Form

$$K \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots$$

und lässt sich mit K identifizieren. Da Pe_0 zu TM orthogonal ist (wegen $e_0 \perp TM$ und $TM \subset M$), so muss der Vektor $f=CPe_0$ $(\in G)$ zu RG orthogonal sein. Daraus folgt, dass f im K liegt. Da das System

$$\{R^n f\}_{n=0}^{\infty}$$

im G orthogonal ist, so ist auch das System (2), als sein Bild bei der abbildung C^{-1} (weil $T^n Pe_0=(T/M)^n C^{-1} f=C^{-1} R^n f$) — orthogonal.

Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 1. *Sei T eine gewichtete Verschiebung, auf dem $H^2(K)$ definierte, mit den Gewichten A_n, und sei die Bedingung*

$$\liminf_{n\to\infty}(\| A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_0 e \|)^{1/n} > 0, \tag{3}$$

für jeden Einheitsvektor e im K, erfüllt. Jeder nicht-trivialer Teil von T ist dann und nur dann zu einer gewichteten Verschiebung unitär-äquivalent, wenn ein solches Skalar α existiert, dass jeder Operator $\frac{1}{\alpha} A_n$, $n=1, 2, \ldots$, unitär ist. (A_0 bleibt dabei beliebig.)

Beweis. Notwendigkeit. Nehmen wir an, dass jeder nicht-trivialer Teil von T zu einer gewichteten Verschiebung unitär-äquivalent ist. Sei e ein beliebiger Einheitsvektor im K. Bezeichnen wir den Vektor $(e, 0, 0, \ldots)$ mit e_0, und den Vektor

$$\frac{T^n e_0}{\| T^n e_0 \|}$$

mit e_n, $n=1, 2, \ldots$.

Sei H der Unterraum von $H^2(K)$ der durch das System $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ erzeugt wird. Dieses System bildet eine orthonormale Basis im H. Führen wir die Zahlen

$$\alpha_n = \frac{\| T^{n+1} e_0 \|}{\| T^n e_0 \|}$$

ein, so haben wir

$$Te_n = \alpha_n e_{n+1}$$

(und auch $0 < \alpha_n \leqslant \| T \|$), $n=0, 1, 2, \ldots$. Also T/H ist eine gewichtete Verschiebung mit numerischen Gewichten α_n. Jeder ihrer Teile ist auch ein Teil von T und so ist jeder Teil von T/H zu einer gewichteten Verschiebung unitär-äquivalent. Ausserdem, aus (3) folgt dass

$$\liminf_{n\to\infty}(\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \cdots \alpha_0)^{1/n} > 0$$

gilt. Nun sollen wir den Satz 1. aus [2] zu T/H anwenden. Doch, die gewichtete Verschiebung, die zu einem Teil von T/H unitär-äquivalent ist, muss nicht numerische Gewichte haben, wie in [2]. Das ist aber nicht notwendig in dem Beweis des Satzes, der in der Arbeit [2] gegeben wurde. Wir sollen nur das dortige Lemma 1. durchs Lemma 1., das wir eben bewiesen haben, vertauschen, und dann der Beweis dieses Satzes geht wieder durch.

Also, nach dem Satz 1. aus [2], folgt es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots (= \alpha).$$

Gehen wir nun von zwei zueinander senkrechten Einheitsvektoren e und d im K aus, und beobachten ihre Bildelemente $A_n e$ und $A_n d$ bei der Abbildung A_n, für festes $n>0$. Beweisen wir dass

$$\| A_n e \| = \| A_n d \| \tag{4}$$

sein muss. Zum Beweis dieser Beziehung nehmen wir die Vektoren

$$e^1=(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n},\ e,\ 0,\ldots)\quad \text{und}\quad d^1=(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n},\ d,\ 0,\ldots),$$

die im $H^2(K)$ liegen, und setzen

$$e_0=\frac{T^{-n}e^1}{\|T^{-n}e^1\|},\qquad d_0=\frac{T^{-n}d^1}{\|T^{-n}d^1\|}.$$

