Equations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes intégrables par un systéme de Charpit

Par

NICOLAS SALTYKOW

1. *Introduction.* — Il s'agit dans les pages qui vont suivre de généraliser, sur les équations à n variables indépendantes, les résultats insérés au tome II des *Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade* [1]).

On parvient, grâce à cette généralisation, d'intégrer plusieurs équations, qui échappent à la théorie de Legendre généralisée par N. Saltykow[2]) pour intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à un nombre quelconque des variables indépendantes. Leur théorie devient, de cette manière, complétée par l'étude qui va être développée plus loin.

2. *Forme des équations en question.* — Considérons donc, pour fixer les idées, l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{si}\,p_{si} + 2\sum_{s=1}^{n} D_s\,p_s + F = 0\,, \tag{1}$$

où l'on ait

$$A_{is} \equiv A_{si}\,, \quad A_{11} \gtrless 0\,, \tag{2}$$

---

1) *N. Saltykow — Equations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit.* Belgrade 1933, p. 66.

2) *N. Saltykow — Théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue* (Glas Srpske Kraljevske Akademije CLXIII Prvi Razred 81 Chapitre V. p, 37, *en serbe*; Bulletin t. II 1935, en français).

les valeurs p_s, p_{si} représentant respectivement les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction inconnue z prises par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$, à savoir:

$$p_s = \frac{\partial z}{\partial x_s}, \qquad p_{si} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_s \partial x_i},$$

les coefficients A_{si} et D_s étant les fonctions des variables indépendantes; quant à F c'est une fonction de $x_1, x_2, \ldots x_n$, z.

Pour réduire l'équation (1) à un système de Charpit, posons

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum_{s=1}^{n} L_s p_s = z_1, \\ \sum_{i=1}^{n} L_i p_i' = N, \end{cases}$$

où les $n+1$ coefficients L_s et N sont à déterminer de telle manière que le système (3) soit équivalent à l'equation (1), p_i' désignant la dérivée partielle du premier ordre de la nouvelle fonction inconnue z_1 prise par rapport à x_i.

Il faut pour cela, qu'après avoir éliminé la fonction inconnue z_1 des équations (3), on obtienne l'équation

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} L_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{s=1}^{n} L_s p_s\right) = N,$$

reproduisant l'équation donnée (1) à un facteur de proportionnalité λ près.

L'égalité (4) devient, grâce à la différentiation,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} L_i L_s p_{si} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} L_i \frac{\partial L_s}{\partial x_i} p_s = N.$$

On en tire les conditions suivantes:

$$(5) \qquad \begin{cases} L_i L_s = \lambda A_{si}, \qquad (s = 1, 2, \ldots n), \\ (i = 1, 2, \ldots n), \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} L_i \frac{\partial L_s}{\partial x_i} = 2\lambda D_s, \quad (s=1, 2, \ldots n), \tag{6}$$

$$N = -\lambda F. \tag{7}$$

Les relations (5) correspondant à la valeur 1 de l'indice i, ainsi que l'équation (7), définissent les valeurs des coefficients $L_2, L_3, \ldots L_n$ N et λ, en vertu de l'hypothèse (2), de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_k = \dfrac{A_{1k} L_1}{A_{11}}, & (k=2, 3, \ldots n), \\ N = -\dfrac{F L_1^2}{A_{11}}, & \lambda = \dfrac{L_1^2}{A_{11}}. \end{array} \right. \tag{8}$$

Grâce à ces dernières valeurs (8), toutes les autres relations (5) produisent entre les coefficients de l'équation donnée (1) les relations suivantes:

$$A_{1i}^2 = A_{11} A_{ii}, \quad (i=2, 3, \ldots n), \tag{9}$$

$$A_{1i} A_{si} = A_{11} A_{is}, \quad (i, s=2, 3, \ldots n). \tag{10}$$

Les $n-1$ conditions (9) que doivent vérifier les coefficients de l'équation (1), pour qu'elle soit réductible au système (3), démontrent que l'équation (1) doit être, d'abord, du type ***parabolique***; de plus, les conditions complémentaires (10) doivent avoir lieu, ainsi que les nouvelles conditions que l'on va établir plus loin.

