PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 21 (35), 1977, pp. 109–113

SUR LES ENSEMBLES FORTEMENT BORNÉS DANS L'ESPACE LOCALEMENT CONVEXE

Nebojša Lažetić

(Communiqué le 2. Avril 1976)

Soit E un espace vectoriel sur le corps K, où K est le corps des nombres réels ou complexes. On désignera par $E(t)$ l'espace E muni d'une topologie localement convexe séparée t. Etant donné un sous-espace vectoriel F de E, on désignera par $F(t)$ le sous-espace F muni de la topologie induite sur F par t. Pour tout ensemble borné, convexe et équilibré B dans $E(t)$, soit E_B le sous-espace vectoriel de E engendré par B, muni de la topologie pour laquelle les $\lambda B, \lambda \neq 0$, forment un système fondamentale de voisinages de zéro. Alors E_B est un espace normé.

Soient $E(t)$ un espace localement convexe et E' son dual topologique. On écrira $t_k(E')$ (resp. $t_b(E')$) pour désigner la topologie de Mackey sur E (resp. la topologie forte sur E). Pour tous les autres notions nous suivons les définitions de [4].

Pour qu'un ensemble B dans $E(t)$ soit fortement borné, il faut et il suffit qu'il soit absorbé par tout tonneau dans $E(t)$. Cela étant, la proposition suivante résulte immédiatement.

P r o p o s i t i o n 1. — Soit $E(t)$ un espace normé. Pour que $E(t)$ soit tonnelé, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de zéro borné pour la topologie forte sur E.

Le théorème suivant est une forme généralisée du théorème de Banach-Mackey ([4], chap. IV, exercice 17). On peut le démontrer sans difficultés.

T h é o r è m e. — *Soit $E(t)$ un espace localement convexe et soit B un ensemble borné, convexe et équilibré dans $E(t)$ tel que l'espace normé E_B est tonnelé. Alors B est borné pour la topologie $t_b(E')$.*

Dans tout ce qui suit nous allons considérer les conditions suffisantes pour que le théorème inverse soit valable. On sait que, par exemple, si B est un ensemble borné, convexe, équilibré et semicomplet dans $E(t)$, l'espace normé E_B est complet, donc tonnelé. Mais, Valdivia [6] a démontré que, si $E(t)$ est un espace de Fréchet, il existe un ensemble borné, convexe, équilibré et non-fermé B dans $E(t)$ tel que l'espace normé E_B est complet.

P r o p o s i t i o n 2. — Soient $E(t)$ un espace localement convexe, B un ensemble fortement borné, convexe et équilibré dans $E(t)$ tel que:

a) le sous-espace vectoriel E_B est de codimension finie dans E;

b) la topologie induite sur E_B par la topologie t est compatible avec la dualité $\langle E_B, E_B' \rangle$.

Alors l'espace normé E_B est tonnelé.

D é m o n s t r a t i o n. Soit D un tonneau dans l'espace normé E_B. En vertu de la condition b), D est un tonneau dans l'espace $E_B(t)$. Il existe un tonneau T dans $E(t)$ tel que $E_B \cap T = D$ (théorème A, [1]). Comme B est borné pour la topologie $t_b(E')$, il existe $\lambda > 0$, $\lambda \in K$, tel que $B \subset \lambda T$. Par suite,

$$B \subset (\lambda \mathrm{T}) \cap E_B = \lambda (T \cap E_B) = \lambda D,$$

d'où la conclusion que le tonneau D est un voisinage de zéro dans E_B, c'est-à-dire que l'espace normé E_B est tonnelé.

P r o p o s i t i o n 3. — Soient $E(t)$ un espace tonnelé, B un ensemble borné, convexe et équilibré dans $E(t)$ tel que:

a') le sous-espace vectoriel E_B est de codimension dénombrable dans E;

b) la topologie induite sur E_B par la topologie t est compatible avec la dualité $\langle E_B, E_B' \rangle$.

Alors l'espace normé E_B est tonnelé.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du théorème 3 ([5]), la condition a') entraîne que la topologie induite sur E_B par la topologie t est identique à la topologie $t_b(E_B(t)')$. La condition b) entraîne que la topologie $t_b(E_B(t)')$ est identique à la topologie $t_b(E_B')$. Cela étant, la partie B est fortement bornée dans l'espace normé E_B, ce qui signifie que E_B est tonnelé, d'après la proposition 1.

E x e m p l e 1. Soit $E(t)$ un espace normé et tonnelé, et soit J une boule avec le centre au zéro. Etant donné un sous-espace vectoriel F de codimension finie ou dénombrable dans E, pour la partie $B = F \cap J$ les conditions a) ou a'), b) sont satisfaites.