Dabei $T^{-n}e^1$ und $T^{-n}d^1$ existieren auf Grunde der vorgestellten Regularität von A_i, für $i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1$. Mit Hilfe der Vektoren e_0 und d_0 können wir die Systeme $\{e_i\}$ und $\{d_i\}$ definieren, wie oben (am Anfang dieses Beweises). Dabei werden e^1 und d^1, der Reihe nach, zu e_n und d_n identisch sein und so werden die Relationen

$$\|Te^1\|=\frac{\|T^2e^1\|}{\|Te^1\|}=\frac{\|T^3e^1\|}{\|T^2e^1\|}=\cdots(=\alpha)$$

und

$$\|Td_1\|=\frac{\|T^2d^1\|}{\|Td^1\|}=\frac{\|T^3d^1\|}{\|T^2d^1\|}=\cdots(=\beta)$$

gelten.

Unsere nächste Aufgabe ist: die Gleichheit $\alpha=\beta$ zu beweisen. Formieren wir den Vektor $c^1=e^1+x\cdot d^1$, wobei x eine beliebige Zahl ist, so wird auch für c^1 gelten

$$\frac{\|Tc^1\|}{\|c^1\|}=\frac{\|T^2c^1\|}{\|Tc^1\|}=\frac{\|T^3c_1\|}{\|T^2c^1\|}=\cdots. \tag{5}$$

Die erste drei dieser Normen betragen:

$$\|c^1\|^2=1+|x|^2,\quad \|Tc^1\|^2=\alpha^2+|x|^2\beta^2+2\,\alpha\beta\,\mathrm{Re}\,(\bar{x}\langle e_{n+1},\ d_{n+1}\rangle),$$

$$\|T^2c^1\|^2=\alpha^4+|x|^2\beta^4+2\,\alpha^2\beta^2\,\mathrm{Re}\,(\bar{x}\langle e_{n+2},\ d_{n+2}\rangle).$$

Wir wählen $x\neq 0$ so dass $\mathrm{Re}\,(\bar{x}\langle e_{n+1},\ d_{n+1}\rangle)=0$ und $\mathrm{Re}\,(\bar{x}.\langle e_{n+2},\ d_{n+2}\rangle)\geqslant 0$ ist. Die erste Gleichheit in (5) lässt sich dann, nach offenbaren Transformationen, in folgender Form aufschreiben

$$|x|^2(\alpha^2-\beta^2)^2=-2\,(1+|x|^2\alpha^2\beta^2\,\mathrm{Re}\,(\bar{x}\langle e_{n+2},\ d_{n+2}\rangle).$$

Daraus folgt, dass $\alpha=\beta$ sein muss. Damit haben wir (4) bewiesen, weil

$$\|Te^1\|=\|A_ne\|,\quad \|Td^1\|=\|A_nd\|.$$

Die Vektoren e^1 und d^1 können beliebige zwei Elemente einer orthonormalen Basis des Raumes K sein. Auf dieser Basis wirkt der Operator $\frac{1}{\alpha}A_n$ als eine Isometrie. Daraus folgt, dass auf dem ganzen Raum K dasselbe gilt, d.h. dass der Operator $\frac{1}{\alpha}A_n$ auf K unitär ist.

Genügendheit. Sei nun $\frac{1}{\alpha} A_n$ eine Isometrie für jeden positiven Index n. Ohne jede Verkleinerung der Allgemeinheit der Erforschung, bringen wir den Beweis nur im Falle $\alpha = 1$ voll. Dann ist jedes Gewicht, ausser A_0, eine Isometrie (von K auf K). Dann ist auch $\inf_n \| A_n \| > 0$, und der Operator T^{-1} ist beschränkt.