Cela posé, il nous reste encore à prendre en considération les n conditions (6) qui deviennent, grâce aux formules (8),

$$\sum_{i=1}^{n} A_{1i} \frac{\partial L_1}{\partial x_i} = 2 D_1 L_1, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{1i} \frac{\partial L_s}{\partial x_i} = 2 D_s L_1, \quad (s = 2, 3, \ldots n). \tag{12}$$

La première relation obtenue (11), étant une équation aux dérivées partielles du premier orde en L_1, va définir la valeur inconnue de ce dernier coefficient.

Enfin, le système (12), en y substituant les valeurs (8) des coefficients L_s, prend la forme:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} A_{1i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{A_{1s}}{A_{11}}\right) + 2D_1 \frac{A_{1s}}{A_{11}} = 2D_s, \\ (s=2, 3, \ldots n). \end{array} \right.$$

Ces $n-1$ dernières relations représentent les $n-1$ conditions différentielles complémentaires en question devant être satisfaites aussi pour la possibilité de la réduction étudiée.

Il est bien aisé de voir que, dans l'hypothèse où $n=3$, les conditions obtenues sont identiques à celles établies dans les Mémoire mentionné antérieurement.[1])

3. *Intégration de l'équation étudiée.* — Cela étant passons, après avoir défini la valeur du coefficient L_1, à l'intégration du système (3). Dans ce but, on va le transformer, d'abord, en y substituant les valeurs obtenues des coefficients (8). Le système (3) pourra, donc, s'écrire de la manière suivante:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^{n} A_{1s} p_s = \frac{A_{11} z_1}{L_1}, \\ \sum_{s=1}^{n} A_{1s} p'_s = -F_1 L. \end{array} \right.$$

Or, on observe aisément que l'équation (11), définissant la valeur de L_1, est linéaire par rapport aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue; de plus, les coefficients du premier membre de l'équation (11) sont identiques à ceux auprès des dérivées des fonctions inconnues dans les équations (14). Par conséquent, l'ensemble de toutes les trois équations (11) et (14) forme encore un système de Charpit à trois fonctions inconnues L_1, z et z_1. C'est pour cela que la recherche de la valeur de L_1 peut être effectuée simultanément avec z et z_s.

Le système correspondant d'équations différentielles ordinaires, dont dépend l'intégration du système considéré de Charpit, prend la forme suivante:

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx_1}{A_{11}} = \frac{dx_2}{A_{12}} = \dots = \frac{dx_n}{A_{1n}} = \frac{dL_1}{2D_1 L_1} = \\ &\qquad = \frac{dz}{\dfrac{A_{11} z_1}{L_1}} = \frac{dz_1}{-FL_1}\,. \end{aligned} \right.$$

Les n premières rapports (15) définissent $n-1$ intégrales distinctes de la forme:

$$(16)\qquad \varphi_i(x_1, x_2, \dots x_n) = \alpha_i\,, \quad (i=1, 2, \dots n-1),$$

les α_i désignant $n-1$ constantes arbitraires.

Il s'en suit, par une quadrature, la valeur générale de L_1:

$$(17)\qquad L_1 = e^{\Theta(x_1, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1})}\,\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n),$$

où la fonction Θ est définie par une quadrature, quant à Ψ, c'est une fonction arbitraire.

Grâce au caractère auxiliaire qu'offre la valeur du coefficient L_1, il est permis de prendre pour L_1 une valeur particulière quelconque provenant de la formule générale (17). Il est, donc, le plus avantageux de lui attribuer la valeur qui permetterait d'obtenir de la manière la plus favorable les deux dernières intégrales du système (15).

Supposons, donc, que l'on ait trouvé ces dernières sous la forme suivante:

$$\Phi_i(x_1, x_2, \dots x_n, z, z_1) = C_i\,, \qquad (i=1, 2),$$

C_1, C_2, étant deux constantes arbitraires.

Il s'en suit l'intégrale générale du système (14):

$$(18) \quad \begin{cases} \Phi_i(x_1, x_2, \ldots x_n, z, z_1) = \Psi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}), \\ (i = 1, 2), \end{cases}$$

Ψ_1 et Ψ_2 désignant deux fonctions arbitraires.

L'élimination de la fonction auxiliaire z_1, entre les deux équations (18), produit l'intégrale générale de l'équation donnée (1), sous les conditions (9), (10) et (13).

L'intégrale générale obtenue implique évidemment deux fonctions arbitraires.