P r o p o s i t i o n 4. — Soit $E(t)$ un espace de Mackey dans lequel il existe un ensemble convexe, équilibré et fortement borné B tel que:

a'') le sous-espace vectoriel E_B est de codimension finie et fermé dans $E(t)$;

b) la topologie induite sur E_B par la topologie t est compatible avec la dualité $\langle E_B, E_B' \rangle$.

Alors $E(t)$ est un espace normé et tonnelé.

D é m o n s t r a t i o n. Sans restriction de la généralité, on peut supposer que le sous-espace vectoriel E_B est un hyperplan fermé dans $E(t)$. Donc il existe $e_0 \in E$, $e_0 \notin E_B$, tel que

$$E(t) = E_B(t) \oplus L \text{ (somme directe topologique)}, \tag{1}$$

où L est le sous-espace engendré par e_0. Désignons par C l'enveloppe convexe et équilibrée de $B \cup \{e_0\}$. On peut démontrer sans peine que $E_C = E$, et que l'espace normé E_B est un hyperplan fermé dans l'espace normé E_C. Il en résulte que

(2) $$E_C = E_B \oplus L \text{ (somme directe topologique)}$$

En vertu de la proposition 2, l'espace normé E_B est tonnelé; par suite (2) entraîne que l'espace normé E_C est tonnelé.

Prouvons maintenant que $E' = E'_C$. Soit t_C la topologie de l'espace normé E_C. La topologie t_C étant plus fine que la topologie t, on a que $E' \subset E'_C$. Inversement, soit $f \in E'_C$. Désignons par f_B, f_L les restrictions de f sur E_B, L. Alors $f_B \in E'_B$, $f_L \in L'$. La condition b) entraîne que $f_B \in E_B(t)'$. Cela étant, il résulte de (1) que f est une forme linéaire continue sur $E(t)$, d'où $E'_C \subset E'$. Donc la topologie t_C est compatible avec la dualité $\langle E, E' \rangle$, ce qui signifie que la topologie $t_k(E')$ est plus fine que t_C. Mais, $t = t_k(E')$, d'où $t = t_C$.

Corollaire. — *Soit $E(t)$ un espace de Mackey. Pour que $E(t)$ soit normé et tonnelé, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble convexe, équilibré et fortement borné B dans $E(t)$ tel que les conditions* a'') *et* b) *sons satisfaites.*

Proposition 5. — Soit $E(t)$ un espace tonnelé dans lequel il existe un ensemble borné, convexe et équilibré B tel que:

a''') le sous-espace vectoriel E_B est de codimension dénombrable et fermé dans l'espace $E(t)$;

b) la topologie induite sur E_B par la topologie t est compatible avec la dualité $\langle E_B, E'_B \rangle$.

Alors il existe dans $E(t)$ une suite fondamentale de parties bornées et on peut représenter l'espace $E(t)$ comme une limite inductive stricte d'une suite d'espaces normés tonnelés.

Démonstration. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ une cobase dénombrable du sous-espace vectoriel $F_1 = E_B$ dans E. Désignons par F_n, $n \geqslant 2$, le sous-espace vectoriel de E engendré par $F_{n-1} \cup \{e_{n-1}\}$. Alors $(F_n)_n$ est une suite croissante et $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

D'autre part, soient $B_1 = B$, B_n l'enveloppe convexe équilibrée de $B_{n-1} \cup \cup \{e_{n-1}\}$, $n \geqslant 2$. On peut démontrer que $F_n = E_{B_n}$ pour tout $n \in N$, et que l'espace normé $E_{B_{n-1}}$ est un sous-espace de codimension 1 dans l'espace normé E_{B_n}, $n \geqslant 2$. Comme le sous-espace vectoriel E_B est fermé dans $E(t)$ et de codimension finie dans E_{B_n}, $n \geqslant 2$, le sous-espace vectoriel $E_{B_{n-1}}$ est un hyperplan fermé dans l'espace $E_{B_n}(t)$, $n \geqslant 2$.

En vertu du théorème 3 ([5]), $E_{B_n}(t)$ est un espace tonnelé, donc un espace de Mackey, pour tout $n \in N$. Comme dans la démonstration de la proposition 4, on peut montrer par induction que la topologie induite sur E_{B_n} par la topologie t est compatible avec la dualité $\langle E_{B_n}, E'_{B_n} \rangle$. Il en résulte que cette topologie est identique à la topologie de l'espace normé E_{B_n}, pour tout $n \in N$.

Cela étant, on a que $E(t) = \varinjlim E_{B_n}$, d'après le corollaire 1. 5 ([5]). Soit C une partie bornée de $E(t)$. Comme E_{B_n} est fermé dans l'espace normé $E_{B_{n+1}}$, $n \in N$ il existe $n_0 \in N$ tel que C est bornée dans le espace normé $E_{B_{n_0}}$. Donc il existe $\lambda > 0$, $\lambda \in K$, tel que $C \subset \lambda B_{n_0}$, ce qui signifie que la famille $\{mB_n : m, n \in N\}$ forme une suite fondamentale de parties bornées de $E(t)$, d'où notre assertion.

