PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970, pp. 51—52

SUR UN THÉORÈME DE S. ZERVOS

Slaviša B. Prešić

(Présenté le 13. juin 1969)

Dans sa Thèse [Paris, 1960, pp. 342—343] S. Zervos a démontré le théorème suivant:

Théorème. *Soient* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *des ensembles d'indices et* θ_{i_j} $(\geqslant 0)$ *des nombres réels satifaisant à la condition*

$$\sum_{i_j \in I_j} \theta_{i_j} = j - t \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

où $t\,(0 < t \leqslant 1)$ *est un nombre fixe.*

Alors, la racine positive ξ *de l'équation*

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad \left(a_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i > 0\right)$$

satisfait à l'inégalité

$$\xi \leqslant \max \left\{ M, \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\prod\limits_{i_j \in I_j} M_{i_j}^{\theta_{i_j}}} \right)^{1/t} \right\} \qquad (M \overset{\text{def}}{=} \max \{M_{i_j}\})$$

où M_{i_j} *sont des nombres positifs quelconques.*

Par l'application de ce théorème-là, en donnant des valeurs particulières aux paramètres t, θ_{i_j}, M_{i_j} S. Zervos a déduit dans sa Thèse, entre autres, plusieurs résultats connus relatifs aux limites des modules des zéros des polynomes lesquels sont dus à Cauchy, Landau, Montel, Jensen, Birkhoff, Marković, Carmichael, Walsh, Kojima, etc.

Dans cette Note, nous allons donner une démonstration simple du théorème cité de S. Zervos, en le déduisant du lemme suivant.

Lemme. *Soient: E un ensemble non vide et totalement ordonné par la relation d'ordre* $\leqslant$, $a \in E$ *et* $J(x)$ *une équation en* x *possédant au moins une solution* ξ *telle que* $\xi > a$.

Soit, ensuite, $g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ *une fonction* $(\lambda_i > a;\ g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in E)$ *avec les propriétés:*

(a) $g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ *est une fonction strictement croissante de chacune des variables* $\lambda_i\,(i = 1, 2, \ldots, k)$ *pour* $\lambda_i > a\ (i = 1, 2, \ldots, k)$.

(b) *Si* $x > a$, *les équations* $J(x)$ *et* $x = g(x, \ldots, x)$ *sont équivalentes, c'est-à-dire*

$$x > a \Rightarrow (J(x) \Leftrightarrow x = g(x, x, \ldots, x)).$$

Alors pour toute solution ξ *de* $J(x)$ *on a*

$$\xi < \max\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \; g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)\} \tag{1}$$

$(i = 1,2, \ldots, k)$ *étant des éléments arbitraires de* E *satisfaisant à* $\lambda_i > a$ $(i = 1,2, \ldots, k)$.

Démonstration. Soit $\lambda_i > a$ $(i = 1,2, \ldots, k)$ et posons $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$. Les deux cas suivants sont possibles:

I $\lambda \geqslant \xi$. Alors on a év'demment (1).

II $\lambda < \xi$. Alors $\lambda_i < \xi$ $(i = 1,2, \ldots, k)$ et par suite, d'après (a) et (b),

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \geqslant g(\xi, \xi, \ldots, \xi) = \xi$$

de manière que l'inégalité (1) est de nouveau valable.

On déduit le théorème de S. Zervos du lemme démontré en y faisant les spécifications suivantes:

E est l'ensemble de tous les nombres réels,

a est le nombre 0.

La fonction g est déterminé par $\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\prod_{i_j \in I_j} \lambda_{i_j}^{\theta_{i_j}}} \right)^{1/t}$

où les conditions du théorème de S. Zervos sont remplies par t, θ_{i_j}.

Le lemme précédent peut être appliqué aux systèmes d'équations algébriques, de même qu'à d'autres équations de différents types.

Un lemme semblable est valable dans le cas $k = \infty$ $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ est une suite infinie).