Bezeichnen wir den Unterraum $TH^2(K)$ mit $H_0 \cdot T/H_0$ ist dann eine Isometrie, die auf keinem nicht-null invarianten Unterraum unitär ist. Sei M ein nicht-null invarianter Unterraum für T/H_0 und sei $N = M \ominus TM$. Nach der Halmos-schen Untersuchung der isometrischen Operatoren ([3]), lässt sich der Unterraum M darstellen in folgender Form:

$$M = N \oplus TN \oplus T^2 N \oplus \cdots. \tag{6}$$

Auch wenn M ein nich-null invarianter Unterraum für T ist, der kein Unterraum von H_0 ist, lässt sich M in der Form (6) darstellen. Dann ist, nämlich, $M_0 = TM$ ein invarianter Unterraum für T/H_0. Demnach lässt sich M_0 in der Form (6) aufschreiben:

$$M_0 = L \oplus TL \oplus T^2 L \oplus \cdots, \tag{7}$$

wobei wir den Unterraum $M_0 \ominus TM_0$ mit L bezeichnet haben. Setzen wir $N = M \ominus M_0$ und beweisen dass $TN = L$ ist. Sei $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in N$. Wir zeigen zuerst dass $Tx \in L$. Wenn wir anstatt Gewicht A_0 die identische Abbildung I_K nehmen und andere Gewichte von T behalten, bekommen wir eine Isometrie T_1. Da $T_1/H_0 = T/H_0$ ist, so ist auch $T_1 M_0 = TM_0$. Um wir die Relation $Tx \perp TM_0$ zu beweisen, stellen wir Tx mit Hilfe T_1 dar: $Tx = T_1 x + (0, A_0 x_0 - x_0, 0, 0, \ldots)$. Es folgt aus $x \perp M_0$ dass $T_1 x \perp TM_0 (= T_1 M_0)$ ist. Es ist unmittelbar klar, dass auch der zweite Summand zu $TM_0 (\subset T^2 H^2(\mathrm{K}))$ orthogonal ist. Also $Tx \perp TM_0$. Ausserdem ist $Tx \in TM = M_0$, so dass $Tx \in L$.

Wir sollen noch zeigen, dass $T^{-1}x$ für jeden Vektor $x \in L$, im N liegt. Sei $x \in L$. Der Vektor $T^{-1}x (\in M)$ lässt sich auf die Komponente y und z zerlegen, so dass $y \in N$ und $z \in M_0$ gilt. Dann wird doch $Ty \in L$ und $Tz \in TM_0$ sein. Da auch $Tz = x - Ty \in L$ ist, so muss $Tz = 0$ sein. Dass bedeutet (wegen $\ker T = 0$), dass $z = 0$ und $T^{-1}x \in N$ ist. Damit haben wir $TN = L$ gezeigt.

Wenn wir in (7) TN anstatt L setzen und auch die Zerlegung $M = N \oplus M_0$ berücksichtigen, erhielt M die Form (6).

Nehmen wir jetzt einen beliebigen nicht-null invarianten Unterraum M und zeigen dass T/M zu einer gewichteten Verschiebung unitär-äquivalent ist. Bemerken wir zuerst dass (wegen der Regularität von T) alle Unterräume $T^n N (n = 0, 1, 2, \ldots)$ gleicher Dimension sind, d.h. zueinander isometrisch. Sei C_n eine beliebige Isometrie von $T^n N$ auf N, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mit Hilfe dieser Folge der Isometrien, formieren wir eine Isometrie C von M auf $H^2(N)$. Immer wenn $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_n + \cdots \in M$, wobei $x_n \in T^n N$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, setzen wir $Cx = (C_0 x_0, C_1 x_1, \ldots, C_n x_n, \ldots)$. Wie man leicht einsieht, die Abbuldung $R = C(T/M)C^{-1}$ ist eine auf $H^2(N)$ erklärte gewichtete Verschiebung und T/M ist zu R unitär-äquivalent.

Der Satz ist damit beweisen.

LITERATUR

[1] A. Beurling: *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math., vol. 81, 1949.

[2] D. Georgijević: *On two classes of weighted shifts*, Publ. Inst. Math., Nouvelle série, 21 (35), Beograd 1977., pp. 67—72.

[3] P. R. Halmos: *Shifts on Hilbert spaces*, Journal für Reine und Angewandte Math., 208 (1961), 102—112.