C o r o l l a i r e 1. *Soit $E(t)$ un espace tonnelé de dimension dénombrable. Alors $E(t)$ est un espace bornologique de type (DF)*

D é m o n s t r a t i o n. Soit B l'enveloppe convexe équilibrée d'une partie finie de E. Le sous-espace vectoriel E_B est de dimension finie dans E; par suite E_B est fermé dans l'espace $E(t)$ et la topologie induite sur E_B par la topologie t coïncide avec la topologie de l'espace normé E_B. D'autre part, le sous-espace E_B est de codimension dénombrable dans E. D'après la proposition 5, il en résulte qu'il existe une suite fondamentale de parties bornées de $E(t)$, formée d'enveloppes convexes et équilibrées de parties finies de E. L'espace $E(t)$ est bornologique comme une limite inductive d'espaces bornologiques.

C o r o l l a i r e 2 (Saxon et Levin [3]). — *Soit $E(t)$ un espace tonnelé de dimension dénombrable. La topologie t est alors la plus fine de toutes les topologies localement convexes sur E.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit t_v la topologie sur E, la plus fine de toutes les topologies localement convexes sur E. La topologie t_v est la topologie bornologique associée à la famille des parties de E, telle que tout élément de cette famille est contenu et borné dans un certain sous-espace de dimension finie de E. D'après le corollaire 1, il résulte que toute partie bornée de $E(t)$ est un élément de cette famille et que $E(t)$ est bornologique, d'où $t=t_v$.

C o r o l l a i r e 3 (Saxon et Levin [3]). — *Il n'existe pas d'espace métrisable tonnelé de dimension dénombrable.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que, au contraire, $E(t)$ est un espace métrisable tonnelé de dimension dénombrable. D'après le corollaire 1, il existe une suite fondamentale de parties bornées de $E(t)$. L'espace $E(t)$ étant métrisable, il en résulte que $E(t)$ est normable. Soit U un voisinage de zéro borné. En vertu du corollaire 2, le voisinage U est contenu et borné dans un sous--espace de dimension finie, ce qui signifie que l'espace $E(t)$ est localement compact, donc de dimension finie. Mais, c'est absurde, ce qui achève la démonstration.

P r o p o s i t i o n 6. — Soit $E(t)$ un espace de Mackey de type (DF) et soit $(B_n)_n$ une suite fondamentale de parties bornées de $E(t)$. Supposons que, pour tout $n \in N$, la topologie induite sur le sous-espace vectoriel E_{B_n} par la topologie t est compatible avec la dualité $\langle E_{B_n}, E'_{B_n}\rangle$. Alors $E(t)$ est un espace bornologique.

D é m o n s t r a t i o n. Sans restriction de la généralité, on peut supposer que la suite $(B_n)_n$ est croissante. Soit t_0 la topologie bornologique associée à la topologie t. On a que t_0 est plus fine que t, et

$$E(t_0)=\varinjlim E_{B_n}. \tag{1}$$

D'autre part, $(B_n)_n$ étant une suite fondamentale de parties bornées, on voit que $(E_{B_n})_n$ est une suite bornivore de sous-espaces de E (bounded-absorbent sequence, [2]). D'après le corollaire 3 ([2]), il en résulte que

$$E(t)=\varinjlim E_{B_n}(t). \tag{2}$$

En utilisant (1) et (2), comme dans la démonstration de la proposition 4, on peut prouver que $E' = E(t_0)'$, ce qui signifie que t_0 est une topologie compatible avec la dualité $\langle E, E' \rangle$. Cela étant, t est plus fine que t_0, d'où $t = t_0$. Donc $E(t)$ est un espace bornologique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] De Wilde M., *Sur les sous-espaces de codimension finie d'un espace linéaire à semi-normes*, Bull. Soc. Roy. Sci., Liège, 38 (1969), 450—453;

[2] De Wilde M. and Houet C. *On Increasing Sequences of Absolutely Convex Sets in Locally Convex Spaces*, Math Ann., 192 (1971), 257—261.

[3] Saxon S. and Levin M.. *Every countable-codimensional subspace of a barrelled space is barrelled*, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 91—96.

[4] Schaefer H., *Topological Vector Spaces*, The MacMillan Comp., New York, 1966.

[5] Valdivia M., *Absolutely convex sets in barrelled spaces*, Ann. Inst. Fourier, 21, 2 (1971), 3—13.

[6] Valdivia M., *On Bounded Sets Which Generate Banach Spaces*, Arch. Math., Vol. XXIII, 6 (1972), 640—642.